Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Método do Ponto Proximal aplicado ao Problema de Equilíbrio em Espaços de Hilbert.

Jaciel Antonio Pereira da Silva

Teresina - 2016

Jaciel Antonio Pereira da Silva

Dissertação de Mestrado:

Método do Ponto Proximal aplicado ao Problema de Equilíbrio em espaços de Hilbert.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S586m Silva, Jaciel Antonio Pereira da.
Método do ponto proximal aplicado ao problema de equilíbrio em espaços de Hilbert / Jaciel Antônio Pereira da Silva. – Teresina, 2016.
44f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciencias da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.
Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

1. Algoritmos - Matemática. 2. Ponto Proximal. 3. Otimização.. I. Título

CDD 511.8

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Método do Ponto Proximal aplicado ao Problema de Equilíbrio em Espaços de Hilbert

Jaciel Antônio Pereira da Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 14 de Julho de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes (UFPI) - Presidente

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto (UFPI)

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior (UESPI)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DA DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO

No dia quatorze de julho de dois mil e dezesseis, às dezesseis horas, no Auditório do Departamento de Matemática, desta Universidade, reuniram-se os membros da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr. **Jurandir de Oliveira Lopes** (Presidente e Orientador-UFPI), Dr. **João Xavier da Cruz Neto** (UFPI), Dr. **Pedro Antônio Soares Júnior** (UESPI), a fim de julgar a dissertação do mestrando **JACIEL ANTÔNIO PEREIRA DA SILVA**, intitulada "*Método do Ponto Proximal aplicado ao Problema de Equilíbrio em Espaços de Hilbert*", para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aberta a sessão pelo presidente, coube ao candidato na forma regimental, expor o tema de sua dissertação dentro do tempo regulamentar. Após haver analisado o referido trabalho e arguido o candidato, os membros da Banca Examinadora deliberaram pela **APROVAÇÃO** do mesmo. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

TERESINA, 14 DE JULHO DE 2016.

Recomendações da Banca:

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes (UFPI) - Presidente

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto (UFPI)

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior (UESPI)

Dedico este trabalho ao Altíssimo Criador, minha mãe, meu pai, meus irmãos e à Clara Viviane minha namorada.

Agradecimentos

Agradeço ao Criador dos Céus e da terra, por que Ele é bom e sua misericórdia dura para sempre. Agradeço a minha mãe PAIXÃO, meu pai BENEDITO e família que são meus incentivadores e investiram no meu futuro sem nenhuma dúvida.
Agradeço à minha linda Clara Viviane que esteve comigo nos momentos bons e ruins. Um agradecimento à Dona Carmen por ter deixado um presente tão lindo: Clara...
Agradeço ao professor Jurandir por ter me orientado e peço desculpa por algum erro. Aprendi muito com as aulas e obrigado pela paciência. Agradeço tambem ao professor Xavier pelo curso ministrado e por ter me passado boa parte desse conhecimento.
Agradeço aos colegas de mestrado, foram muitas as pressões durante as aulas mas enfim terminamos com sucesso. Agradeço a todos que me apoiaram. Obrigado.
Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*Humilhai-vos pois debaixo da potente mão do Criador, para que em seu tempo vos exalte; lançando sobre Ele toda vossa ansiedade, por que Ele tem cuidado de vós*".

1 Pedro5: 6-7.

Resumo

Neste trabalho apresentamos o Método do Ponto Proximal para resolver o Problema de Equilíbrio definido em um conjunto convexo e fechado contido em um espaço de Hilbert real. Apresentamos a definição do problema de Equilíbrio, alguns casos particulares e resultados de existência. Mostramos que o Método do Ponto Proximal para resolver o Problema de Equilíbrio PPEP gera uma sequência de pontos que são soluções dos subproblemas propostos. Mostramos também a convergência do PPEP para a solução do Problema de Equilíbrio sobre hipóteses razoáveis.

Palavras-chave: Método do Ponto Proximal, Problema de Equilíbrio e Método de Regularização.

Abstract

In this work we present the Proximal Point Method to solve the Equilibrium Problem defined in a convex and closed set contained in a real Hilbert space. We present the definition of the Equilibrium problem, some particular cases and some existence results. Show that the Proximal Point Method to solve the Equilibrium problem PPEP generates a sequence of points that are solution of each proposed sub-problems. Also show the convergence of PPEP to solve the Equilibrium problem on reasonable assumptions.

Key words: Proximal Point Method, Equilibrium Problem and Regularization Method.

Sumário

Introdução

Seja H um Hilbert real, $P(H)$ o conjunto das partes de H e $T : H \to P(H)$ (ou $T : H \rightrightarrows H$) um operador ponto-conjunto monótono maximal com $T(x) \neq \emptyset$ convexo, compacto para todo $x \in H$. O Método de Ponto Proximal (MPP) foi introduzido por Martinet em 1970 e aperfeiçoado por Rockafellar para encontrar zeros de operadores monótonos definindo da seguinte maneira: Dada $\{\gamma_k\}$ uma sequência real positiva e limitada, o método gera uma sequência $\{x^k\} \subset H$ onde x^{k+1} é o único zero de $T^k(x) = T(x) + \gamma_k(x - x^k)$. Se T é maximal, então a sequência converge fracamente para o zero de T (ver [21]).

Seja $K \subset H$ convexo e fechado e $f : K \times K \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a propriedade $f(x,x) = 0, \forall x \in K$, o Problema de Equilíbrio, segundo Blum e Oettli, é definido por

$$EP(f,K)\text{: Achar } \bar{x} \in K \text{ tal que } f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in K.$$

O problema de Equilíbrio foi introduzido por Ky Fan [7] e estudado por outros autores como em [4] e [10] . O Problema de Equilíbrio modela vários outros, a saber: otimização convexa, ponto fixo, Equilíbrio de Nash, problemas de complementariedade e desigualdade variacional.

O Método do Ponto Proximal para o Problema de Equilíbrio desenvolvido em [8], denotado por PPEP é definido da seguinte forma: Dados $0 < \gamma_k < \bar{\gamma}$, $x^0 \in K$, para cada $x^k \in K$, defina x^{k+1} como única solução do $EP(f_k, K)$ onde $f_k(x,y) = f(x,y) + \gamma_k\langle x - x^k, y - x\rangle$, isto é, $f(x^{k+1}, y) + \gamma_k\langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1}\rangle \geq 0, \forall y \in K$. A convergência do PPEP para o Problema de Equilibrio $EP(f,K)$ é analisada mediante algumas hipóteses razoáveis.

Iniciamos com as definições do Problema de Equilíbrio, mas o objetivo principal deste trabalho é dissertar sobre a convergência do Método do Ponto Proximal para Problema de Equilíbrio tendo como referência Iusem e Sosa [8].

No capítulo 1, expomos a teoria básica de topologia, noções de análise funcional e análise convexa. As referências [1], [3], [5], [14], [15], [16], [20], [22], [23], [24] e [26] foram essenciais nesta parte.

No capítulo 2, definiremos o Problema de Equilíbrio em espaços de Hilbert, as hipóteses que garantem a existência de solução, seus problemas relacionados e suas aplicações. As referências importantes são [4], [7], [10], [12], [19].

No capítulo 3, apresentaremos o Método do Ponto Proximal para o Problema de Equilíbrio PPEP segundo Iusem [8] e analisaremos a convergência. Para aprofundamentos dos assuntos é recomendado Iusem e Sosa [8], Blum e Oettli [4], Iusem [9].

Capítulo 1

Noções Preliminares

Apresentamos neste capítulo as definições e resultados básicos que serão utilizados durante o texto. Inclui tópicos básicos de topologia, análise funcional e análise convexa.

1.1 Análise e topologia

Começaremos com alguns conceitos de análise e topologia no espaço euclidiano . As principais referências são [3], [14], [15], [16], [18] e [23].

Definição 1.1.1 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado quando existe um número $c > 0$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in X$.*

Definição 1.1.2 *Dado $X \subset \mathbb{R}$ limitado, definimos o supremo de X como sendo o elemento $L = \sup X$ que satisfaz $x \leq L, \forall x \in X$ e se $x \leq S, \forall x \in X$ então $L \leq S$. Analogamente, definimos o ínfimo de X.*

Dado $\{X\} \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado, defina $-X = \{-x; x \in X\}$, então temos $\inf(-X) = -\sup X$ e $\sup(-X) = -\inf X$ (ver[14]).

Definição 1.1.3 *Uma sequência em $\mathbb{R}$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e denotamos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

Definição 1.1.4 *Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é limite de uma sequência real $\{x_k\}$ quando para todo $\epsilon > 0$ existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \epsilon$. Neste caso escreve-se $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim x_k = a$ ou $x_k \to a$.*

Definição 1.1.5 *Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é valor de aderência (aderente) de uma sequência $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ quando alguma subsequência de $\{x_k\}$ converge para a.*

Observação 1.1.1 *Quando uma sequência* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ *é limitada existe(m) subsequência(s) convergente(s) (Bolzano-Weierstrass) então o conjunto dos valores aderentes de* $\{x_k\}$ *é não-vazio e limitado (ver [14]).*

Definição 1.1.6 *Seja* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ *uma sequência limitada, definimos o limite superior de* $\{x_k\}$ $(\limsup x_k)$ *como sendo o maior valor de aderência da sequência. Analogamente definimos o limite inferior de* $\{x_k\}$ $(\liminf x_k)$ *como o menor valor de aderência.*

Agora temos que existe $\lim x_k = a \Leftrightarrow \limsup x_k = \liminf x_k = a$. Se $x_k \leq y_k$ (limitadas) então $\liminf x_k \leq \limsup x_k \leq \liminf y_k \leq \limsup y_k$. Temos também que $\liminf(-x_k) = -\limsup x_k$ e $\limsup(-x_k) = -\liminf x_k$ (ver [14]).

Definição 1.1.7 *Uma sequência* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}$ *é não-decrescente quando* $x_k \leq x_{k+1}$ *para todo* k*. Analogamente define-se sequência não-crescente. Uma sequência é monótona quando ou é não-crescente ou não-decrescente.*

Proposição 1.1.1 *Toda sequência monótona e limitada de números reais é convergente.*
Demonstração. Ver [14].

Estudaremos agora conceitos de análise em espaços mais gerais. Considere H um espaço vetorial real.

Definição 1.1.8 *Um produto interno em um espaço vetorial real* H *é uma aplicação* $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ *que satisfaz para todo* $x, y, z \in H, c \in \mathbb{R}$*:*
(a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *(simétrica).*
(b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
(c) $\langle cx, z \rangle = c.\langle x, z \rangle$ *(bilinear).*
(d) se $x \neq 0, \langle x, x \rangle > 0$ *(positiva definida).*

Exemplo 1.1.1 *Se* $H = \mathbb{R}^n$*, o exemplo de produto interno mais usual é o produto interno canônico* $\langle x, y \rangle = \sum_{i}^{n} x_i y_i$.

Definição 1.1.9 *Uma norma em* H *é uma aplicação* $\|.\| : H \to \mathbb{R}$ *que satisfaz para todo* $x, y \in H, c \in \mathbb{R}$*:*
(N1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
(N2) $\|cx\| = |c|.\|x\|$.
(N3) se $x \neq 0$ *então* $\|x\| > 0$.

Observação 1.1.2 *Uma consequência da definição de norma em H é que, para todo $x, y, z \in H$ temos $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\|$ e também que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (ver [26]).*

Exemplo 1.1.2 *As principais normas em $\mathbb{R}^n$, onde $x = (x_1, ..., x_n)$, são a norma euclidiana ($\|x\|_E = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$), a norma da soma ($\|x\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$) e a norma do máximo($\|x\|_M = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$) (ver [15]).*

Um produto interno $\langle ., . \rangle$ em H pode induzir uma norma $\|.\| = \sqrt{\langle ., . \rangle}$ em H. Apartir de agora vamos considerar H um espaço vetorial real normado em que a norma provém do produto interno.

Proposição 1.1.2 (Cauchy-Schwarz) *Seja $x, y \in H$, tem-se $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$.*
Demonstração. Ver [26].

Definição 1.1.10 *Um subconjunto $X \subset H$ é limitado quando existe um número $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in X$.*

Definição 1.1.11 *Uma sequência em um espaço normado H é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow H$ e denotamos $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Uma subsequência da sequência $\{x^k\}$ é uma restrição de $\{x^k\}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ e a denotamos por $\{x^{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$.*

Definição 1.1.12 *Diz-se que um ponto $a \in H$ é limite de uma sequência $\{x^k\}$ em H quando para todo $\epsilon > 0$ existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow \|x^k - a\| < \epsilon$. Neste caso diz-se que $\{x^k\}$ é convergente para a e escreve-se $\lim x^k = a$ ou $x^k \rightarrow a$. Quando a sequência não converge ela é dita divergente.*

Observação 1.1.3 *Seja uma sequência $\{x^k\} \subset H$.*
a) Tem-se que $\lim x^k = a \Leftrightarrow \lim \|x^k - a\| = 0$.
b) Toda sequência de H convergente é limitada (ver [23]).
c) Se $\lim x^k = 0$ e $\{\gamma^k\} \subset \mathbb{R}$ é limitada, então $\lim \gamma^k . x^k = 0$ (ver [23]).

Observação 1.1.4 *Sejam $x^k, y^k \in H$, $\lim x^k = a, \lim y^k = b$. Então $\lim \langle x^k, y^k \rangle = \langle a, b \rangle$. Com efeito, quando $k \rightarrow \infty$ temos $\|x^k - a\| \rightarrow 0$ e $\|y^k - b\| \rightarrow 0$, logo $\langle x^k - a, x^k - a \rangle \rightarrow 0$ e $\langle y^k - b, y^k - b \rangle \rightarrow 0$. Como $\{y^k\}$ é limitada então $\lim \langle x^k - a, y^k \rangle = 0$. Assim,*

$$\|\langle x^k, y^k \rangle - \langle a, b \rangle\| = \|\langle x^k - a, y^k \rangle + \langle a, y^k \rangle - \langle a, b \rangle\| \longrightarrow 0.$$

Definição 1.1.13 *Uma sequencia* $\{x^k\} \subset H$ *é de Cauchy se para todo* $\epsilon > 0, \exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $k, p > k_0 \Rightarrow \|x^k - x^p\| < \epsilon$.

Definição 1.1.14 *Um espaço* H *chama-se completo quando todas as sequências de Cauchy de* H *são convergentes para pontos de* H.

Definição 1.1.15 *Um espaço normado completo onde a norma provém do produto interno chama-se espaço de Hilbert.*

Vamos considerar de agora em diante que H um espaço de Hilbert. Apresentaremos noções básicas de conjuntos abertos, fechados e compactos.

Definição 1.1.16 *Diz-se que* $a \in H$ *é ponto de aderência (aderente) a um conjunto* $X \subset H$ *quando alguma sequência de* X *converge para* a. *O conjunto dos pontos aderentes de* X *chama-se* $fecho$ *de* X *e é denotado por* $\bar{X}$.

Definição 1.1.17 *Seja* $X \subset H$, *um ponto* $a \in H$ *chama-se ponto de acumulação de* X *quando toda vizinhança de* a *contém infinitos pontos de* X *diferente de* a. *Vamos denotar o conjunto dos pontos de acumulação de* X *por* X'

Proposição 1.1.3 *São equivalentes:* a *é ponto de acumulação de* $X \Leftrightarrow$ *existe uma sequencia* $\{x^k\} \subset X - \{a\}$ *com* $\lim x^k = a$.
Demonstração. Ver [23].

Definição 1.1.18 *Um conjunto* X *é fechado quando contem todos os seus pontos aderentes, isto é,* $X = \bar{X}$.

Observação 1.1.5 *Dizer que* X *é fechado significa que dada qualquer sequência* $\{x^k\} \subset X$ *com* $\lim x^k = a$ *tem-se que* $a \in X$ *(ver [18]).*

Proposição 1.1.4 *Um conjunto* $X \subset H$ *é aberto* $\Leftrightarrow$ $H - X$ *é fechado.*
Demonstração. Ver [23].

Definição 1.1.19 *Um conjunto* $X \subset H$ *é afim quando* $(1 - \lambda)x + \lambda y \in X$, $\forall x, y \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *O Fecho afim de* $C \subset H$ *é o menor conjunto afim contendo* C *e é denotado por* $\operatorname{aff} C$.

Definição 1.1.20 *Seja $C \subset H$, denote $C+\epsilon B = \{x \in H; \exists y \in C, \|x-y\| \leq \epsilon\}$ onde B é a bola unitária. O conjunto $ri(C) = \{x \in affC; \exists \epsilon > 0, (x+\epsilon B) \cap affC \subset C\}$ chama-se interior relativo de C.*

Definição 1.1.21 *Uma cobertura aberta de X é uma coleção de abertos $\{G_i\}_{i\in L}$ de H tal que $X \subset \bigcup_{i\in L} G_i$, onde L é um conjunto de índices.*

Definição 1.1.22 *Um conjunto $K \subset H$ é compacto quando toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita para K. Isto é, para uma cobertura aberta $\{G_i\}$, existem finitos $G_{i_1}, ..., G_{i_r}$ tal que $K \subset \cup_{j=1}^{r} G_{i_j}$. Em espaços de dimensão finita equivale a dizer que K é limitado e fechado.*

Proposição 1.1.5 (Caracterização de compacto) *Um conjunto $K \subset H$ é compacto se, e somente se, toda sequência de K possui subsequência convergente para um ponto de K.*

Demonstração. Ver [16].

Nas próximas definições serão tratadas a continuidade e a diferenciabilidade.

Definição 1.1.23 *Seja $f : X \subset H \to \mathbb{R}$ uma aplicação e a um ponto de acumulção de X. Um ponto $b \in \mathbb{R}$ é limite de f quando x tende para a, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < \|x-a\| < \delta$ implicar que $|f(x) - b| < \epsilon$ e o denotamos $b = \lim_{x\to a} f(x)$.*

Observação 1.1.6 *Sejam $f, g : X \subset H \to \mathbb{R}$, se $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = s$ então valem:*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + s \text{ e } \lim_{x\to a} f(x)g(x) = bs.$$

Se g é limitada e $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Definição 1.1.24 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação, dizemos que f é contínua em $a \in X$ quando para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $0 \leq \|x-a\| < \delta$ implicar $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.*

Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de X dizemos que f é contínua em X.

A soma, o produto e o quociente de aplicações contínuas é contínua (ver [23]).

Exemplo 1.1.3 *O produto interno $f(x,y) = \sum_{i=1} x_i y_i = \langle x, y\rangle$ é contínuo. Com efeito, dado $a, b \in H$ tal que $\|(x-a, y-b)\| \to 0$; faça $x = a+h$ e $y = b+k$; daí temos $\|(h,k)\| \to (0,0)$. Assim $\langle x,y\rangle - \langle a,b\rangle = \langle a,k\rangle + \langle b,h\rangle + \langle h,k\rangle \to 0$ (se $(h,k) \to (0,0)$).*

Observação 1.1.7 *Uma aplicação f definida em X é contínua em relação a x_i quando $x_i \mapsto f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ é contínua.*

Definição 1.1.25 *Seja $U \subset H$ um subconjunto aberto; $a, (a+h) \in U$ e $f : U \to \mathbb{R}$, a i-ésima derivada parcial de f em a é o limite (quando existe) $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$. O vetor $\nabla f(a) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]$ é chamado de gradiente de f em a. Seja $v \in H$ um vetor, a derivada direcional de f em a na direção de v é o limite (quando existe) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t}$.*

Definição 1.1.26 *Um aplicação $f : U \subset H \to \mathbb{R}$ é diferenciável em a quando existe uma aplicação linear T tal que $f(a+v) = f(a) + \langle T, v\rangle + R(v)$ onde $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{R(v)}{\|v\|} = 0$. Além disso, $T = \nabla f(a)$.*

Definição 1.1.27 *Dada uma aplicação $f : U \subset H \to \mathbb{R}$, $a \in U$ é ponto de máximo global de f em U quando para todo $v \in U$ tem-se $f(a) \geq f(v)$. Um ponto $a \in U$ é ponto de máximo local de f quando existe $\delta > 0$ tal que $v \in U \cap B(0, \delta) \Rightarrow f(a+v) \leq f(a)$. Analogamente $a \in U$ é ponto de mínimo global de f em U quando para todo $v \in U$ tem-se $f(a) \leq f(v)$. Um ponto $a \in U$ é ponto de mínimo local de f quando existe $\delta > 0$ tal que $v \in U \cap B(0, \delta) \Rightarrow f(a+v) \geq f(a)$.*

1.2 Noções de análise funcional

Nesta seção iremos falar um pouco das noções básicas de análise funcional. As principais referências usadas são [5] e [26].

Definição 1.2.1 *Dado H, o Dual de H é o conjunto*

$$H^* = \{f : H \to \mathbb{R}; f \text{ é } funcional\ linear\}.$$

Proposição 1.2.1 *O dual de um espaço de Hilbert é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver [26].

Definição 1.2.2 *Seja $x, y \in H$, o segmento de reta (fechado) que vai de x à y é o conjunto $[x, y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$. Um subconjunto $K \subset H$ é convexo quando $[x, y] \subset K$ para todo $x, y \in K$.*

Observação 1.2.1 *Todo espaço vetorial real é convexo. O produto cartesiano finito de convexos é convexo.*

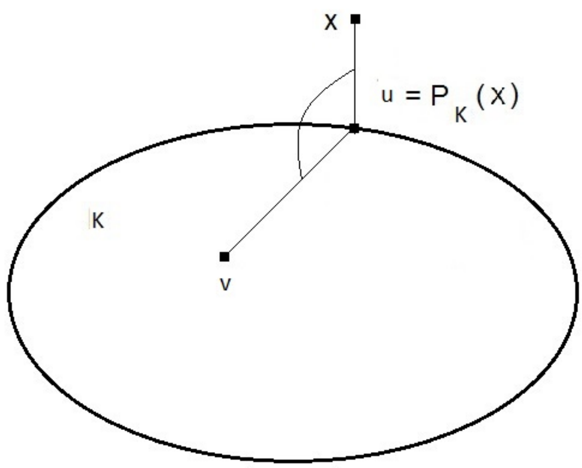
Definição 1.2.3 *Seja $K \subset H$ um fechado, uma projeção ortogonal de $x \in H$ em K é o ponto de K mais próximo de x, ou seja, uma projeção de x em K é o minimizador do problema $min\|v - x\|$ com $v \in K$.*

Teorema 1.2.1 (Projeção Ortogonal) *Seja $K \subset H$ um convexo, fechado e não- vazio. Então $\forall x \in H$, existe único $u \in K$ tal que $\forall v \in K$ tem-se*

$$\|x - u\| = dist(x, K) = \min_{v \in K} \|x - v\| \text{ e } \langle x - u, v - u \rangle \leq 0.$$

Nota: $u = P_K(x)$ é a Projeção ortogonal de x sobre K.

Demonstração. Ver [5].



Definição 1.2.4 *Uma sequência $\{x^k\} \subset H$ converge fracamente para $x \in H$ quando*

$$0 = \lim_{k \to \infty} \langle x^k - x, y \rangle, \forall y \in H.$$

Denotamos a convergência fraca de $\{x^k\}$ para x por $x^k \rightharpoonup x$ ou $x^k \xrightarrow{\text{fraco}} x$.

Definição 1.2.5 *Uma sequência $\{x^k\} \subset H$ converge fortemente para $x \in H$ quando*

$$0 = \lim_{k \to \infty} \langle x^k - x, x^k - x \rangle.$$

Proposição 1.2.2 *Toda sequência limitada em H possui subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver [20].

Proposição 1.2.3 *Seja* $\{x^k\}$ *uma sequência em* H.

(i) $x^k \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x^k) \to f(x), \forall f \in H^*$.

(ii) $x^k \to x \Rightarrow x^k \rightharpoonup x$.

(iii) $x^k \rightharpoonup x \Rightarrow \{x^k\}$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x^k\|$.

Demonstração. Ver [5].

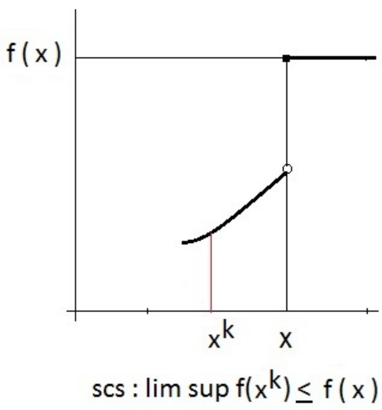
Proposição 1.2.4 *Quando* H *possui dimensão finita, então a convergência fraca coincide com a convergência forte.*

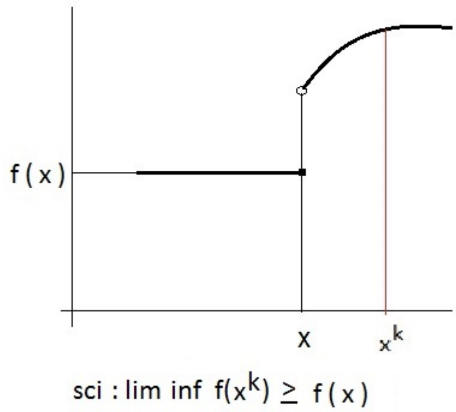
Demonstração. Ver [5].

Proposição 1.2.5 *Seja* $C \subset H$ *um conjunto convexo. O conjunto* C *é fechado fraco se, e somente se,* C *é fechado forte.*

Demonstração. Ver [5].

Definição 1.2.6 *Uma aplicação* $f : D \subset H \to \mathbb{R}$ *é semicontínua inferiormente (sci) em* $x \in D$ *quando para toda* $\{x^k\} \subset D$ *tal que* $x^k \to x$ *implica* $\liminf f(x^k) \geq f(x)$. *E semicontínua superiormente (scs) em* $x \in D$ *quando* $\limsup f(x^k) \leq f(x)$. *Uma aplicação* f *é* ***fracamente*** *semicontínua inferiormente em* $x \in D$ *quando para toda* $\{x^k\} \subset D$ *tal que* $x^k \rightharpoonup x$ *implica* $\liminf f(x^k) \geq f(x)$ *e analogamente* f *é* ***fracamente*** *semicontínua superiormente em* x *quando* $x^k \rightharpoonup x$ *implica* $\limsup f(x^k) \leq f(x)$.





Observação 1.2.2 *Temos que* f *é sci e scs simultâneamente em um ponto se, e somente se,* f *é contínua neste ponto. A função norma é fracamente sci, pois se* $x^k \rightharpoonup x$ *então* $\|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|x^k\|$.

1.3 Noções de análise convexa

Veremos aqui alguns aspectos básicos de análise convexa e problemas de otimização. Os resultados podem ser vistos em [1], [22] e [24].

Seja $D \subset H$ e $f : D \to \mathbb{R}$. O problema de Otimização é dado por:

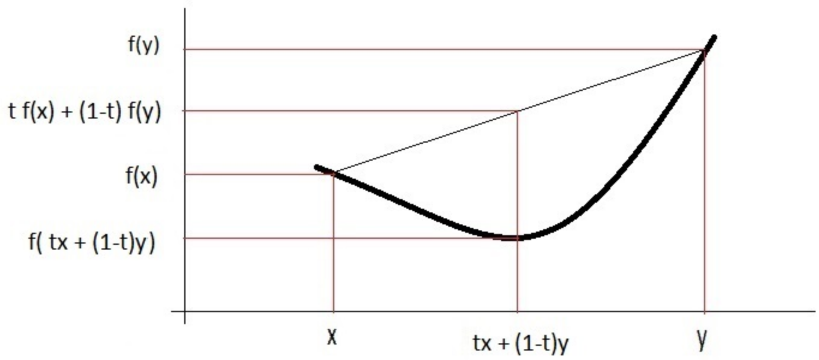
$$(1.1)\ \min f(x) \text{ com } x \in D.$$

Definição 1.3.1 *Dizemos que uma sequência* $\{x^k\} \subset D$ *é crítica em relação a* D *quando e* $\|x^k\| \to \infty$ *ou quando* $x^k \to x$ *com* $x \in \partial D$.
Dizemos que $f : D \to \mathbb{R}$ *é coerciva em* D *quando para toda sequencia crítica* $\{x^k\}$ *em* D *tem-se* $\limsup_{k\to\infty} f(x^k) = +\infty$.

Exemplo 1.3.1 *Suponha que exista solução para o problema* $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$, *com* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Então a aplicação* $F(x) = f(x) + (1/2)\|x - a\|^2$ *é coerciva. Com efeito,* $f(x) \geq \beta$ *para algum* β *fixo. Se* $\lim \|x^k\| = +\infty$, *então*

$$\lim F(x^k) = \lim\,[f(x^k) + (1/2)\|x^k - a\|^2] \geq \lim\,[\beta + (1/2)\|x^k - a\|^2] = +\infty.$$

Definição 1.3.2 *Seja* D *convexo, diz-se que* f *é convexa em* D *quando para todo* $x, y \in D$ *e* $\alpha \in (0, 1)$ *tem-se* $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ *(ver figura abaixo). Se a desigualdade é estrita,* f *é estritamente convexa. Diz-se que* f *é quase-convexa em* D *quando os conjuntos de nível* $\{x \in D; f(x) \leq c, c \in \mathbb{R}\}$ *são convexos.*



Exemplo 1.3.2 *A função* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \|x\|$ *é convexa. Com efeito, para* $\alpha \in (0, 1)$ *temos*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \|\alpha x + (1 - \alpha)y\| \leq \alpha\|x\| + (1 - \alpha)\|y\| = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Exemplo 1.3.3 *O produto interno $f(x,y) = \langle x, y\rangle$ é convexa em cada argumento. Com efeito, para $t \in (0,1)$ temos $(1-t).(x,y) + t(x,b) = (x,(1-t)y + tb)$, daí*

$$f(x,(1-t)y+tb) = \langle x,(1-t)y+tb\rangle = (1-t)\langle x,y\rangle + t\langle x,b\rangle = (1-t)f(x,y) + tf(x,b).$$

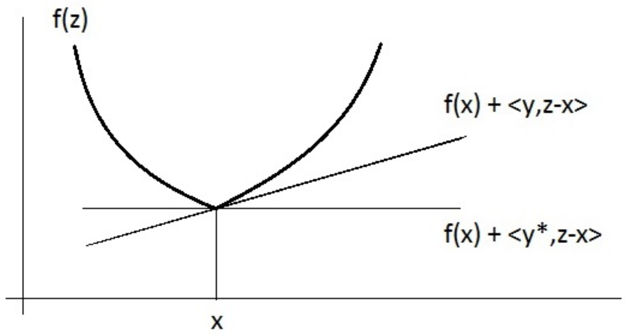
Analogamente isso é válido para o primeiro argumento.

Definição 1.3.3 *Seja D um conjunto convexo, dizemos que f é côncava em D quando $(-f)$ é convexa em D. A função f é quase-côncava em D quando $\{x \in D; f(x) \geq c, \forall c \in \mathbb{R}\}$ é convexo.*

Vamos apresentar a definição de aplicações convexas não diferenciáveis.

Definição 1.3.4 *Seja D aberto, convexo e $f : D \to \mathbb{R}$ uma aplicação convexa . Dizemos que $y \in H$ é o subgradiente de f em $x \in D$ quando $f(z) \geq f(x) + \langle y, z-x\rangle$ para todo $z \in D$ (ver figura abaixo). O conjunto de todos os subgradientes de f em x se chama subdiferencial de f em x, o denotamos por $\partial f(x)$, isto é,*

$$\partial f(x) = \{y \in H; f(z) \geq f(x) + \langle y, z-x\rangle, \forall z \in D\}.$$



Proposição 1.3.1 *Seja $f : D \subset H \to \mathbb{R}$ uma aplicação convexa em D. Então o subdiferencial de f em $x \in D$ é não-vazio, convexo e compacto.*
Demonstração. Ver [22].

Proposição 1.3.2 *Uma aplicação $f : D \subset H \to \mathbb{R}$ convexa, é diferenciável no ponto x se, e somente se, o subdiferencial $\partial f(x)$ é um conjunto unitário.*
Demonstração. Ver [22].

Exemplo 1.3.4 *seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(z) = |z|$, *o subdiferencial de* f *em* x *é dado por*

$$\partial f(x) = \{y \in \mathbb{R};\ y(z - x) \leq |z| - |x|, \forall z \in \mathbb{R}\}.$$

Temos f *é derivável em* $x \neq 0$. *Para* $x > 0 \Rightarrow \partial f(x) = \{1\}$. *Para* $x < 0 \Rightarrow \partial f(x) = \{-1\}$. *Para* $x = 0$ *e* $z = 0$ *então a desigualdade acima vale para todo* $y \in \mathbb{R}$. *Agora para* $x = 0$ *e* $z \neq 0$ *temos*

$$y.z \leq |z| \Rightarrow y.\frac{z}{|z|} \leq 1 \Rightarrow y \in [-1, 1] \Rightarrow \partial f(0) = [-1, 1].$$

Vamos definir agora operadores monótono, monótono maximal e não-expansivo. Seja $P(H)$ o conjunto das partes de H e operador *ponto-conjunto* por $T : H \rightrightarrows H$ ou $T : H \to P(H)$.

Definição 1.3.5 *Um operador* $T : H \to P(H)$ *é monótono em* H *quando para todo* $x, y \in H$ *e* $u \in T(x), v \in T(y)$ *temos* $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$.

Exemplo 1.3.5 *Seja* $D \subset H$ *um conjunto convexo, seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma aplicação convexa, então* ∂f *é operador monótono em* D *(ver [9]).*

Definição 1.3.6 *Um operador monótono* $T : H \to P(H)$ *é maximal em* H *quando para todo operador monótono* $\tilde{T} : H \to P(H)$ *tal que* $T(x) \subset \tilde{T}(x)$ *tem-se que* $\tilde{T} = T$.

Exemplo 1.3.6 *Um exemplo de operador monótono maximal é subdiferencial de uma aplicação convexa definida em um conjunto convexo (ver [2]).*

Definição 1.3.7 *Um operador* $T : H \to H$ *é não-expansivo em* H *quando para todo* $x, y \in H$, *tem-se* $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$.

Exemplo 1.3.7 *Um exemplo de operador não-expansivo é a projeçao ortogonal sobre um convexo e fechado (ver [5]).*

Capítulo 2

Problema de Equilíbrio

Os trabalhos de Eugen Blum e Werner Oettli foram essenciais para o desenvolvimento da teoria do Problema de Equilíbrio. As principais referências neste capítulo são [4], [7], [10], [12] e [19]. O artigo [4] apresentado em 1994 desencadeou o interesse de vários estudantes e pesquisadores pela área. O Problema de Equiilíbrio pode remodelar vários problemas como: problemas de otimização convexa, problemas de equilíbrio de Nash, problemas de complementariedade, problemas de ponto fixo e problemas de desigualdade variacional.

2.1 O Problema de Equilíbrio e casos particulares

Definiremos o Problema de Equilíbrio e suas aplicações.

Definição 2.1.1 Seja $K \subset H$ convexo, fechado e nao vazio e a bifunção $f : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfazendo a propriedade (P1) $f(x, x) = 0$, $\forall x \in K$. O Problema de Equilíbrio é definido por:

$$EP(f, K)\text{: achar } \bar{x} \in K \text{ tal que } f(\bar{x}, y) \geq 0 \ \forall y \in K.$$

As seguintes hipóteses são essenciais para resolver o problema $EP(f, K)$.

(P1): $f(x, x) = 0 \ \forall x \in K$.

(P2): $f(\cdot, y) : K \times K \to \mathbb{R}$ é *scs* $\forall y \in K$.

$$(P3) : \begin{cases} (P3i) & : & f(x, .) : K \to \mathbb{R} \text{ é convexa.} \\ (P3ii) & : & f(x, .) : K \to \mathbb{R} \text{ é sci.} \end{cases}$$

(P4): f é monótona, isto é, para $\forall x, y \in K$ tem-se $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$.

(P5): Para toda sequência $\{x^k\} \subset K$ com $\lim \|x^k\| = +\infty$ tem-se que

existe $u \in K$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x^k, u) \leq 0$ sempre que $k > k_0$.

A hipótese $(P5)$ acima pode ser vista em [10].

Um problema relacionado com o problema de $EP(f,K)$ é o Dual de $EP(f,K)$:

$$DEP(f,K): \ \textit{Achar } y^* \in K; f(x,y^*) \leq 0, \forall x \in K.$$

Citaremos abaixo alguns casos particulares do Problema de Equilíbrio. Denotaremos $S(f,K)$ o conjunto solução para $EP(f,K)$ e $S^d(f,K)$ o conjunto solução para $DEP(f,K)$.

2.1.1 Otimização convexa

A otimização convexa é uma área com bastante aplicação em problemas do nosso cotidiano.

Definição 2.1.1.1 Seja $\varphi : K \to \mathbb{R}$ convexa, *sci* e $K \subset H$ convexo, fechado e nao vazio. O Problema de otimização convexa é definido como:

$$\text{(OC): } min\{\varphi(x); x \in K\}, \text{ ou seja, achar } \bar{x} \in K \text{ talque } \varphi(\bar{x}) \leq \varphi(y) \ \forall y \in K.$$

Proposição 2.1.1.1 O problema de otimização (OC) é equivalente ao $EP(f,K)$ com $f(x,y) = \varphi(y) - \varphi(x)$ e satisfaz as propriedades (P1), (P2), (P3) e (P4).

Demonstração. Vamos verificar as propriedades do problema.

Observe que $f(x,x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$, isto é, satisfaz (P1). Dada $\{x^k\} \subset K$ com $x^k \to x$, tem-se $\liminf \varphi(x^k) \geq \varphi(x)$ e assim

$$\limsup f(x^k, y) = \varphi(y) + \limsup\left(-\varphi(x^k)\right) = \varphi(y) - \liminf \varphi(x^k).$$

Daí, $\limsup f(x^k,y) \leq f(x,y)$ e (P2) é satisfeita. Seja $\{y^k\} \subset K$ com $y^k \to y$, então $\liminf \varphi(y^k) \geq \varphi(y)$. Daí,

$$\liminf f(x, y^k) = \liminf\left[\varphi(y^k) - \varphi(x)\right] = \left[\liminf \varphi(y^k)\right] - \varphi(x) \geq \varphi(y) - \varphi(x).$$

Como φ é convexa então para $t \in [0,1]$,

$$f(x, (1-t)y + tb) = \varphi((1-t)y + tb) - \varphi(x) \leq (1-t)f(x,y) + tf(x,b).$$

Logo (P3) é satisfeita. Agora, $f(x,y)+f(y,x)=\varphi(y)-\varphi(x)+\varphi(x)-\varphi(y)=0$ e (P4) também é satisfeita.

Agora vamos mostrar a equivalência dos problemas,
$\bar{x}$ resolve (OC) $\Longleftrightarrow \varphi(\bar{x})\leq\varphi(y)\ \forall y\in K \Longleftrightarrow f(\bar{x},y)\geq 0\ \forall y\in K \Longleftrightarrow \bar{x}$ resolve $EP(f,K)$.
$\square$

2.1.2 Ponto fixo

Definição 2.1.2.1 Seja $T:K\to K$ contínuo. O problema do ponto fixo consiste:

$$PF(T,K): \text{encontrar } \bar{x}\in K \text{ tal que } T(\bar{x})=\bar{x}.$$

Existem teoremas que sob certas condições garantem a existência do ponto fixo, dentre eles tem o teorema do ponto fixo das contrações e de Brouwer (ver [23] e [12]).
Exemplo 2.1.2.1 Seja $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua e $g([a,b])\subset[a,b]$, então g possui um ponto fixo. Com efeito, considere $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $h(x)=x-g(x)$ que é contínua em $[a,b]$. Daí, $h(a)=a-g(a)\leq 0$ e $h(b)=b-g(b)\geq 0$. Logo pelo Teorema do valor intermediário, existe $x_0\in[a,b]$ tal que $h(x_0)=0\Rightarrow g(x_0)=x_0$.
Proposição 2.1.2.1 Seja $T:K\to K$ contínuo e não-expansivo, defina $f:K\times K\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=\langle x-T(x),y-x\rangle$. Então, as propriedades (P1), (P2), (P3) e (P4) são satisfeitas. E também $\bar{x}$ resolve $EP(f,K)\Leftrightarrow\bar{x}$ é ponto fixo de T.
Demonstração. Temos que $f(x,x)=\langle x-T(x),x-x\rangle=0$ satisfazendo (P1). Usando a continuidade do produto interno e de T temos que (P2) e (P3ii) são satisfeitas. Para satisfazer (P3i) tome $t\in[0,1]$,

$$f(x,(1-t)y+tb)=\langle x-T(x),(1-t)[y-x]+t[b-x]\rangle=(1-t)f(x,y)+tf(x,b).$$

Temos que

$$f(x,y)+f(y,x)=\langle T(x)-x+y-T(y),x-y\rangle=\langle T(x)-T(y),x-y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle.$$

Logo f é monótona, pois $\langle T(x)-T(y),x-y\rangle\leq\|x-y\|^2,\forall x,y\in K$.
Agora mostraremos a equivalência dos problemas:
Se $T(\bar{x})=\bar{x}$, então $f(\bar{x},y)=\langle 0,y-\bar{x}\rangle=0,\forall y\in K$ então resolve $EP(f,K)$. Se $\bar{x}$ resolve $EP(f,K)$, escolha $\bar{y}=T(\bar{x})$ e obtemos $0\leq f(\bar{x},\bar{y})=-\|\bar{x}-T(\bar{x})\|^2\leq 0$. Logo $\bar{x}$ é ponto fixo. $\square$

2.1.3 Equilíbrio de Nash em jogos nao cooperativos

A teoria dos jogos estuda as melhores decisões em situações de conflito. Os jogos não-cooperativos são os tipos em que a estratégia de um jogador não influencia no resultado de jogo. O pesquisador John F. Nash publicou artigos sobre equilíbrio que idealizaram o "equilíbrio de Nash"e lhe renderam o Prêmio Nobel em Econômia.

Definição 2.1.3.1 Seja $I = \{1, ..., n\}$ um conjunto de índices finito (número de jogadores). Para cada $i \in I$ seja dado o conjunto estratégia K_i convexo e fechado. Seja $K = \prod_{i \in I} K_i$. Seja dado também o ganho $f_i : K \to \mathbb{R}$ convexa e contínua. Seja $x = (x_1, ..., x_n) \in K$, $x^i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ e $(\bar{x}^i, y_i) = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, y_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n) \in K$. O ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in K$ é ponto de equilíbrio de Nash quando para todo $i \in I$ tem $f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i), \forall y_i \in K_i$.

Proposição 2.1.3.1 A função $f : K \times K \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sum\limits_{i \in I}(f_i(x^i, y_i) - f_i(x))$, onde $(x^i, y_i) = (x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in K$, satisfaz (P1), (P2) e (P3).

Temos que $\bar{x} \in K$ é ponto de equilibrio de Nash $\Leftrightarrow$ $\bar{x}$ satisfaz o problema de equilíbrio $EP(f, K)$.

Demonstração. Veja que f satisfaz (P1), (P2) e (P3). Com efeito, (P1): $f(x, x) = 0$. Como f é contínua, então (P2) e (P3ii) estão satisfeitas. Agora para provar (P3i), sejam $y, z \in K$ e $\lambda \in [0, 1]$, temos, pela convexidade de f_i,

$$\begin{aligned}
f(x, (1-\lambda)y + z\lambda) &= \sum_{i \in I}[f_i(x^i, (1-\lambda)y_i + z_i\lambda) - f_i(x)] \\
&\leq (1-\lambda)\sum_{i \in I}[f_i(x^i, y_i) - f_i(x)] + \lambda\sum_{i \in I}[f_i(x^i, z_i) - f_i(x)] \\
&= (1-\lambda)f(x, y) + \lambda f(x, z).
\end{aligned}$$

A aplicação f não é monótona (P4), pois se $\bar{x}$ resolve $EP(f, K)$ então $f_i(\bar{x}^i, y_i) - f_i(\bar{x}) \geq 0, \forall y_i \in K_i$. Daí,

$$f(\bar{x}, y) + f(y, \bar{x}) = \sum_{i \in I}[f_i(\bar{x}^i, y_i) + f_i(y^i, \bar{x}_i) - f_i(\bar{x}) - f_i(y)] \geq 0.$$

Provando a equivalência:

Agora, se $\bar{x}$ é ponto de equilíbrio de Nash, então para todo $j \in I$ e $\forall y_j \in K_j$, temos $f_j(\bar{x}) \leq f_j(\bar{x}^j, y_j)$ então

$$f_j(\bar{x}^j, y_j) - f_j(\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j \in I}[f_j(\bar{x}^j, y_j) - f_j(\bar{x})] \geq 0 \Rightarrow f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in K \Rightarrow \bar{x} \in S(f, K).$$

Se $\bar{x}$ satisfaz $EP(f,K)$ então $f(\bar{x},y) \geq 0, \forall y \in K$. Dado $i \in I$, tome $y_j = \bar{x}_j$ se $j \neq i$ e $y_i \neq \bar{x}_i$, temos que $(\bar{x}^j, y_j) = \bar{x}$ e $(\bar{x}^i, y_i) = y \neq \bar{x}$. Se $j \neq i \Rightarrow f_j(\bar{x}) = f_j(\bar{x}^j, y_j)$ e $f_i(\bar{x}) \neq f_i(\bar{x}^i, y_i)$. Daí

$$\sum_{s\in I}[f_s(\bar{x}^s, y_s) - f_s(\bar{x})] = f_1(\bar{x}^1, y_1) - f_1(\bar{x}) + ... + f_i(\bar{x}^i, y_i) - f_i(\bar{x}) + ... + f_n(\bar{x}^n, y_n) - f_n(\bar{x}) \geq 0.$$

Assim temos que $f_i(\bar{x}^i, y_i) - f_i(\bar{x}) \geq 0, \forall y_i \in K_i \Rightarrow \bar{x}$ resolve problema de Nash. $\square$

2.1.4 Problema de complementaridade

Um conjunto $K \subset H$ chama-se *cone* quando $d \in K \Rightarrow td \in K, \forall t > 0$.

Definição 2.1.4.1 Seja $K \subset H$ um cone convexo e fechado, H^* o dual de H e $K^+ = \{x^* \in H^*; \langle x^*, y\rangle \geq 0, \forall y \in K\}$. Seja $T : K \to H^*$ contínuo e monótono. O problema de complementariedade consiste em:

$$CP(T,K)\text{: Encontrar } \bar{x} \in K \text{ tal que } T(\bar{x}) \in K^+ \text{ e } \langle T(\bar{x}), \bar{x}\rangle = 0.$$

Proposição 2.1.4.1 A função $f : K \times K \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \langle T(x), y - x\rangle$ satisfaz (P1), (P2), (P3) e (P4). Temos que $\bar{x}$ resolve $CP(T,K) \Leftrightarrow \bar{x}$ resolve $EP(f,K)$.

Demonstração. Facilmente, as hipóteses (P1), (P2) e (P3ii) são satisfeitas, pois f é contínua. Para provar (P3i), seja $t \in [0,1]$, temos

$$f(x,(1-t)y + tb) = \langle T(x), (1-t)[y-x] + t[b-x]\rangle = (1-t)f(x,y) + tf(x,b).$$

A aplicação f é monótona (P4) pois T é operador monótono. Com efeito,

$$f(x,y) + f(y,x) = \langle T(y) - T(x), x - y\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle T(x) - T(y), x - y\rangle \geq 0.$$

Agora provando a equivalência,
se $\bar{x}$ resolve $CP(T,K)$ então $T(\bar{x}) \in K^+$ e $\langle T(\bar{x}), \bar{x}\rangle = 0$. Daí, $\langle T(\bar{x}), y\rangle \geq 0, \forall y \in K \Rightarrow$

$$f(\bar{x},y) = \langle T(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle = \langle T(\bar{x}), y\rangle = f(\bar{x},y) \geq 0, \forall y \in K \Rightarrow \bar{x} \in S(f,K).$$

Se $\bar{x}$ resolve $EP(f,K)$ temos $f(\bar{x},y) \geq 0, \forall y \in K$, então tome $y = 2\bar{x}$. Daí,

$$f(\bar{x},y) = \langle T(\bar{x}), 2\bar{x}\rangle - \langle T(\bar{x}), \bar{x}\rangle = \langle T(\bar{x}), \bar{x}\rangle \geq 0.$$

Tome $y = 0$ então

$$f(\bar{x},y) = \langle T(\bar{x}), -\bar{x}\rangle \geq 0 \Rightarrow -\langle T(\bar{x}), \bar{x}\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle T(\bar{x}), \bar{x}\rangle \leq 0.$$

Logo, $\langle T(\bar{x}), \bar{x}\rangle = 0$. Portanto pela definição de f, $\langle T(\bar{x}), y\rangle \geq 0, \forall y \in K$. Assim $\bar{x}$ resolve $CP(T,K)$. $\square$

2.1.5 Desigualdade variacional

As desigualdades variacionais é uma teoria que foi elaborada nos anos 60 na Península Itálica por matemáticos de grande renome na otimização, entre eles o pioneiro Guido Stampacchia que estudava problemas de mecânica. O desenvolvimento da área originou o Problema de Desigualdade Variacional (VIP). Veja mais detalhes em [12].

Definição 2.1.5.1 (Problema de Desigualdade Variacional) Seja $K \subset H$ um conjunto fechado e convexo não vazio, seja um operador $T : H \to P(H)$ monótono maximal tal que para todo $x \in K$ tem-se $T(x)$ é compacto, convexo e não vazio. O *Problema de Desigualdade Variacional* consiste em

$$VIP(T, K)\text{: Achar } \bar{x} \in K \text{ e } u \in T(\bar{x}) \text{ tal que } \langle u, y - \bar{x} \rangle \geq 0,\ \forall y \in K.$$

Exemplo 2.1.5.1 Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e fechado e $h : K \to \mathbb{R}$ diferenciável. Assuma que exista $x_0 \in K$ tal que $h(x_0) = \min_{x \in K} h(x)$. Então o gradiente ∇h satisfaz o VIP(∇h,K). Com efeito, sendo K é convexo então $x_0 + t(x - x_0) \in K$ para $t \in [0, 1]$. Defina $\psi(t) = h(x_0 + t(x - x_0))$. Como x_0 é minimizador de h em K, então $t = 0$ é minimizador de ψ em $[0, 1]$. Mas $\psi'(t) = \langle h'(x_0 + t(x - x_0)), (x - x_0) \rangle$ implica que $\psi'(0) = \langle \nabla h(x_0), x - x_0 \rangle$. Daí, $\psi'(0) = \langle \nabla h(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0, \forall x \in K$. Assim o operador ∇h satisfaz o VIP(∇h,K).

Lema 2.1.5.1 Seja $C \subset H$ um conjunto compacto e $p : C \to \mathbb{R}$ aplicação contínua, então existe $\max\limits_{x \in C} p(x) = p(s)$.

Demonstração. Ver [3].

Proposição 2.1.5.1 Seja $T : H \to P(H)$ um operador ponto-conjunto monótono maximal com $T(x) \neq \emptyset$ compacto convexo. A função $f(x, y) = \max\limits_{u \in T(x)} \langle u, y - x \rangle$ satisfaz as propriedades (P1), (P2), (P3) e (P4). Temos que, $\bar{x}$ resolve $EP(f, K) \Leftrightarrow \bar{x}, \bar{u}$ resolvem $VIP(T, K)$.

Demonstração. Veja que (P1) é válida: $f(x, x) = 0$. Temos que (P2) é satisfeita: se $z^k \to x$, então temos

$$\limsup_{k \to \infty} f(z^k, y) = \limsup_{k \to \infty} \left[\max_{u \in T(z^k)} \langle u, y - z^k \rangle \right] = \max_{u \in T(x)} \langle u, y - x \rangle = f(x, y).$$

Se $y^k \to y$ e $t \in [0,1]$ então (P3) é satisfeita:

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} f(x,y^k) &= \liminf_{k\to\infty}\left[\max_{u\in T(x)}\langle u, y^k - x\rangle\right] = f(x,y) \quad e \\
f(x,(1-t)y+tb) &= \max_{u\in T(x)}\langle u,(1-t)y-(1-t)x+tb-tx\rangle \\
&\leq (1-t)\max_{u\in T(x)}\langle u, y-x\rangle + t\max_{u\in T(x)}\langle u, b-x\rangle \\
&= (1-t)f(x,y)+tf(x,b).
\end{aligned}$$

Provando (P4): como $T(x)$ é compacto convexo para todo $x \in K$, então existe $\max_{u\in T(x)}\langle u, y-x\rangle = \langle \bar{u}, y-x\rangle$ e $\max_{v\in T(y)}\langle v, x-y\rangle = \langle \bar{v}, x-y\rangle$. Logo

$$f(x,y)+f(y,x) = \langle \bar{u}, y-x\rangle + \langle \bar{v}, x-y\rangle = \langle \bar{v}-\bar{u}, x-y\rangle.$$

Assim $f(x,y)+f(y,x) \leq 0$ pois $\langle T(x)-T(y), x-y\rangle \geq 0$.

Provando a equivalência.

Se $\bar{x}, \bar{u}$ resolvem $VIP(T,K)$ com $\bar{u} \in T(\bar{x})$ então

$f(\bar{x},y) = \max_{u\in T(\bar{x})}\langle u, y-\bar{x}\rangle \geq \langle \bar{u}, y-\bar{x}\rangle \geq 0, \forall y \in K \Rightarrow \bar{x}$ resolve $EP(f,K)$.

Reciprocamente, se $\bar{x}$ resolve $EP(f,K)$ temos $\max_{u\in T(\bar{x})}\langle u, y-\bar{x}\rangle \geq 0, \forall y \in K$. A aplicação $p : T(\bar{x}) \times K \to \mathbb{R}$ dada por $p(u,y) = \langle u, y-\bar{x}\rangle$ é contínua. Como $T(\bar{x})$ é compacto e convexo, então existe $\bar{u} \in T(\bar{x})$ tal que

$$\max_{u\in T(\bar{x})} p(u,y) = \max_{u\in T(\bar{x})}\langle u, y-\bar{x}\rangle = \langle \bar{u}, y-\bar{x}\rangle = f(\bar{x},y).$$

Logo $f(\bar{x},y) = \langle \bar{u}, y-\bar{x}\rangle \geq 0, \forall y \in K$. Assim $\bar{x}, \bar{u}$ resolve $VIP(T,K)$. $\square$

2.2 Existência de solução para o Problema de Equilíbrio

Encerrando o capítulo, vamos falar um pouco sobre existência de solução para o problema de equilíbrio, mas não aprofundaremos os estudos. Vamos falar existência segundo Blum e Oettli [4] que trata de aplicações $f(x,y) = g(x,y)+h(x,y)$, existência segundo Ky Fan [7] e segundo Iusem, Kassay e Sosa [10]. Mas aqui será mais importante o resultado de Iusem, Kassay e Sosa.

Definição 2.2.1 Seja $K, C \subset H$ conjuntos convexos tal que $C \subset K$. Seja (a,y) o segmento de reta de a a y. O *core* de C em K é o conjunto

$$core_K C = \{a \in C; C \cap (a,y) \neq \emptyset, \forall y \in K - C\}.$$

Logo o core é um tipo de centro de C.

Teorema 2.2.1 (Segundo Blum e Oettli) *Sejam* $f(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$

(i) H *um espaço de Hilbert,* $K \subset H$ *um conjunto convexo e fechado não-vazio.*

(ii) $g : K \times K \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x, x) = 0, \forall x \in K$*;* $g(x, y) + g(y, x) \leq 0$ *e* $g(x, .)$ *convexa e sci na segunda variável e defina* $R(t) = g(ty + (1-t)x, y)$ *com* $t \in [0, 1]$ *e* $R(t)$ *função scs em* $t = 0$*.*

(iii) $h : K \times K \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x, x) = 0, \forall x \in K$*;* $h(., y)$ *scs na primeira variável e* $h(x, .)$ *convexa na segunda variável.*

(iv) Existe $C \subset K$ *compacto convexo nao-vazio tal que para todo* $x \in C - core_K C$*, existe* $a \in core_K C$ *tal que* $f(x, a) = g(x, a) + h(x, a) \leq 0$*.*

Então existe $\bar{x} \in C$ *tal que* $0 \leq g(\bar{x}, y) + h(\bar{x}, y), \forall y \in K$*.*

Demonstração. Ver [4].

Observação 2.2.1 *No artigo [4] a demonstração deste teorema baseia-se em três lemas e é usado a versão padrão do Lema KKM (ver [13]).*

Teorema 2.2.2 (Ky Fan Desigualdade Minimax) *Seja* $K \subset H$ *um conjunto compacto convexo não-vazio e* $f : K \times K \to \mathbb{R}$ *uma aplicação talque*

(a) Para cada fixo $x \in K$*,* $f(x, .)$ *é sci na segunda variável.*

(b) Para cada fixo $y \in K$*,* $f(., y)$ *é quase-côncava na primeira variável.*

Então a seguinte desigualdade minimax é satisfeita

$$\min_{y \in K} \sup_{x \in K} f(x, y) \leq \sup_{x \in K} f(x, x).$$

Demonstração. Ver [7].

Observação 2.2.2 *No artigo [7] a demonstração deste teorema é bem interessante e usa uma versão mais avançada do Lema KKM (ver [13]).*

O teorema seguinte é uma aplicação direta da Desigualdade Minimax e tem demonstração análoga.

Teorema 2.2.3 (Segundo Ky Fan) *Seja* $K \subset H$ *um conjunto compacto, convexo e não-vazio e* $f : K \times K \to \mathbb{R}$ *uma aplicação satisfazendo:*

(i) $f(., y)$ *é scs para cada* $y \in K$*.*

(ii) $f(x, .)$ *é quase-convexa para* $x \in K$*.*

Então existe um ponto $x^* \in K$ *tal que*

$$\inf_{y \in K} f(x^*, y) \geq \inf_{w \in K} f(w, w).$$

Demonstração. Ver [17].

Agora vamos enunciar um teorema de existência de solução para o Problema de Equilíbrio segundo Iusem, Kassay e Sosa [10] que terá ênfase neste trabalho e será usado no capítulo seguinte.

Teorema 2.2.4 (Segundo Iusem, Kassay e Sosa) *Se* $f : K \times K \to \mathbb{R}$ *satisfaz (P1), (P2), (P3), (P4) e (P5), então* $EP(f, K)$ *tem solução.*

Demonstração. Ver [10].

Capítulo 3

Método do ponto Proximal aplicado ao Problema de Equilibrio

Neste capítulo iremos falar sobre o método do ponto proximal aplicado ao problema de equilíbrio em espaços de Hilbert tendo como referência [8].

Usaremos o MPP para resolver o Problema de Equilíbrio e analisar se a sequência gerada pelo método converge para a soluçao do $EP(f, K)$.

Vamos definir a regularização e verificar que ela satisfaz as propriedades do Problema de Equilíbrio (P1), (P2), (P3), (P4) e (P5); em seguida iniciaremos o método para o problema. Para mais detalhes veja [8].

3.1 Método do ponto Proximal aplicado ao Problema de Equilibrio

Mostramos algumas hipóteses do Problema de Equilíbrio no capítulo anterior agora vamos enunciar algumas outras hipóteses do problema de equilíbrio segundo Iusem.

Seja $f : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfazendo (P1)-(P3). Considere as seguintes hipóteses para todo $x, y \in K$:

$(P4^{\bullet})$: Existe $\theta \geq 0$ tal que $f(x, y) + f(y, x) \leq \theta\|x - y\|^2$ (f é θ-submonótona).

$(P4^{*})$: Se $f(x, y) \geq 0$ então $f(y, x) \leq 0$ (f é pseudomonótona).

$(P5)$: Para toda sequência $\{x^k\} \subset K$ com $\lim \|x^k\| = +\infty$ tem-se que existe $u \in K$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x^k, u) \leq 0$ sempre que $k > k_0$.

Observação 3.1.1 *Se f satisfaz (P4) então $(P4^{\bullet})$, $(P4^{*})$ são claramente satisfeitas (ver [10]).*

Teorema 3.1.1 *Se $f : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfaz (P1)-(P4), então $f(y, x^*) \leq 0, \forall x^* \in S(f, K)$, $\forall y \in K$.*

Demonstração. Com efeito, se $x^* \in S(f, K)$, então $\forall y \in K$ temos que $f(x^*, y) \geq 0$. Como f satisfaz (P4), então

$$f(x^*, y) + f(y, x^*) \leq 0 \Rightarrow f(y, x^*) \leq -f(x^*, y) \leq 0.$$

Assim se $x^* \in S(f, K)$ então $x^* \in S^d(f, K)$ e $S(f, K) \subset S^d(f, K)$. $\square$

Teorema 3.1.2 *Se $f : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfaz (P1)-(P4) então $S^d(f, K) = S(f, K)$.*

Demonstração. Usando o teorema anterior temos que $S(f, K) \subset S^d(f, K)$. Seja agora $x^* \in S^d(f, K)$ e $w \in K$. Para cada $t \in (0, 1)$, defina $w_t = t.w + (1 - t)x^*$. Como K é convexo então $w_t \in K$. Como $x^* \in S^d(f, K)$ então $f(w_t, x^*) \leq 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
f(w_t, x^*) &+ t.f(x^*, w) - t.f(x^*, w) \leq 0 \Rightarrow \\
f(w_t, x^*) &+ t.f(x^*, w) \leq tf(x^*, w) \Rightarrow \\
f(w_t, x^*) &+ t.f(x^*, w) - \frac{1}{1-t} f(w_t, w_t) \leq t.f(x^*, w).
\end{aligned}$$

Por (P3i), $f(w_t, .)$ é convexa, segue que

$$\begin{aligned}
f(w_t, w_t) &= f(w_t, t.w + (1-t)x^*) \leq t.f(w_t, w) + (1-t)f(w_t, x^*) \Rightarrow \\
f(w_t, x^*) &+ t.f(x^*, w) - \frac{1}{1-t}\left[t.f(w_t, w) + (1-t)f(w_t, x^*)\right] \leq t.f(x^*, w) \Rightarrow \\
t.f(x^*, w) &\geq t.f(x^*, w) - \frac{t}{1-t} f(w_t, w).
\end{aligned}$$

Dividindo a expressão anterior por t, temos $f(x^*, w) \geq f(x^*, w) - \frac{1}{1-t} f(w_t, w)$. Tomando ao limite $t \to 0^+$ temos $w_t \to x^*$, então usando (P2), $f(x^*, w) \geq f(x^*, w) - f(x^*, w) = 0$. Assim temos $S^d(f, K) \subset S(f, K)$. $\square$

A regularização, segundo Iusem e Sosa [8], para o problema de Equilíbrio é tal que cada subproblema tem solução única e as iteradas convergem para a solução do probelma principal.

Vamos agora definir a regularização e verificar que ela satisfaz as hipóteses do Problema de Equilíbrio (P1)-(P5).

Fixado $\gamma > 0$ e $\bar{x} \in H$. Suponha que $f : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfaça (P1)-(P3). Definimos a *regularização* de f por

$$[\mathbf{A1}] : \tilde{f}(x,y) = f(x,y) + \gamma\langle x - \bar{x}, y - x\rangle.$$

Teorema 3.1.3 (Regularização geral) *Seja $f : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfazendo (P1)-(P3) e seja a regularização de [A1]. Assuma que f satisfaz ($P4^{\bullet}$) e que $\gamma > \theta \geq 0$, então $EP(\tilde{f}, K)$ tem solução única.*

Demonstração. Temos claramente que $\tilde{f}$ herda (P1),(P2) e (P3) de f. Temos também que $\tilde{f}$ satisfaz (P4) (monotonicidade). Com efeito,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x,y) + \tilde{f}(y,x) &= f(x,y) + f(y,x) + \gamma[\langle x - \bar{x}, y - x\rangle + \langle y - \bar{x}, x - y\rangle] \\
&= f(x,y) + f(y,x) + \gamma[-\langle x - \bar{x}, x - y\rangle + \langle y - \bar{x}, x - y\rangle] \\
&= f(x,y) + f(y,x) + \gamma[\langle -(x - \bar{x}) + y - \bar{x}, x - y\rangle] \\
&= f(x,y) + f(y,x) + \gamma[\langle y - x, x - y\rangle] \\
&= f(x,y) + f(y,x) - \gamma\|x - y\|^2 \\
&\leq (\theta - \gamma)\|x - y\|^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Logo $\tilde{f}(x,y) + \tilde{f}(y,x) \leq 0$, logo $\tilde{f}$ é monótona. Para mostrar que vale (P5), tome uma sequência $\{x^k\} \subset K$ tal que $\lim \|x^k\| = +\infty$ e seja $u = P_K(\bar{x})$ onde $P_K : H \to K$ é a projeção ortogonal sobre K. Note que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x^k, u) &= f(x^k, u) + \gamma\langle x^k - \bar{x}, u - x^k\rangle \\
&= f(x^k, u) + \gamma\langle (x^k - u) + (u - \bar{x}), u - x^k\rangle \\
&= f(x^k, u) + \gamma\langle x^k - u, u - x^k\rangle + \gamma\langle u - \bar{x}, u - x^k\rangle \\
&= f(x^k, u) - \gamma\|u - x^k\|^2 + \gamma\langle \bar{x} - u, x^k - u\rangle.
\end{aligned}$$

Temos $\langle \bar{x} - u, x^k - u\rangle \leq 0$. Usando também a $\theta-$submonotonicidade temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x^k, u) &= f(x^k, u) - \gamma\|u - x^k\|^2 + \gamma\langle \bar{x} - u, x^k - u\rangle \\
&\leq f(x^k, u) - \gamma\|u - x^k\|^2 \\
&\leq -f(u, x^k) + \theta\|u - x^k\|^2 - \gamma\|u - x^k\|^2 \\
&= -f(u, x^k) - (\gamma - \theta)\|u - x^k\|^2 \Rightarrow \\
\textbf{[B1]}: \ \tilde{f}(x^k, u) &\leq -f(u, x^k) - (\gamma - \theta)\|u - x^k\|^2.
\end{aligned}$$

Para cada $x \in K$ defina $g_x : K \to \mathbb{R}$ por $g_x(y) = f(x, y)$. Tome $\hat{x} \in ri(K)$. Então $\hat{x} \in ri(dom(g_u))$, onde $dom(g_u)$ é domínio de g_u. Como $g_u = f(u, .)$ é convexa então seu subdiferencial em $\hat{x}$ é não vazio. Tome $\hat{v} \in \partial g_u(\hat{x})$. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle \hat{v}, x^k - \hat{x}\rangle &\leq g_u(x^k) - g_u(\hat{x}) = f(u, x^k) - f(u, \hat{x}) \Rightarrow \\
-f(u, x^k) &\leq \langle \hat{v}, \hat{x} - x^k\rangle - f(u, \hat{x}) \\
&\leq \|\hat{v}\|.\|\hat{x} - x^k\| - f(u, \hat{x}) \\
&= \|\hat{v}\|.\|\hat{x} - u + u - x^k\| - f(u, \hat{x}) \\
&\leq \|\hat{v}\|.\|\hat{x} - u\| + \|\hat{v}\|.\|u - x^k\| - f(u, \hat{x}) \Rightarrow \\
\textbf{[B2]}: \ -f(u, x^k) &\leq \|\hat{v}\|.\|\hat{x} - u\| + \|\hat{v}\|.\|u - x^k\| - f(u, \hat{x}).
\end{aligned}$$

Combinando [B1] e [B2] temos

$$\tilde{f}(x^k, u) \leq \|\hat{v}\|.\|\hat{x} - u\| + \|\hat{v}\|.\|u - x^k\| - f(u, \hat{x}) - (\gamma - \theta)\|u - x^k\|^2.$$

Como $\lim \|x^k\| = +\infty$, então $\lim \|x^k - u\| = +\infty$, Como $\gamma - \theta > 0$ segue que

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{f}(x^k, u) \leq \lim_{k\to\infty} \left[\|\hat{v}\|.\|\hat{x} - u\| + \|\hat{v}\|.\|u - x^k\| - f(u, \hat{x}) - (\gamma - \theta)\|u - x^k\|^2\right] = -\infty.$$

Logo para k grande temos $\tilde{f}(x^k, u) \leq 0$. Assim $\tilde{f}$ satisfaz (P5) e pelo Teorema de existência segundo Iusem, Kassay e Sosa temos que $EP(\tilde{f}, K)$ tem solução.
Sejam $\tilde{x}, x'$ que resolvem $EP(\tilde{f}, K)$, daí

$$0 \leq \tilde{f}(\tilde{x}, x') = f(\tilde{x}, x') + \gamma\langle \tilde{x} - \bar{x}, x' - \tilde{x}\rangle,$$

$$0 \leq \tilde{f}(x', \tilde{x}) = f(x', \tilde{x}) + \gamma\langle x' - \bar{x}, \tilde{x} - x'\rangle.$$

Somando temos

$$0 \leq \tilde{f}(\tilde{x}, x') + \tilde{f}(x', \tilde{x}) \leq (\theta - \gamma)\|\tilde{x} - x'\|^2 \leq 0 \Rightarrow \tilde{x} = x'. \ \square$$

Teorema 3.1.4 *Assuma que* f *satisfaz (P1)-(P3). Se* $\tilde{x} \in S(\tilde{f}, K)$ *e* $x^* \in S^d(f, K)$, $\bar{x} \in K$*, então vale*

$$\textbf{\textit{[A2]}} : \|\tilde{x} - x^*\|^2 + \|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 \leq \|\bar{x} - x^*\|^2.$$

Demonstração.

Temos que $\tilde{f}(\tilde{x}, x^*) \geq 0$ e $f(\tilde{x}, x^*) \leq 0$. Usando [A1] temos

$$\tilde{f}(\tilde{x}, x^*) \;=\; f(\tilde{x}, x^*) + \gamma\langle \tilde{x} - \bar{x}, x^* - \tilde{x}\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \bar{x} - \tilde{x}, \tilde{x} - x^*\rangle \geq 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle \bar{x} - \tilde{x}, \tilde{x} - x^*\rangle \\
&= \langle \bar{x} - \tilde{x}, \tilde{x} - \bar{x} + \bar{x} - x^*\rangle \\
&= -\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 + \langle \bar{x} - \tilde{x}, \bar{x} - x^*\rangle \\
&= -\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 + \langle \bar{x} - x^* + x^* - \tilde{x}, \bar{x} - x^*\rangle \\
&= -\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 + \|\bar{x} - x^*\|^2 - \langle \tilde{x} - x^*, \bar{x} - x^*\rangle \\
&= -\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 + \|\bar{x} - x^*\|^2 - \langle \tilde{x} - x^*, \bar{x} - \tilde{x} + \tilde{x} - x^*\rangle \\
&= -\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 + \|\bar{x} - x^*\|^2 - \|\tilde{x} - x^*\|^2 - \langle \tilde{x} - x^*, \bar{x} - \tilde{x}\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\langle \tilde{x} - x^*, \bar{x} - \tilde{x}\rangle \geq 0$, então

$$-\|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 + \|\bar{x} - x^*\|^2 - \|\tilde{x} - x^*\|^2 \geq \langle \tilde{x} - x^*, \bar{x} - \tilde{x}\rangle \geq 0.$$

Assim

$$\|\tilde{x} - x^*\|^2 + \|\bar{x} - \tilde{x}\|^2 \leq \|\bar{x} - x^*\|^2. \quad \square$$

O Método do Ponto Proximal para o Problema de Equilíbrio será denotado por PPEP.

PPEP: Assuma que $f : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfaz (P1)-(P3) e $(P4^{\bullet})$. Seja $\bar{\gamma} > \theta \geq 0$, tome uma sequência $\{\gamma_k\} \subset (\theta, \bar{\gamma}]$. O PPEP é definido da seguinte forma:

1. Escolha $x^0 \in K$;
2. Dado $x^k \in K$, defina x^{k+1} como única solução de $EP(f_k, K)$ onde

$$[\mathbf{A3}] : f_k(x, y) = f(x, y) + \gamma_k \langle x - x^k, y - x \rangle.$$

Isto é,

$$[\mathbf{A4}] : f(x^{k+1}, y) + \gamma_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \geq 0, \forall y \in K.$$

3. Se $x^{k+1} = x^k$, pare. Caso contrário retorne para o passo 2.

Observe que se $x^{k+1} = x^k$ então $f(x^{k+1}, y) \geq 0, \forall y \in K \Rightarrow x^{k+1} \in S(f, K)$.

Veremos a seguir a boa definição e a convergência do PPEP.

Definição 3.1.1 *Dizemos que $\{z^k\} \subset K$ é assintóticamente resolvente para $EP(f, K)$ quando*

$$\liminf_{k \to \infty} f(z^k, y) \geq 0, \forall y \in K.$$

Teorema 3.1.5 *Considere o $EP(f, K)$ onde f satisfaz (P1)-(P3) e $(P4^{\bullet})$, $x^0 \in K$. A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo PPEP é bem-definida.*

Demonstração. Usando o Teorema da Regularização geral com $\gamma = \gamma_k > \theta$ e $\bar{x} = x^k$ temos que $EP(f_k, K)$ tem solução única para cada k, isto é, existe x^{k+1} que resolve $EP(f_k, K)$. □

Assuma para efeito de convergência do método que $S(f, K) \neq \emptyset$.

Teorema 3.1.6 *Considere o $EP(f, K)$ onde f satisfaz (P1)-(P4) e $x^0 \in K$.*

(i) *A sequência $\{x^k\}$ é limitada e*

$$\lim_{k \to \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0.$$

(ii) *A sequência $\{x^k\}$ é assintóticamente resolvente para $EP(f, K)$.*

(iii) *Todos os pontos de acumulação fracos de $\{x^k\}$ resolvem $EP(f, K)$.*

(iv) *A sequência $\{x^k\}$ é fracamente convergente para alguma solução $\tilde{x}$ de $EP(f, K)$.*

Demonstração. **(i)** Como $S^d(f,K) \neq \emptyset$, existe $y^* \in K$ tal que $f(x,y^*) \leq 0, \forall x \in K$. Logo $-f(x^{k+1},y^*) \geq 0$. Agora pelo PPEP temos

$$f(x^{k+1},y^*) \;\; \geq \;\; \gamma_k \langle x^k - x^{k+1}, y^* - x^{k+1} \rangle \Rightarrow \langle x^{k+1} - x^k, y^* - x^{k+1} \rangle \geq 0.$$

Usando [A2] com $\bar{x} = x^k, \tilde{x} = x^{k+1}, x^* = y^*$ temos

$$\|x^{k+1} - y^*\|^2 + \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - y^*\|^2.$$

Logo a sequência $\{\|x^k - y^*\|\}$ é limitada e monótona, logo convergente, digamos para $\sigma \geq 0$. Além disso, $\{x^k\}$ é limitada. Por outro lado,

$$0 \leq \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq (\|x^k - y^*\|^2 - \|x^{k+1} - y^*\|^2) \to (\sigma^2 - \sigma^2) = 0 \Rightarrow \lim\,(x^k - x^{k+1}) = 0.$$

(ii) Por [A4] temos

$$0 \leq f(x^{k+1},y) + \gamma_k \langle x^{k+1} - x^k, y - x^{k+1} \rangle \leq f(x^{k+1},y) + \gamma_k \|x^{k+1} - x^k\|.\|y - x^{k+1}\|.$$

Como γ_k é limitado, $\lim\,(x^k - x^{k+1}) = 0$ e $(y - x^{k+1})$ também é limitado, então

$$\liminf_{k \to \infty} f(x^k,y) \geq 0, \forall y \in K.$$

(iii) Por (ii), $\{x^k\}$ tem pontos de acumulação fracos (pois é limitada), todos pertencentes a K, pois é convexo e fechado. Seja $\hat{x}$ um ponto de acumulação fraco de $\{x^k\}$ e $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ uma subsequência fracamente convergente para $\hat{x}$ ($x^{k_j} \rightharpoonup \hat{x}$). Temos que $\limsup_{k\to\infty} f(x^{k_j},y) \leq f(\hat{x},y)$, para todo $y \in K$. Por (ii),

$$0 \leq \liminf f(x^{k_j},y) \leq \limsup_{j \to \infty} f(x^{k_j},y) \leq f(\hat{x},y), \forall y \in K. \textit{ Logo } \hat{x} \in S(f,K).$$

(iv) Sejam $\hat{x}$ e $\tilde{x}$ dois pontos de acumulação fracos de $\{x^k\}$, existem subsequências $\{x^{k_j}\}$ e $\{x^{k_i}\}$ de $\{x^k\}$ tal que $x^{k_j} \rightharpoonup \hat{x}(k_j \to \infty)$ e $x^{k_i} \rightharpoonup \tilde{x}(k_i \to \infty)$.
Usando (iii), temos $\hat{x}, \tilde{x} \in S(f,K)$. E ainda,

$$\|x^{k+1} - \hat{x}\|^2 + \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - \hat{x}\|^2 \;\; e \;\; \|x^{k+1} - \tilde{x}\|^2 + \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leq \|x^k - \tilde{x}\|^2.$$

Portanto $\{\|x^k - \tilde{x}\|\}$ e $\{\|x^k - \hat{x}\|\}$ são monótonas e limitadas, logo convergem, digamos para $\sigma \geq 0$ e $v \geq 0$, respectivamente. Agora

$$\begin{aligned}
2\langle x^{k_i} - x^{k_j}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle &= 2\langle x^{k_i} - x^{k_j}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle + 2\|x^{k_i} - x^{k_j}\|^2 - 2\|x^{k_i} - x^{k_j}\|^2 \\
&= 2\|x^{k_i} - x^{k_j}\|^2 - 2\langle x^{k_i} - x^{k_j}, x^{k_i} - x^{k_j}\rangle + 2\langle x^{k_i} - x^{k_j}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle \\
&= 2\|x^{k_i} - x^{k_j}\|^2 + \langle x^{k_j} - x^{k_i} + \hat{x} - \tilde{x}, 2(x^{k_i} - x^{k_j})\rangle \\
&= 2\|x^{k_i} - x^{k_j}\|^2 + \langle x^{k_j} - \tilde{x}, 2(x^{k_i} - x^{k_j})\rangle + \langle \hat{x} - x^{k_i}, 2(x^{k_i} - x^{k_j})\rangle \\
&= \langle \hat{x} - x^{k_j}, \hat{x} - x^{k_j}\rangle - \|\hat{x} - x^{k_i}\|^2 + \langle \tilde{x} - x^{k_i}, \tilde{x} - x^{k_i}\rangle - \|\tilde{x} - x^{k_j}\|^2 \\
&= \|\hat{x} - x^{k_j}\|^2 - \|\hat{x} - x^{k_i}\|^2 + \|\tilde{x} - x^{k_i}\|^2 - \|\tilde{x} - x^{k_j}\|^2.
\end{aligned}$$

Como $\|x^k - \tilde{x}\| \to \sigma$ e $\|x^k - \hat{x}\| \to v$, então tomando ao limite quando $k \to \infty$ e teremos

$$-2\|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 = \lim_{k\to\infty} 2\langle x^{k_i} - x^{k_j}, \hat{x} - \tilde{x}\rangle = v^2 - v^2 + \sigma^2 - \sigma^2 = 0 \Rightarrow \tilde{x} = \hat{x}.$$

Assim a sequência $\{x^k\}$ possui apenas um ponto de acumulação fraco. Concluindo que a sequência converge fracamente para a solução de $EP(f, K)$. $\square$

Corolário 3.1.1 *Assuma que as hipóteses do Teorema anterior sejam satisfeitas. Se H possui dimensão finita, então a sequência gerada pelo PPEP converge fortemente para a solução de $EP(f, K)$.*

Demonstração. Com efeito, se H possui dimensão finita, então a convergência fraca coincide com a forte.

Consideraçoes finais

Nesta dissertação apresentamos o Método do Ponto Proximal para resolver o Problema de Equilíbrio $EP(f, K)$. Este método foi proposto por Iusem e Sosa [8] em adaptação do método proposto inicialmente por Rockafellar [21]. Mostramos inicialmente que o método está bem definido, pois cada subproblema $EP(f_k, K)$ possui uma única solução sob as hipóteses que f satisfaz $(P1)$-$(P4)$ o qual implica que f_k satisfaz as mesmas propriedades e (P5), garantindo tal afirmação. Agora supondo que f satisfaça (P1)-(P4) e $S(f, K) \neq \emptyset$, provamos que a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo PPEP é limitada e também que $\|x^{k+1} - x^k\|$ tende a zero, logo a sequência é assintóticamente resolvente para $EP(f, K)$, isto significa dizer que seus pontos de acumulação fracos resolvem o $EP(f, K)$. Para cada $y \in S(f, K)$, $\{\|x^k - y\|\}$ é limitada e monótona, logo convergente. Sendo $\{x^k\}$ limitada, então os pontos de acumulação fracos são únicos. Concluindo que a sequência gerada pelo PPEP é fracamente convergente para a solução do $EP(f, K)$. Se adicionarmos a hipótese de compacidade forte em K, ou se H possui dimensão finita teremos que a convergência do PPEP será forte.

Referências Bibliográficas

[1] ACKER, F.; DICKSTEIN, F.. Uma introdução a análise convexa. Rio de Janeiro, IMPA, 1983.

[2] ANDRADE, J.S.. Algoritmo do Ponto Proximal Generalizado para o Problema de Desigualdade Variacional em $\mathbb{R}^n$. Dissertação de mestrado, UFPI, Teresina, 2010.

[3] APOSTOL, T.M. mathematical analysis, 2ª edition. Pasadena: Addison-Wesley Co, 1981.

[4] BLUM, E., OETTLI, W. - From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. The Mathematics Student, (63) 123–145, 1994.

[5] BRÈZIS, H. - Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equacões. Springer, 2011.

[6] BRITO, A.S.. Método de Ponto Proximal para o problema de otimização quaseconvexa e desigualdade variacional com restrições lineares. Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 2012.

[7] FAN, K. - A minimax inequality and applications. In: O. Shisha (Ed.), Inequalities III, Academic Press, New York, 103-113, 1972.

[8] IUSEM, A. N., SOSA, W. - On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces. Optimization(59), 1259–1274, 2010.

[9] IUSEM, A. N.. Método de Ponto Proximal em Otimização: 20º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, IMPA, 1995.

[10] IUSEM, A.N., KASSAY, G., SOSA, W. - On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems. Mathematical Programming, (116) 259-273, 2009.

[11] IUSEM, A.N.; NASRI, M.. Inexact Proximal Point Methods for Equilibrium problems in Banach spaces. Numer. Funct. Anal. Optim., 28(2007), 1279-1308.

[12] KINDERLEHRER, D., STAMPACCHIA, G. - An introduction to variational inequalities and their applications. Academic Press, New York, 1980.

[13] KNASTER,B.; KURATOWSKI, K.; MAZURKIEWICZ, S.. Ein beweis des fixpunktsatzes fur n-dimensionale simplexe. Fund.Math. 1929 (14), 132-137.

[14] LIMA, Elon Lages. Curso de análise volume 1. 12 edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[15] LIMA, Elon Lages. Curso de análise volume 2. 11ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[16] LIMA, Elon L. Espaços Métricos. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[17] MEIRELES, L.V.. Problema de Equilíbrio: Resultados de Existência e Algoritmo. Dissertação de mestrado, UFPI, Teresina, 2015.

[18] MUNKRES, J.R. - Topology. 2ª edição. Prentice-Hall, 2000.

[19] NASH, J. - Non-cooperative games. Ann. Math. (54), 286-293, 1951.

[20] OLIVEIRA, Roberto Imbuzeiro. Convergência fraca em espaços de Hilbert. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[21] ROCKAFELLAR, R. T.. Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm. SIAM Journal on Control and Optimization 14, pp. 877-898, 1976.

[22] ROCKAFELLAR, R. T. - Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, 1970.

[23] RUDIN, W. Principles of mathematical analysis, 3ª edition. New York: McGraw-Hill, 1976.

[24] SOLODOV, Mikhail; IZMAILOV, Alexey. Otimização volume1. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[25] TANG, Guo-ji; WANG, X.. An inexact Proximal Point Algorithm for nonmonotone Equilibrium Problems in Banach spaces. Taiwanese journal of mathematics, Vol. 17, No. 6, pp. 2117-2133. 2013.

[26] TEIXEIRA, Eduardo ; BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel. Fundamentos de análise funcional. Rio de Janeiro: SBM, 2012.