Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre uma equação de onda não-linear com condições de acústica na fronteira

Jhonata da Costa Bezerra

Teresina - 2016

Jhonata da Costa Bezerra

Dissertação de Mestrado:

Sobre uma equação de onda não-linear com condições de acústica na fronteira

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

B574s Bezerra, Jhonata da Costa.
Sobre uma equação de onda não - linear com condições de acústica na fronteira / Jhonata da Costa Bezerra. – Teresina, 2016.
72f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.
Orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark.

1. Análise. 2.Equações Diferenciais Parciais. I. Título

CDD 515.353

Dedico este trabalho ao meu irmão Jones da Costa Bezerra. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, por ter me dado saúde e força para ser capaz de alcançar mais uma conquista em minha vida.

À minha mãe Maria Elias da Costa, ao meu pai Raimundo Nonato Bezerra e aos meus irmãos Jones e Jhonny, por tudo que já fizeram e fazem por mim.

À banca examinadora, pela contribuição nas correções, em especial ao professor Marcondes Clark que tanto me ensinou, não só matemática, mas também lições de vida, durante o mestrado e, praticamente, em toda minha graduação.

Ao corpo docente da Pós-Graduação em Matemática, em especial aos professores: José Francisco, Isaías, Jurandir, Marcos Vinício e Kelton, que contribuiram bastante para o meu aprendizado.

Aos amigos do mestrado, Andressa, Antônio, Antônio Luiz, Atécio, Bruno, Elianderson, Fernando Gomes, Fernando Lima, Hércules, Jaciel, Jeferson, Lívio, Lucas Machado, Lucas Quaresma, Raul, Ronaldo, Sandoel, Tiago, Victor, pelos momentos de descontração e estudo. Em especial agradeço aos amigos, Pádua e Rafael, por estarem comigo desde o início do mestrado, sendo grandes amigos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente meus agradecimentos.

"*Não espere por uma crise para descobrir o que é importante em sua vida*".

Platão.

Resumo

Neste trabalho provaremos a existência e unicidade da solução global para um problema misto, com condições de acústica na fronteira. A prova da existência será feita pelo método de Faedo-Galerkin-Lions e a unicidade via o método da energia. Além disso, mostraremos que sob certas hipóteses, a energia total

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big\{|u'(t)|^2 + \frac{2\lambda}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \alpha(t)\Big(\|u(t)\| + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)\Big\},$$

associada ao problema, decai assintóticamente quando $t \to \infty$.

Palavras Chaves: Existência e unicidade de solução global; Sistema não linear; Condições de acústica na fronteira; Comportamento assintótico.

Abstract

In this work we will prove the existence and uniqueness of the global solution for a mixed problem with acoustic conditions in the boundary. The proof of the existence will be done using the Faedo-Galerkin-Lions method's and the uniqueness via the energy method. In addition, we establish that under certain assumptions the total energy

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big\{|u'(t)|^2 + \frac{2\lambda}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \alpha(t)\Big(\|u(t)\| + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)\Big\},$$

associated with the problem decays asymptotically when $t \to \infty$.

Keyworks: Existence and uniqueness of the global solution; Nonlinear system; Acoustic boundary conditions; Asymptotic behavior.

Sumário

Notações

A seguir listamos algumas notações as quais serão usadas nesta dissertação:

▷ Operador Gradiente: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$;

▷ Operador Laplaciano: $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$;

▷ Ω é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado, com fronteira Γ sendo uma variedade $n-1$ dimensional de classe C^2, tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, com $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$;

▷ Produto interno de $L^2(\Omega)$: $(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$;

▷ Produto interno de $L^2(\Gamma_1)$: $(f, g)_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} f(x)g(x)\, d\Gamma$;

▷ Produto interno em $H^1(\Omega)$: $((f, g)) = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dx$;

▷ Norma em $L^2(\Omega)$: $|f(x)| = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$;
Ocasionalmente $|\cdot|$ denotará também o valor absoluto, porém o contexto deixará claro a distinção.

▷ Norma de $L^2(\Gamma_1)$: $|f(x)|_{\Gamma_1} = \left(\int_{\Gamma_1} |f(x)|^2 d\Gamma\right)^{\frac{1}{2}}$;

▷ Espaço V: $V = \{\varphi \in H^1(\Omega)$ e $\gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_0} = 0$ q.s. sobre $\Gamma_0\}$;

▷ Espaço $H_\Delta(\Omega)$: $H_\Delta(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) \text{ e } \Delta\varphi \in L^2(\Omega)\right\}$;

▷ Norma de $H_\Delta(\Omega)$: $\|f\|^2_{H_\Delta(\Omega)} = |f|^2 + |\Delta f|^2$;

▷ Norma de $X \cap Y$: $\|f\|_{X\cap Y} = \|f\|_X + \|f\|_Y$, onde X e Y são espaços vetoriais normados;

▷ Por $C_0^\infty(\Omega)$ denotaremos o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis em Ω, com suporte compacto em Ω.

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho demonstraremos a existência e unicidade de solução para um problema misto associado a uma equação de onda, na qual se impõe condições de acústica na fronteira, no sentido introduzido por J.T. Beale e S.I. Rosencrans, em 1974 (Ver [3]).

Consideremos os conjuntos V, munido com a norma

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx = |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)},$$

e $H_\Delta(\Omega)$, onde consideramos a função traço $\gamma_1 : H_\Delta(\Omega) \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, com $\gamma_1(\varphi) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu}$, $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, onde $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ denota a derivada direcional na direção do vetor normal unitário sobre Γ_1.

Estamos interessados em mostrar a existência de um par de funções

$$u : \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\delta : \Gamma_1 \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

satisfazendo as condições:

$$
\begin{aligned}
u'' - \alpha(t)\Delta u + \lambda|u|^{\rho}u = 0 &\quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty);\\
u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta = 0 &\quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty);\\
u = 0 &\quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty);\\
\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(\cdot, u') = 0 &\quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty);\\
u(0) = u_0 &\quad \text{em} \quad \Omega;\\
u'(0) = u_1 &\quad \text{em} \quad \Omega;\\
\delta(0) = \delta_0 &\quad \text{sobre} \quad \Gamma_1;\\
\delta'(0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \eta(u_1) &\quad \text{sobre} \quad \Gamma_1.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

onde $'$ denota a derivada no sentido das distribuições e λ é uma constante positiva. Assumiremos que as funções α e f_i $(i = 1,2,3)$, satisfazem:

$$
\left|\begin{aligned}
&\alpha(t) \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^+), \quad \text{com} \quad \alpha'(t) \in L^1(\mathbb{R}^+) \ \text{ e } \ \alpha(t) \geqslant \alpha_0 > 0;\\
&\qquad f_i \in C^0(\Gamma_1), \quad \text{com} \quad f_i > 0, i = 1,3 \ \text{ e } \ f_2 \geqslant 0.
\end{aligned}\right.
\tag{1.2}
$$

Além disso, suponhamos que $\eta : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $x \mapsto \eta(x,s)$, é contínua para todo s fixado e satisfaz:

$$
\left|\begin{aligned}
&\eta(x,0) = 0;\\
&|\eta(x,s) - \eta(x,r)| \leqslant L|s-r|, \ L > 0;\\
&(\eta(x,s) - \eta(x,r))(s-r) \geqslant \eta_0(s-r)^2, \ \eta_0 > 0.
\end{aligned}\right.
\tag{1.3}
$$

Por fim, suponhamos também que $(u_0, u_1, \delta_0) \in (V \cap H_{\Delta}(\Omega)) \times V \times L^2(\Gamma_1)$ e ρ é uma constante positiva tal que

$$
\begin{aligned}
0 < \rho < \infty, &\quad \text{se} \ n = 1;\\
\frac{1}{2} \leqslant \rho < \infty, &\quad \text{se} \ n = 2;\\
\frac{1}{n} \leqslant \rho \leqslant \frac{2}{n-2}, &\quad \text{se} \ n \geqslant 3.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

No capítulo 2, apresentaremos uma breve ideia da motivação física do modelo de estudo de equações de onda com condições de acústica na fronteira. Neste trabalho, uma parte da fronteira será submetida à condição de Dirichlet, enquanto outra parte, será submetida à condições de acústica.

No capítulo 3, apresentaremos resultados de Análise Funcional, Equações Diferenciais Parciais, Distribuição de Schwarz e Espaços de Sobolev, que serão essenciais para o entendimento desse trabalho.

No capítulo 4, mostraremos a existência e unicidade de soluções do problema (1.1). A existência será feita via método de Faedo-Galerkin-Lions e a unicidade via método da energia.

No capítulo 5, provaremos o comportamento assintótico da solução de (1.1), sob certas hipóteses adicionais.

Capítulo 2

Motivação Física

Neste capítulo, descreveremos a motivação física para um problema do tipo (1.1). Aqui apresentaremos somente uma breve ideia física sobre o modelo de estudo apresentado. Para mais detalhes e aprofundamento sugerimos as referências [3] e [18].

2.1 Movimento de Ondas Acústicas

Ao contrário da vibração de uma corda em que são estudados ondas transversais onde o material transmitindo a onda move-se na direção perpendicular à direção de propagação da onda, ondas acústicas, que são ondas de som, são longintudinais e movem-se na direção de propagação da onda. Com isso, segue que não há alternância entre " picos " e "vales", mas sim entre compressão e rarefação.

Representemos por κ_0 a densidade uniforme de um fluido e por p_0 a pressão uniforme exercida sobre o fluido em estado de equilíbrio. Consideremos uma fonte acústica provocando uma mudança de pressão p no fluido com p infinitamente menor que p_0. Então, se κ é a mudança na densidade do fluido, que consideramos também pequeno em relação à κ_0, temos a relação

$$\kappa = C\kappa_0 p,$$

onde C é a constante de compressibilidade do fluido.

Agora, considerando uma situação unidimensional, seja $F(x, t)$ o fluxo de $\kappa(x, t)$, isto é, a quantidade total de $\kappa(x, t)$ que passa, por segundo, na direção positiva de x, em uma seção transversal com área unitária, perpendicular à x. Denotando por $\nu(x, t)$ a velocidade do fluido no ponto x no instante t, podemos escrever

$$F(x,t) = (\kappa + \kappa_0)v(x,t).$$

O fluxo $F(x + dx, t)$ representa uma perda de κ na região por onde o fluido percorre. Assim, a taxa de mudança de κ nessa região é

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t}dx = F(x,t) - F(x+dx,t) = -\frac{\partial F}{\partial x}dx + \mathcal{O}(dx^2).$$

Daí, obtemos

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = -v(x,t)\frac{\partial \kappa}{\partial x} - (\kappa + \kappa_0)\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.1}$$

A força no elemento de fluido de massa $(\kappa + \kappa_0)dx$, entre duas superfícies planas, com área unitária, num ponto x e outro em $x + dx$, é $p(x,t) - p(x+dx,t)$. Por outro lado, a mesma força é dada pelo produto da massa do fluido pela aceleração. Suponhamos que a posição de cada partícula é uma função derivável do tempo, isto é, $x = x(t)$, com x derivável. Sendo $\frac{\partial v}{\partial t}(x(t),t)$ a aceleração do fluido em x no instante t, então

$$p(x(t),t) - p(x(t)+dx,t) = \Big(\frac{\partial v}{\partial t}(x(t),t)\Big)(\kappa(x(t),t) + \kappa_0)dx,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x}(x(t),t)dx + \mathcal{O}(dx^2) &= \Big[\frac{\partial v}{\partial x}(x(t),t)x'(t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x(t),t)\Big](\kappa(x(t),t) + \kappa_0)dx \\ &= -(\kappa(x(t),t) + \kappa_0)\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}v^2(x,t) + \frac{\partial v}{\partial t}(x(t),t)\Big), \end{aligned}$$

pois,

$$\frac{\partial}{\partial x}v^2(x,t) = 2v(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t).$$

Como $\kappa = C\kappa_0 p$, então por (2.1) segue que

$$\begin{aligned} C\kappa_0\frac{\partial p}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \kappa}{\partial t} &= -v(x,t)\frac{\partial \kappa}{\partial x} - (\kappa + \kappa_0)\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -C\kappa_0 v(x,t)\frac{\partial p}{\partial x}(x,t) - \kappa_0(1 + Cp(x,t))\frac{\partial v}{\partial x}(x,t). \end{aligned}$$

Lembrando que estamos admitindo κ e p tendo valores pequenos em relação à κ_0 e p_0, e desprezando os termos de segunda ordem, concluímos que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa_0\frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{e} \quad C\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por Schwarz, obtemos a equação do movimento acústico de primeira ordem,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{C\kappa_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Da mesma forma a função $v(x,t)$ deve satisfazer a equação de onda,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{C\kappa_0}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Com raciocínio análogo podemos generalizar para três dimensões, isto é, podemos considerar $\kappa = \kappa(r,t)$, com $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ e $v(r,t) = (v_1(r,t), v_2(r,t), v_3(r,t))$. Assim,

$$F(r,t) = \kappa(r,t)v(r,t) = (F_1(r,t), F_2(r,t), F_3(r,t)).$$

Consequentemente, de modo similar ao anterior, temos

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = -\text{div } F = -(\kappa + \kappa_0)\text{div } v - v \cdot \nabla \kappa.$$

Com interpretação análoga, obtemos

$$\kappa_0 \frac{dv}{dt} = -\nabla p.$$

Novamente lembrando que $\kappa = C\kappa_0 p$, segue que

$$C\kappa_0 \frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa_0(1 + Cp)\text{div } v - C\kappa_0 v \cdot \nabla p.$$

Desprezando os termos de segunda ordem,

$$C\frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div } v.$$

Portanto, a pressão acústica deve satisfazer a equação de ondas,

$$\Delta p = \text{div } \nabla p = -\kappa_0 \frac{\partial}{\partial t}\text{div } v = C\kappa_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{C\kappa_0}\Delta p = 0.$$

Se admitirmos que o campo vetorial v é conservativo, então existe uma função com valores escalares u tal que $v = -\nabla u$. Além disso, podemos escrever $p = \kappa_0 \dfrac{\partial u}{\partial t}$. A função u é chamada de velocidade potencial do fluido. Com isso, concluímos que a velocidade potencial satisfaz a equação de onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{C\kappa_0}\Delta u = 0,$$

e este é o modelo utilizado no estudo de movimento de ondas acústicas.

2.2 Condições de Fronteira Acústica

Consideremos um fluido no interior de um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sofrendo apenas a ação de ondas acústicas. Se $u(x,t)$ é a velocidade potencial do fluido, isto é, se a velocidade da partícula é dada por $v = -\nabla u$, então

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty).$$

Seja $\Gamma = \partial\Omega$ a fronteira de Ω. Admitindo que Γ reage localmente (cada um de seus pontos age à pressão do som de modo independente um do outro) à pressão causada pela onda acústica e denotando por $\delta(x,t)$ o deslocamento normal à fronteira do ponto x no instante t, podemos provar que δ deve satisfazer a equação

$$a\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + b\frac{\partial \delta}{\partial t} + c\delta = -p \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty),$$

onde a, b e c são constantes tais que $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ e $c > 0$ (Veja [18]). Como já vimos que a pressão p no ponto x no instante t é dada por

$$p(x,t) = \kappa_0 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t),$$

obtemos a equação

$$a\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + b\frac{\partial \delta}{\partial t} + c\delta = -\kappa_0 \frac{\partial u}{\partial t} \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty). \tag{2.2}$$

Neste modelo consideramos também uma condição de impenetrabilidade da fronteira, que equivale a dizer que existe uma compatibilidade entre a velocidade normal da fronteira $\frac{\partial \delta}{\partial t}$, com a velocidade normal do fluido, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = -v \cdot \nu$, onde v é a velocidade do fluido e ν é o vetor normal unitário exterior a Ω. Logo,

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ sobre } \Gamma \times (0,\infty). \tag{2.3}$$

As equações (2.2) e (2.3) são chamadas de condições de fronteira acústica.

Capítulo 3

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados de Análise Funcional, Espaços de Sobolev e de Equações Diferenciais Parciais, necessários para garantirmos a existência e unicidade da solução do problema (1.1). Não serão feitas as demonstrações de tais resultados, porém será indicada uma referência que contenha uma demonstração dos mesmos.

3.1 Resultados de Análise Funcional

Seja E um espaço vetorial normado. O dual topológico de E, denotado por E', é definido como o conjunto de todos os funcionais lineares e contínuos $f : E \to \mathbb{R}$.

Em E, o operador linear

$$\begin{aligned} J_E : E &\to E'' \\ x &\mapsto J_E(x) = f(x) \end{aligned}$$

está bem definido e é uma isometria linear, chamada de mergulho canônico de E em E'', onde E'' é o bidual de E, isto é, o dual de E'.

Definição 1. *Um espaço normado E é dito reflexivo se o mergulho canônico $J_E : E \to E''$ for sobrejetivo.*

Definição 2. *Um espaço métrico E é dito separável se possui um subconjunto X enumerável e denso em E, isto é, $\overline{X} = E$.*

Definição 3. *Uma sequência (x_k) converge forte para x em E se $\|x_k - x\|_E \to 0$ quando $k \to \infty$. A notação para convergência forte é $x_k \to x$.*

Definição 4. *Um espaço normado* E *é chamado espaço de Banach quando toda sequência de Cauchy em* E *for convergente em* E.

Definição 5. *Sejam* E *um espaço de Banach e* (x_k) *um sequência em* E. *Dizemos que* (x_k) **converge fraco** *para* x *se, e somente se,* $f(x_k) \to f(x)$ *para toda* $f \in E'$. *A notação para convergência fraca é* $x_k \rightharpoonup x$.

Definição 6. *Sejam* E *um espaço de Banach e* (f_k) *um sequência em* E'. *Dizemos que* (f_k) **converge fraco estrela** *para* f *se, e somente se,* $\langle f_k, x\rangle = f_k(x) \to f(x) = \langle f, x\rangle$ *para todo* $x \in E$. *A notação para convergência fraca estrela é* $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Teorema 1. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki) Seja* E *um espaço de Banach. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leqslant 1\}$$

é compacto na topologia fraco estrela.

Demonstração: Ver [5], pág. 66.

Teorema 2. *Se* E *é um espaço de Banach separável, então* $B_{E'}$ *é metrizável na topologia fraco estrela.*

Demonstração: Ver [5], pág. 74.

Corolário 1. *Se* E *é um espaço de Banach separável, então toda sequência limitada em* E' *possui subsequência convergente na topologia fraco estrela.*

Demonstração: Ver [5], pág. 76.

Teorema 3. *Se* E *é um espaço reflexivo, então toda sequência limitada em* E *admite subsequência convergente na topologia fraca.*

Demonstração: Ver [5], pág. 69.

Representamos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções f localmente integráveis em Ω, isto é, para todo compacto $K \subset \Omega$, temos

$$\int_K |f(x)|dx < \infty.$$

O subespaço de $L^1_{loc}(\Omega)$ constituído das funções integráveis em Ω é denotado por $L^1(\Omega)$. Se $f \in L^1(\Omega)$, então

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Definição 7. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $p \in \mathbb{R}$, *com* $1 < p < \infty$; *Definimos por*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\},$$

o qual é um espaço vetorial normado munido com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso em que $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists\ C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

com a norma,

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)|,$$

onde

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)| = \inf \{C > 0 \ ; \ |f(x)| \leqslant C \ \text{ q.s. em } \ \Omega\}.$$

Teorema 4. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *limitado. Se* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, *então* $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *e existe uma constante positiva* C *tal que*

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Demonstração: Ver [14], pág. 111.

Teorema 5. *Seja* (f_k) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$, *com* $\|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então, existe uma subsequência* (f_{k_j}) *tal que*

(i) $f_{k_j}(x) \to f(x)$ *q.s. em* Ω;

(ii) $|f_{k_j}(x)| \leqslant h(x)$, $\forall j$ *e q.s. em* Ω, *onde* $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver [5], pág. 94.

3.2 Noções de Distribuição de Schwarz

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Denominamos suporte de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua, ao fecho em Ω do conjunto dos pontos de Ω onde f não é nula. Representaremos o suporte de f por $\text{supp}(f)$. Simbolicamente,

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Chamamos de multi-índice a qualquer n-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n$. A ordem do multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é o número

$$|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|.$$

O operador derivada parcial de ordem $|\alpha|$, denotado por D^α, é definido por

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Adotaremos a seguinte noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$: Uma sequência (f_k) converge para f em $C_0^\infty(\Omega)$, quando são satisfeitas as condições:
(i) Todas as f_k possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω;
(ii) $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$ uniformemente em Ω para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, e o chamamos de espaço das funções teste.

Lema 1. *(Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx = 0, \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ q.s. em Ω.

Demonstração: Ver [1], pág. 59 ou [15], pág. 10.

Definição 8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Um funcional, $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é dito uma distribuição sobre Ω, se*
(i) T é linear;
(ii) T é contínua.

No espaço vetorial de todas as distribuições sobre Ω, dizemos que uma sequência (T_k) converge para T, quando $\langle T_k, f\rangle \to \langle T, f\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Representaremos o espaço das distribuições sobre Ω, com essa noção de convergência, por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemplo 1. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Para $u \in L^p(\Omega)$ fixado, o funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por*

$$\langle T_u, f\rangle = \int_\Omega u(x) f(x) dx$$

é uma distribuição sobre Ω. Para ver isto, usamos o Lema 1. Por esta razão, identificamos u com T_u.

Definição 9. *Sejam* T *uma distribuição sobre um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* α *um multi-índice. A derivada de ordem* $|\alpha|$ *de* T*, no sentido das distribuições, é definida como sendo o funcional* $D^\alpha T$*, dado por*

$$\langle D^\alpha T, f\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha f\rangle, \forall\ f \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definição 10. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, não necessariamente limitado, e* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$*. Então, dizemos que* f *satisfaz as* **condições de Carathéodory** *sobre* Ω *se:*

(i) $f(t, x)$ *é mensurável em* t *para cada* x *fixo;*

(ii) $f(t, x)$ *é contínua em* x *para cada* t *fixo;*

(iii) para cada compacto $U \subset \Omega$ *existe uma função real integrável* $m_U(t)$ *tal que*

$$|f(t, x)| \leqslant m_U(t),\ \forall\, (t, x) \in U.$$

Teorema 6. *(Carathéodory) Seja* $f : R \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação nas condições de Carathéodory sobre o retângulo* $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$ *, onde* a *e* b *são constantes reais positivas. Então existe uma solução* $x(t)$ *do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

sobre algum intervalo do tipo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$*, para algum* $\varepsilon > 0$.

Demonstração: Ver [17], pág. 156.

Corolário 2. *(Prolongamento de Soluções) Sejam* $0 < T < \infty$*,* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant R, R > 0\}$ *e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory em* $[0, T] \times B$*. Seja* $x(t)$ *uma solução de*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(x, t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}, \ \textit{com } |x_0| \leqslant R.$$

Se em qualquer intervalo I*, onde* $x(t)$ *está definida, tivermos* $|x(t)| \leqslant M,\ \forall\ t \in I$*, onde* M *é uma constante independente de* I *e* $M < R$*, então* $x(t)$ *tem um prolongamento até* $[0, T]$.

Demonstração: Ver [17], pág. 164.

3.3 Espaços de Sobolev

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Vimos que para cada $u \in L^p(\Omega)$, a função u possui derivadas $D^\alpha u$ de todas as ordens no sentido das distribuições. Faz sentido então definirmos, para cada m inteiro positivo, o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ dado por

$$W^{m,p}(\Omega) = \big\{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leqslant m\big\}.$$

Munimos $W^{m,p}(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\displaystyle\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}, & \text{se} \quad 1 \leqslant p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{\Omega} \operatorname{ess} |D^\alpha u|, & \text{se} \quad p = \infty \end{cases}.$$

No caso em que $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, e se $u \in H^m(\Omega)$, escrevemos $\|u\|_{W^{m,2}(\Omega)} = \|u\|_{H^m(\Omega)}$.

Definição 11. *Sejam X e Y espaços de Banach com $X \subset Y$. Dizemos que X está continuamente imerso em Y e escrevemos $X \hookrightarrow Y$, quando existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_Y \leqslant C\|u\|_X\ \forall\ u \in X.$$

Se toda sequência limitada em X admitir subsequência convergente em Y, dizemos que X está compactamente imerso em Y e escrevemos $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$. Notemos que do Teorema 4, resulta que $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, desde que $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ e Ω seja limitado.

Teorema 7. *(Rellich-Kondrachov) Sejam $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*
(i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \dfrac{np}{n-p}$, se $p < n$;
(ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \infty$, se $p = n$;
(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, se $p > n$.

Demonstração: Ver [15], pág. 79.

Teorema 8. *(Do Traço) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, com fonteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Então, existe um operador linear limitado $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tal que*
(i) $Tf = f\big|_{\partial\Omega}$, se $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;
(ii) $\|Tf\|_{L^p(\partial\Omega)} \leqslant C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, $\forall\ f \in W^{1,p}(\Omega)$, onde C é uma constante que depende somente de p e Ω.

Demonstração: Ver [8], pág. 258.

Teorema 9. *(Fórmula de Green-Gauss) Sejam* $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\int_\Omega f_{x_i} g dx = -\int_\Omega f g_{x_i} + \int_{\partial\Omega} f g \nu^i dS \quad (i = 1, \dots, n),$$

onde ν^i *é a i-ésima coordenada do vetor normal unitário* ν*.*

Demonstração: Ver [8], pág. 628.

Teorema 10. *(Fórmula de Green) Sejam* $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$*. Então*

$$-\int_\Omega f \Delta g dx = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \nu} f \, dS.$$

Demonstração: Ver [6], pág. 263.

Teorema 11. *(Identidade de Rellich) Se* $v \in H^2(\Omega)$*, então*

$$2\big(\Delta v, (m \cdot \nabla) v\big) = (n-2)|\nabla v|^2 - \int_\Gamma (m \cdot \nu) |\nabla v|^2 \, d\Gamma + 2 \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu} (m \cdot \nabla) v \, d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [9], pág. 16.

3.4 Os Espaços de Banach $L^p(0, T; X)$

Seja X um espaço de Banach. Em analogia aos espaços de Lebesgue citados na definição 7, definimos $L^p(0, T; X)$ como sendo o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \to X$, definidas quase sempre $(0, T)$ com valores em X, fortemente mensuráveis e tais que a função númerica $t \mapsto \|u\|_X$ está em $L^p(0, T)$. Se $u \in L^p(0, T; X)$, definimos a norma de u como

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se} \quad 1 \leqslant p < \infty \\ \sup\limits_{0<t<T} \text{ess} \, \|u(t)\|_X, & \text{se} \quad p = \infty \end{cases}.$$

Teorema 12. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e suponhamos que* $X \hookrightarrow Y$*. Se* $1 \leqslant s < r \leqslant \infty$*, então*

$$L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^s(0, T; Y).$$

Demonstração: Ver [14], pág. 136.

Lema 2. *(Aubin-Lions) Sejam* X, B *e* Y *espaços de Banach tais que* $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$*, com* X *reflexivo. Suponha* (u_k) *uma sequência uniformemente limitada em* $L^2(0,T;X)$*, tal que* $\left(\dfrac{du_k}{dt}\right) = (u_k')$ *é limitada em* $L^p(0,T;Y)$*, para algum* $p > 1$*. Então existe uma subsequência de* (u_k) *que converge fortemente em* $L^2(0,T;B)$*.*

Demonstração: Ver [19], pág. 70.

Lema 3. *(Lions) Sejam* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *e* g *uma função em* $L^q(\Omega), 1 < q < \infty$*. Se* (g_k) *é uma sequência em* $L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\|g_k\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C, \forall\, k \;\; e \;\; g_k \to g \;\; q.s. \;\; em \;\; \Omega,$$

então

$$g_k \rightharpoonup g \;\; em \;\; L^q(\Omega).$$

Demonstração: Ver [12], pág. 13 ou [19], pág. 72.

Teorema 13. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach com* $X \hookrightarrow Y$*. Se* $u \in L^p(0,T;X)$ *e* $u' \in L^p(0,T;Y)$*, então* $u \in C([0,T];Y)$*.*

Demonstração: Ver [12], pág. 7.

3.5 Desigualdades Importantes

Teorema 14. *(Desigualdade de Gronwall) Sejam* $C \geqslant 0$ *e* $u : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e não negativa. Seja também* β *uma função integrável em* (t_0, T) *e não negativa q.s. em* (t_0, T) *tal que*

$$u(t) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds, \;\; \forall\; t \in [t_0, T].$$

Então,

$$u(t) \leqslant Ce^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds} \;\; \forall\; t \in [t_0, T].$$

Demonstração: Ver [13], pág. 11 ou [19], pág. 55.

Teorema 15. *(Desigualdade de Young) Sejam* p *e* q *tais que* $1 < p, q < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então, para todo número real* $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ *temos que*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [8], pág. 622.

Teorema 16. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* Ω *um aberto limitado e* $1 < p, q < \infty$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e vale a desigualdade*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{3.1}$$

Demonstração: Ver [1], pág. 23 ou [5], pág. 92.

No caso em que $p = q = 2$, chamaremos (3.1) de desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Capítulo 4

Resultado Principal

Neste capítulo demonstraremos o principal resultado dessa dissertação, a saber o Teorema 17, que garante a existência e unicidade da solução do problema (1.1). Porém, inicialmente daremos o conceito de solução para um problema de valor inicial e de fronteira.

4.1 Definição de Solução do Problema

Definição 12. *Uma solução global do problema não linear de valor inicial e de fronteira (1.1) é um par de funções* $\{u, \delta\}$ *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V \cap H_\Delta(\Omega)),\ u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V),\ u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)); \\ \gamma_0(u'), \gamma_0(u'') \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Gamma_1)); \\ \delta, \delta', \delta'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Gamma_1)), \end{array} \right.$$

tal que para todo $T > 0$ *arbitrário fixado, as seguintes condições são satisfeitas*

$$u'' - \alpha(t)\Delta u + \lambda |u|^\rho u = 0 \quad \textit{em} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega))); \tag{4.1}$$

$$u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta = 0 \quad \textit{em} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_1)); \tag{4.2}$$

e verificam as condições $(1.1)_4 - (1.1)_8$.

Mais precisamente, (4.1) e (4.2) equivalem a dizer que

$$(u'', w) + \alpha(t)\big[((u, w)) - (\delta', w)_{\Gamma_1} + (\eta(u'), w)_{\Gamma_1}\big] + \lambda \int_\Omega |u|^\rho u\, w\, dx = 0$$

e

$$(u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta, z)_{\Gamma_1} = 0,$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$, para toda $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $z \in L^2(\Gamma_1)$.

A existência das funções u e δ será garantida pelo teorema a seguir:

Teorema 17. *Se* $(u_0, u_1, \delta_0) \in (V \cap H_\Delta(\Omega)) \times V \times L^2(\Gamma_1)$ *e* $\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu} - \delta'(0) + \eta(u_1) = 0$ *sobre* Γ_1*, então existe uma única solução para o problema não linear de valor inicial e de fronteira (1.1) no sentido da definição 12.*

Demonstração: A demonstração do Teorema 17 será feita por meio do método de Faedo-Galerkin-Lions, a qual é organizada como segue:

1. Soluções do problema aproximado, seção 4.2;
2. Estimativas a priori das soluções aproximadas, seção 4.3;
3. Passagem ao limite nas soluções aproximadas, seção 4.4;
4. Verificação das condições iniciais, seção 4.5;
5. Unicidade das soluções, seção 4.6.

4.2 Soluções do Problema Aproximado

Inicialmente notemos que $V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$ são separáveis e assim podemos tomar $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Gamma_1)$ tais que

$$\left|\begin{array}{l}\forall\ m \in \mathbb{N},\ w_1, \cdots, w_m \text{ e } z_1, \cdots, z_m \text{ são linearmente independentes;}\\ \text{As combinações lineares finitas dos } w_i' s \text{ são densas em } V \cap H_\Delta(\Omega);\\ \text{As combinações lineares finitas dos } z_i' s \text{ são densas em } L^2(\Gamma_1).\end{array}\right.$$

Suponhamos ainda, via Gram-Schimidt, que $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ seja ortonormal em $L^2(\Omega)$ e $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ortonormal em $L^2(\Gamma_1)$. Ponhamos

$$W_m = [w_1, \cdots, w_m] \ \text{ e } \ Z_m = [z_1, \cdots, z_m]$$

os subespaços gerados pelos m primeiros vetores de cada base, respectivamente. Nosso trabalho agora é provarmos a existência de funções

$$u_m(t) \in W_m \Leftrightarrow u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$$

e

$$\delta_m(t) \in Z_m \Leftrightarrow \delta_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) z_i$$

tais que

$$
\begin{aligned}
&(u''_m(t), w) + \alpha(t)\big[((u_m(t), w)) - (\delta'_m(t), w)_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m(t)), w)_{\Gamma_1}\big] \\
&+\lambda \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w dx = 0
\end{aligned}
$$

e

$$
(u'_m(t), z)_{\Gamma_1} + (f_1\delta''_m(t), z)_{\Gamma_1} + (f_2\delta'_m(t), z)_{\Gamma_1} + (f_3\delta_m(t), z)_{\Gamma_1} = 0,
$$

para toda $w \in W_m$, $z \in Z_m$ e $m \in \mathbb{N}$, onde u_m e δ_m satisfazem:

$$
u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{em} \quad V \cap H_\Delta(\Omega); \tag{4.3}
$$

$$
u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \quad \text{em} \quad V; \tag{4.4}
$$

$$
\delta_m(0) = \delta_{0m} \to \delta_0 \quad \text{em} \quad L^2(\Gamma_1); \tag{4.5}
$$

$$
\delta'_m(0) = \frac{\partial u_{0m}}{\partial \nu} + \eta(u_{1m}) \to \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \eta(u_1) \quad \text{em} \quad L^2(\Gamma_1). \tag{4.6}
$$

Como $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ geram W_m e Z_m, respectivamente, então é suficiente considerarmos

$$
\begin{aligned}
&(u''_m(t), w_j) + \alpha(t)\big[((u_m(t), w_j)) - (\delta'_m(t), w_j)_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m(t)), w_j)_{\Gamma_1}\big] \\
&+\lambda \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_j dx = 0
\end{aligned}
$$

e

$$
(u'_m(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_1\delta''_m(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_2\delta'_m(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_3\delta_m(t), z_j)_{\Gamma_1} = 0,
$$

para todo $j = 1, \cdots, m$. Da definição de $u_m(t)$ e $\delta_m(t)$ e da ortonormalidade de $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente, segue que

$$
\begin{aligned}
&g''_{jm}(t) + \alpha(t)\Big[\sum_{i=1}^m g_{im}(t)((w_i, w_j)) - \sum_{i=1}^m h'_{im}(t)(z_i, w_j)_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m), w_j)_{\Gamma_1}\Big] \\
&+\lambda \int_\Omega |u_m|^\rho u_m w_j dx = 0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m g'_{im}(t)(w_i, z_j)_{\Gamma_1} + \sum_{i=1}^m h''_{im}(t)(f_1 z_i, z_j)_{\Gamma_1} + \sum_{i=1}^m h'_{im}(t)(f_2 z_i, z_j)_{\Gamma_1} \\
&+ \sum_{i=1}^m h_{im}(t)(f_3 z_i, z_j)_{\Gamma_1} = 0,
\end{aligned}
$$

para todo $j = 1, \cdots, m$. Isto equivale a dizer que

$$\begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \alpha(t)\left\{ \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdots & ((w_m, w_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((w_1, w_m)) & \cdots & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} \right.$$

$$- \begin{bmatrix} (z_1, w_1)_{\Gamma_1} & \cdots & (z_m, w_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (z_1, w_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (z_m, w_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$\left. + \begin{bmatrix} (\eta(u'_m), w_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots \\ (\eta(u'_m), w_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \lambda \int_\Omega |u_m|^\rho u_m w_1 dx \\ \vdots \\ \lambda \int_\Omega |u_m|^\rho u_m w_m dx \end{bmatrix} = 0$$

e

$$\begin{bmatrix} (w_1, z_1)_{\Gamma_1} & \cdots & (w_m, z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (w_m, z_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (f_1 z_1, z_1)_{\Gamma 1} & \cdots & (f_1 z_m, z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_1 z_1, z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (f_1 z_m, z_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h''_{1m}(t) \\ \vdots \\ h''_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (f_2 z_1, z_1)_{\Gamma 1} & \cdots & (f_2 z_m, z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_2 z_1, z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (f_2 z_m, z_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h'_{1m}(t) \\ \vdots \\ h'_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (f_3 z_1, z_1)_{\Gamma 1} & \cdots & (f_3 z_m, z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_3 z_1, z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (f_3 z_m, z_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Denotando por:

$G(t) = [g_{1m}(t) \cdots g_{mm}(t)]^t$, $H(t) = [h_{1m}(t) \cdots h_{mm}(t)]^t$, $A_0 = [((w_j, w_i))]_{m \times m}$,
$A = [(z_j, w_i)_{\Gamma_1}]_{m \times m}$, $N = [(\eta(u'_m), w_i)_{\Gamma_1}]_{m \times 1}$, $D = [\lambda \int_\Omega \psi(u_m) w_i dx]_{m \times 1}$,
$F_1 = [(f_1 w_j, z_i)_{\Gamma_1}]_{m \times m}, F_2 = [(f_2 w_j, z_i)_{\Gamma_1}]_{m \times m}, F_3 = [(f_3 w_j, z_i)_{\Gamma_1}]_{m \times m}$,
onde $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\psi(s) = |s|^\rho s$, podemos escrever,

$$G''(t) + \alpha(t)\big[A_0 G(t) - AH'(t) + N\big] + D = 0;$$
$$A^t G'(t) + F_1 H''(t) + F_2 H'(t) + F_3 H(t) = 0.$$

Notemos que F_1 é inversível. Com efeito, definamos

$$v_1 = ((f_1^{\frac{1}{2}}z_1, f_1^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1}, \cdots, (f_1^{\frac{1}{2}}z_1, f_1^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1}), \cdots, v_m = ((f_1^{\frac{1}{2}}z_m, f_1^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1}, \cdots, (f_1^{\frac{1}{2}}z_m, f_1^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1}).$$

Se

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = (0, \cdots, 0),$$

então,

$$\Big((\sum_{i=1}^{m} f_1^{\frac{1}{2}}\alpha_i z_i, f_1^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1}, \cdots, (\sum_{i=1}^{m} f_1^{\frac{1}{2}}\alpha_i z_i, f_1^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1} \Big) = (0, \cdots, 0),$$

donde segue que

$$(\sum_{i=1}^{m} f_1^{\frac{1}{2}}\alpha_i z_i, f_1^{\frac{1}{2}}z_1)_{\Gamma_1} = \cdots = (\sum_{i=1}^{m} f_1^{\frac{1}{2}}\alpha_i z_i, f_1^{\frac{1}{2}}z_m)_{\Gamma_1} = 0,$$

e daí, temos

$$\Big| \sum_{i=1}^{m} f_1^{\frac{1}{2}}\alpha_i z_i \Big|_{\Gamma_1}^2 = (\sum_{i=1}^{m} f_1^{\frac{1}{2}}\alpha_i z_i, \sum_{i=1}^{m} f_1^{\frac{1}{2}}\alpha_i z_i)_{\Gamma_1} = 0.$$

Assim, $\sum_{i=1}^{m} f_1^{\frac{1}{2}}\alpha_i z_i = 0$. Sendo $\{f_1^{\frac{1}{2}}z_1, \cdots, f_1^{\frac{1}{2}}z_m\}$ L.I. em Z_m, pois é uma base, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$. Portanto, $\{v_1, \cdots, v_m\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^m$. Logo, $\det F_1 \neq 0$, isto é, F_1 é inversível. Pondo, $B = [w_1 \cdots w_m]$ e

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}, \text{ onde } Y_1 = G, Y_2 = G', Y_3 = H, Y_4 = H',$$

temos que

$$\begin{aligned} Y' &= \begin{bmatrix} Y_1' \\ Y_2' \\ Y_3' \\ Y_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ -\alpha(t)A_0Y_1 + \alpha(t)AY_4 - \alpha(t)N(BY_2) - D(BY_1) \\ Y_4 \\ -F_1^{-1}A^tY_2 - F_1^{-1}F_3Y_3 - F_1^{-1}F_2Y_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha(t)N(BY_2) - D(BY_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & 0 \\ -\alpha(t)A_0 & 0 & 0 & \alpha(t)A \\ 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & -F_1^{-1}A^t & -F_1^{-1}F_3 & -F_1^{-1}F_2 \end{bmatrix} \cdot Y. \end{aligned}$$

Definamos, $\Phi : (0,T) \times \mathbb{R}^{4m} \to \mathbb{R}^{4m}$ por

$$\Phi(t,Y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha(t)N(BY_2) - D(BY_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & 0 \\ -\alpha(t)A_0 & 0 & 0 & \alpha(t)A \\ 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & -F_1^{-1}A^t & -F_1^{-1}F_3 & -F_1^{-1}F_2 \end{bmatrix} \cdot Y.$$

Notemos que $\Phi(t,Y)$ satisfaz as condições de Carathéodory. De fato,

(i) Para cada Y fixo, Φ é mensurável em t, pois $\alpha(t) \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$;

(ii) Para cada t fixo, Φ é contínua em Y, pois η é lipschitz na segunda variável e ψ é contínua. Com efeito, notemos que para cada $\epsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que

$$|B\widehat{Y}_2 - BY_2| < \sigma \text{ implica em } \|N(B\widehat{Y}_2) - N(BY_2)\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon.$$

Sendo

$$\begin{aligned} \|N(B\widehat{Y}_2) - N(BY_2)\|_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{i=1}^{m} \left| \int_{\Gamma_1} [\eta(x, B\widehat{Y}_2) - \eta(x, BY_2)] w_i \, d\Gamma \right| \\ &\leqslant L\left(\sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_1} |w_i| \, d\Gamma \right) |B\widehat{Y}_2 - BY_2| \end{aligned}$$

então basta tomar $\sigma = \dfrac{\epsilon}{L\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma_1}|w_i|d\Gamma}$. Isso mostra que a função $N(BY_2)$ é contínua.

Agora da continuidade de ψ, temos que para cada $\epsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que

$$|B\widehat{Y}_1 - BY_1| < \sigma \text{ implica em } |\psi(B\widehat{Y}_1) - \psi(BY_1)| < \epsilon.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|D(B\widehat{Y}_1) - D(BY_1)\|_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{i=1}^{m} \left| \int_{\Omega} [\psi(B\widehat{Y}_1) - \psi(BY_1)] w_i \, dx \right| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega} |w_i| \, dx \right) \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, a função $D(BY_1)$ é contínua. Portanto, da continuidade das funções $N(BY_2)$ e $D(BY_1)$, segue que, para cada t fixo, Φ é contínua em Y, como queríamos demonstrar.

(iii) Para todo compacto $U \subset (0,T) \times \mathbb{R}^{4m}$, existe $m_U(t) \in L^1(0,T)$ tal que

$$\|\Phi(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leqslant m_U(t).$$

De fato, como $\alpha(t)$ é limitada, $Y \in U$ e U é compacto, então existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$\|\Phi(t,Y)\|_{\mathbb{R}^{4m}} \leqslant C_1 + C_2\|N(BY_2)\|_{\mathbb{R}^m} + \|D(BY_1)\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Assim, basta tomarmos $m_U(t) = C_1 + C_2\|N(BY_2)\|_{\mathbb{R}^m} + \|D(BY_1)\|_{\mathbb{R}^m}$. Adotando a norma da soma em $\mathbb{R}^m$, temos que

$$\|N(BY_2)\|_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^{m} |(\eta(BY_2), w_i)_{\Gamma_1}| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\eta(BY_2)|_{\Gamma_1}|w_i|_{\Gamma_1} < \infty,$$

pois η é contínua, Y_2 é limitado e $V \cap H_\Delta(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, onde a última imersão é garantida pelo Teorema 8. Logo, $\int_0^T \|N(BY_2)\|_{\mathbb{R}_m} < \infty$. Analogamente, mostramos que $\int_0^T \|D(BY_1)\|_{\mathbb{R}^m} < \infty$. Portanto, $m_U(t) \in L^1(0,T)$ e pelo Teorema de Carathéodory o P.V.I.

$$\begin{cases} Y' = \Phi(t,Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{4.7}$$

possui solução Y em $[0, t_m)$.

4.3 Estimativas a Priori das Soluções Aproximadas

Nosso objetivo agora é estendermos a solução Y do P.V.I. (4.7) para $[0,\infty)$. Faremos isso a partir da estimativa:

ESTIMATIVA I

Sabemos que, para todo $j = 1, \cdots, m$, vale

$$\begin{aligned}(u''_m(t), w_j) + \alpha(t)\Big[((u_m(t), w_j)) - (\delta'_m(t), w_j)_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m(t)), w_j)_{\Gamma_1}\Big] \\ +\lambda\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_j\,dx = 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

e

$$(u'_m(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_1\delta''_m(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_2\delta'_m(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_3\delta_m(t), z_j)_{\Gamma_1} = 0. \tag{4.9}$$

Multiplicando $g'_{jm}(t)$ e $h'_{jm}(t)$ em (4.8) e (4.9), respectivamente, e somando em j de 1 a m, temos:

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u'_m(t)) + \alpha(t)\Big[((u_m(t), u'_m(t))) - (\delta'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} \\ +(\eta(u'_m(t), u'_m(t)))_{\Gamma_1}\Big] + \lambda\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) u'_m(t)\,dx = 0\end{aligned} \tag{4.10}$$

e

$$(u'_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}+(f_1\delta''_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}+(f_2\delta'_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1} \tag{4.11}$$
$$+(f_3\delta_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}=0.$$

Notemos que

$$(u''_m(t),u'_m(t))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u'_m(t),u'_m(t))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2; \tag{4.12}$$
$$((u_m(t),u'_m(t)))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}((u_m(t),u_m(t)))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2; \tag{4.13}$$
$$\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)=\frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}dx=\frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}; \tag{4.14}$$
$$(f_1\delta''_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}=(f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t),f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t))_{\Gamma_1}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}; \tag{4.15}$$
$$(f_2\delta'_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}=(f_2^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t),f_2^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t))_{\Gamma_1}=|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}; \tag{4.16}$$
$$(f_3\delta_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}=(f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t),f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t))_{\Gamma_1}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}. \tag{4.17}$$

Substituindo (4.12)-(4.17) em (4.10) e (4.11), obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2+\frac{\alpha(t)}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2+\frac{\lambda}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\alpha(t)(\eta(u'_m(t)),u'_m(t))_{\Gamma_1}\\ =\;&\alpha(t)(\delta'_m(t),u'_m(t))_{\Gamma_1}\end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}=-(u'_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma 1}.$$

Agora notemos que

$$\begin{aligned}\alpha(t)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2&=\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\|u_m(t)\|^2\Big)-\alpha'(t)\|u_m(t)\|^2;\\ \alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}&=\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1};\\ \alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}&=\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2+\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\|u_m(t)\|^2\Big)+\frac{2\lambda}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \tag{4.18}$$
$$+2\alpha(t)(\eta(u'_m(t)),u'_m(t))_{\Gamma_1}=2\alpha(t)(\delta'_m,u'_m)_{\Gamma_1}+\alpha'(t)\|u_m(t)\|^2$$

e

$$\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)+\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)+|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1} \tag{4.19}$$
$$=\;-2\alpha(t)(u'_m,\delta'_m)_{\Gamma_1}+\alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+\alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

Somando (4.18) e (4.19), temos que

$$\begin{aligned} & E_m'(t) + 2\alpha(t)(\eta(u_m'(t)), u_m'(t))_{\Gamma_1} + |f_2^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ = \ & \alpha'(t)\Big[\|u_m(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2\Big], \end{aligned}$$

onde

$$E_m(t) = |u_m'(t)|^2 + \frac{2\lambda}{\rho+2}\|u_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \alpha(t)\Big[\|u_m(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2\Big].$$

Como $[\eta(x,s) - \eta(x,r)](s-r) \geqslant \eta_0(s-r)^2$, $\eta(x,0) = 0$ e $\alpha(t) \geqslant \alpha_0 > 0$, então para $s = u_m'(t)$ e $r = 0$, segue que

$$\eta(u_m'(t))u_m'(t) \geqslant \eta_0\big(u_m'(t)\big)^2$$

que implica em

$$2\alpha(t)(\eta(u_m'(t))u_m'(t))_{\Gamma_1} \geqslant 2\alpha_0\eta_0|u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & E_m'(t) + 2\alpha_0\eta_0|u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_2^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\ \leqslant \ & \alpha'(t)\Big[\|u_m(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2\Big]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}E_m(t) &= \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}\Big[|u_m'(t)|^2 + \frac{2}{\rho+2}\|u_m(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2}\Big] + \\ &\quad + |\alpha'(t)|\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\Big[\|u_m(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2\Big] \qquad (4.21) \\ &\geqslant |\alpha'(t)|\Big[\|u_m(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2\Big], \end{aligned}$$

onde usamos $(1.2)_1$. Logo, por (4.20) e (4.21) concluímos que

$$E_m'(t) + 2\alpha_0\eta_0|u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_2^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leqslant \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}E_m(t),$$

ou seja,

$$E_m'(t) + 2\alpha_0\eta_0|u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leqslant \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}E_m(t). \tag{4.22}$$

Integrando (4.22) de 0 a t, com $t \in (0, t_m)$, obtemos

$$E_m(t) + 2\alpha_0\eta_0\int_0^t |u_m'(s)|_{\Gamma_1}^2 ds \leqslant E_m(0) + \frac{1}{\alpha_0}\int_0^t |\alpha'(s)|E_m(s)ds.$$

Notemos que $E_m(0)$ é limitada. De fato,

$$E_m(0) = |u'_m(0)|^2 + \frac{2\lambda}{\rho+2}\|u_m(0)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \alpha(0)\Big[\|u_m(0)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(0)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(0)|^2_{\Gamma_1}\Big]$$

e as condições iniciais $(4.3)-(4.6)$, garantem que

$$\begin{array}{lll} (u_m(0)) & \text{é limitada em} & V\cap H_\Delta(\Omega); \\ (u'_m(0)) & \text{é limitada em} & V; \\ (\delta_m(0)) & \text{é limitada em} & L^2(\Gamma_1); \\ (\delta'_m(0)) & \text{é limitada em} & L^2(\Gamma_1). \end{array}$$

Pela cadeia de imersões

$$V\cap H_\Delta(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

temos que $(u_m(0))$ é limitada em V e em $L^{\rho+2}(\Omega)$ e $(u'_m(0))$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Com isso, $E_m(0)$ é limitada. Daí, existe uma constante C (que não depende de m) tal que

$$E_m(t) \leqslant E_m(t) + 2\alpha_0\eta_0\int_0^t |u'_m(s)|^2_{\Gamma_1}ds \leqslant C + \frac{1}{\alpha_0}\int_0^t |\alpha'(s)|E_m(s)ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall, para todo $t\in(0,t_m)$, temos

$$E_m(t) \leqslant Ce^{\frac{1}{\alpha_0}\int_0^t|\alpha'(s)|ds} \leqslant Ce^{\frac{1}{\alpha_0}\|\alpha'\|_{L^1(0,\infty)}}.$$

Portanto, existe uma constante, que ainda denotaremos por C (que não depende de m), tal que

$$E_m(t) + 2\alpha_0\eta_0\int_0^t |u'_m(s)|^2_{\Gamma_1}ds \leqslant C.$$

Daí,

$$|u'_m(t)|^2 \leqslant E_m(t) \leqslant C \ \text{ e } \ \|u_m(t)\|^2 \leqslant \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}E_m(t) \leqslant C.$$

Usando o fato de $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ser ortonormal em $L^2(\Omega)$, segue que

$$\|Y_1(t)\|^2_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^m [g_{im}(t)]^2 = \Big(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i, \sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i\Big) = |u_m(t)|^2 \leqslant C\|u_m(t)\|^2 \leqslant C.$$

e

$$\|Y_2(t)\|^2_{\mathbb{R}^m} = \sum_{i=1}^m [g'_{im}(t)]^2 = \Big(\sum_{i=1}^m g'_{im}(t)w_i, \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)w_i\Big) \leqslant C.$$

Por outro lado, sendo $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ortonormal em $L^2(\Gamma_1)$ e pondo

$$0<\overline{f}_1=\min_{x\in\overline{\Gamma}_1} f_1(x) \ \text{ e } \ 0<\overline{f}_3=\min_{x\in\overline{\Gamma}_1} f_3(x)$$

então,

$$|\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}+|\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\leqslant \frac{1}{b}E_m(t),$$

onde $b=\min\{\alpha_0\overline{f}_1,\alpha_0\overline{f}_3\}>0$, visto que

$$\begin{aligned}
E_m(t) &= |u_m'(t)|^2+\frac{2\lambda}{\rho+2}\|u_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}\\
&\quad +\alpha(t)\left[\|u_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\right]\\
&\geqslant \alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}+\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\\
&\geqslant \alpha_0\overline{f}_1|\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}+\alpha_0\overline{f}_3|\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\\
&\geqslant b\left[|\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}+|\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|Y_3(t)\|^2_{\mathbb{R}^m}=\sum_{i=1}^m[h_{im}(t)]^2=\left(\sum_{i=1}^m h_{im}(t)z_i,\sum_{i=1}^m h_{im}(t)z_i\right)_{\Gamma_1}=|\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\leqslant\frac{1}{b}C$$

e

$$\|Y_4(t)\|^2_{\mathbb{R}^m}=\sum_{i=1}^m[h_{im}'(t)]^2=\left(\sum_{i=1}^m h_{im}'(t)z_i,\sum_{i=1}^m h_{im}'(t)z_i\right)_{\Gamma_1}=|\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}\leqslant\frac{1}{b}C.$$

Com isso, concluímos que

$$Y=\begin{bmatrix} Y_1\\ Y_2\\ Y_3\\ Y_4\end{bmatrix}$$

é limitada em $\mathbb{R}^{4m}$, isto é, existe uma constante M tal que $\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^{4m}}\leqslant M$, para todo $m\in\mathbb{N}$ e $t\in[0,t_m)$. Portanto, pelo Corolário 2, a solução Y do P.V.I. (4.7) pode ser prolongada de $[0,\infty)$, e assim as funções $u_m(t)$ e $\delta_m(t)$ podem ser definidas em todo o intervalo $[0,\infty)$.

Utilizaremos a próxima estimativa na seção (4.4), onde tomaremos o limite nas soluções aproximadas.

ESTIMATIVA II:

Sabemos que, para todo $j = 1, \cdots, m$, vale

$$
\begin{aligned}
&(u_m''(t), w_j) + \alpha(t)\Big[((u_m(t), w_j)) - (\delta_m'(t), w_j)_{\Gamma_1} + (\eta(u_m'(t)), w_j)_{\Gamma_1}\Big] \\
&+\lambda\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_j\, dx = 0
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

e

$$
(u_m'(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_1\delta_m''(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_2\delta_m'(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_3\delta_m(t), z_j)_{\Gamma_1} = 0. \tag{4.24}
$$

Derivando (4.23) e (4.24) em relação a t, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&(u_m'''(t), w_j) + \alpha'(t)\Big[((u_m(t), w_j)) - (\delta_m'(t), w_j)_{\Gamma_1} + (\eta(u_m'(t)), w_j)_{\Gamma_1}\Big] \\
&+\alpha(t)\Big[((u_m'(t), w_j)) - (\delta_m''(t), w_j)_{\Gamma_1} + (\eta'(u_m'(t))u_m''(t), w_j))_{\Gamma_1}\Big] \\
&+\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t) w_j\, dx = 0
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

e

$$
(u_m''(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_1\delta_m'''(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_2\delta_m''(t), z_j)_{\Gamma_1} + (f_3\delta_m'(t), z_j)_{\Gamma_1} = 0. \tag{4.26}
$$

Multiplicando $g_{jm}''(t)$ e $h_{jm}''(t)$ em (4.25) e (4.26), respectivamente, e somando em j de 1 a m, segue que

$$
\begin{aligned}
&(u_m'''(t), u_m''(t)) + \alpha'(t)\Big[((u_m(t), u_m''(t))) - (\delta_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} \\
&+(\eta(u_m'(t)), u_m''(t))_{\Gamma_1}\Big] + \alpha(t)\Big[((u_m'(t), u_m''(t))) - (\delta_m''(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} \\
&+(\eta'(u_m'(t))u_m''(t), u_m''(t))_{\Gamma_1}\Big] + \lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t) u_m''(t)\, dx = 0
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&(u_m''(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} + (f_1\delta_m'''(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} + (f_2\delta_m''(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} \\
&+(f_3\delta_m'(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Como

$$
(u_m'''(t), u_m''(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_m''(t), u_m''(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m''(t)|^2, \tag{4.29}
$$

$$
((u_m'(t), u_m''(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}((u_m'(t), u_m'(t))) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2, \tag{4.30}
$$

$$
(f_1\delta_m''', \delta_m'')_{\Gamma_1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'', f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'')_{\Gamma_1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m''(t)|^2_{\Gamma_1}, \tag{4.31}
$$

$$
(f_3\delta_m'(t), \delta_m''(t))_{\Gamma_1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t), f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t))_{\Gamma_1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}, \tag{4.32}
$$

então substituindo (4.29)-(4.32) em (4.27) e (4.28), resulta que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2+\alpha'(t)\Big[((u_m(t),u''_m(t)))-(\delta'_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+(\eta(u'_m(t)),u''_m(t)))_{\Gamma_1}\Big]\\
&+\frac{\alpha(t)}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2-\alpha(t)(\delta''_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+\alpha(t)(\eta'(u'_m(t))u''_m(t),u''_m(t)))_{\Gamma_1}\\
&+\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t)u''_m(t)dx=0
\end{aligned}
$$

e

$$
(u''_m(t),\delta''_m(t))_{\Gamma_1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_2^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}=0.
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\alpha(t)\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2&=\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\|u'_m(t)\|^2\Big)-\alpha'(t)\|u'_m(t)\|^2;\\
\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}&=\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1};\\
\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}&=\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned}
$$

Logo, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2+2\alpha'(t)\Big[((u_m(t),u''_m(t)))-(\delta'_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+(\eta(u'_m(t)),u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big]\\
&+\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\|u'_m(t)\|^2\Big)-\alpha'(t)\|u'_m(t)\|^2-2\alpha(t)(\delta''_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1} \qquad (4.33)\\
&+2\alpha(t)(\eta'(u'_m(t))u''_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t)u''_m(t)dx=0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&2\alpha(t)(u''_m(t),\delta''_m(t))_{\Gamma_1}+\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} \qquad (4.34)\\
&+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}=0.
\end{aligned}
$$

Somando (4.33) e (4.34), temos

$$
\begin{aligned}
&F'_m(t)+2\alpha'(t)\Big[((u_m(t),u''_m(t)))-(\delta'_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+(\eta(u'_m(t)),u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big]\\
&-\alpha'(t)\|u'_m(t)\|^2-2\alpha(t)(\delta''_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+2\alpha(t)(\eta'(u'_m(t))u''_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}\\
&+2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t)u''_m(t)dx+2\alpha(t)(u''_m(t),\delta''_m(t))_{\Gamma_1}-\alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}\\
&+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}-\alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}=0,
\end{aligned}
$$

onde

$$
F_m(t)=|u''_m(t)|^2+\alpha(t)\Big[\|u'_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big], \qquad (4.35)
$$

isto é,

$$F'_m(t)+2\alpha'(t)\Big[((u_m(t),u''_m(t)))-(\delta'_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+(\eta(u'_m(t)),u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big]$$
$$+2\alpha(t)(\eta'(u'_m(t))u''_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t)u''_m(t)dx$$
$$+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}=\alpha'(t)\Big[\|u'_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big].$$

Como

$$2\alpha(t)(\eta'(u'_m(t))u''_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}\geqslant 2\alpha_0\eta_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1}$$

então,

$$\begin{aligned}F'_m(t)+2\alpha_0\eta_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1} &\leqslant F'_m(t)+2\alpha(t)(\eta'(u'_m(t))u''_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}\\ &= \alpha'(t)\Big[\|u'_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big] \qquad (4.36)\\ &\quad -2\alpha'(t)\Big[((u_m,u''_m))-(\delta'_m,u''_m)_{\Gamma_1}+(\eta(u'_m),u''_m)_{\Gamma_1}\Big]\\ &\quad -2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t)u''_m(t)dx.\end{aligned}$$

Agora multiplicando $g''_{jm}(t)$ em (4.23) e somando em j de 1 a m, temos

$$\begin{aligned}&(u''_m(t),u''_m(t))+\alpha(t)\Big[((u_m(t),u''_m(t)))-(\delta'_m,u''_m)_{\Gamma_1} \qquad (4.37)\\ &+(\eta(u'_m(t)),u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big]+\lambda\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u''_m(t)dx=0.\end{aligned}$$

Multiplicando (4.37) por $\dfrac{-2\alpha'(t)}{\alpha(t)}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{2\alpha'(t)}{\alpha(t)}|u''_m(t)|^2+\frac{2\lambda\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u''_m(t)dx \qquad (4.38)\\ &= -2\alpha'(t)\Big[((u_m(t),u''_m(t)))-(\delta'_m(t),u''_m(t))_{\Gamma_1}+(\eta(u'_m(t)),u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big].\end{aligned}$$

Substituindo (4.38) em (4.36), segue que

$$\begin{aligned}F'_m(t)+2\alpha_0\eta_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1} &\leqslant \alpha'(t)\Big[\|u'_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big]\\ &\quad +\frac{2\alpha'(t)}{\alpha(t)}|u''_m(t)|^2+\frac{2\lambda\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u''_m(t)dx\\ &\quad -2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t)u''_m(t)dx.\end{aligned}$$

Usando o fato de $\alpha(t)\geqslant\alpha_0$ e a definição de $F_m(t)$, obtemos que

$$\frac{2\alpha'(t)}{\alpha(t)}|u''_m(t)|^2+\alpha'(t)\Big[\|u'_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big]\leqslant\frac{3|\alpha'(t)|}{\alpha_0}F_m(t). \qquad (4.39)$$

Analisaremos agora a integral $\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u'_m(t)||u''_m(t)|dx$:

(i) Se $n = 1$ e $0 < \rho < \infty$, então $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Assim, pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u'_m(t)||u''_m(t)|dx &\leqslant \big(\sup_{x\in\Omega} |u_m(t)|\big)^\rho \int_\Omega |u'_m(t)||u''_m(t)|dx \\
&\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho |u'_m(t)||u''_m(t)| \\
&\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho \|u'_m(t)\||u''_m(t)|.
\end{aligned}$$

(ii) Se $n = 2$ e $\frac{1}{2} \leqslant \rho < \infty$, então $2 \leqslant 4\rho < \infty$. Assim, $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{4\rho}(\Omega)$ e $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Daí, usando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u'_m(t)||u''_m(t)|dx &\leqslant \Big(\int_\Omega |u_m(t)|^{2\rho}|u'_m(t)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |u''_m(t)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big(\int_\Omega |u_m(t)|^{4\rho} dx\Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\int_\Omega |u'_m(t)|^4 dx\Big)^{\frac{1}{4}} |u''_m(t)| \\
&= \Big[\Big(\int_\Omega |u_m(t)|^{4\rho} dx\Big)^{\frac{1}{4\rho}}\Big]^\rho |u'_m(t)|_{L^4(\Omega)} |u''_m(t)| \\
&= |u_m(t)|_{L^{4\rho}(\Omega)} |u'_m(t)|_{L^4(\Omega)} |u''_m(t)| \\
&\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho \|u'_m(t)\||u''_m(t)|.
\end{aligned}$$

(iii) Se $n \geqslant 3$ e $\frac{1}{n} \leqslant \rho \leqslant \frac{2}{n-2}$, então $1 \leqslant n\rho \leqslant \frac{2n}{n-2}$. Logo, $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}} \hookrightarrow L^{n\rho}(\Omega)$. Sendo $\frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1$ e usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u'_m(t)||u''_m(t)|dx &\leqslant \Big(\int_\Omega |u_m(t)|^{2\rho}|u'_m(t)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega |u''_m(t)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big[\Big(\int_\Omega |u_m(t)|^{n\rho} dx\Big)^{\frac{2}{n}} \Big(\int_\Omega |u'_m(t)|^{\frac{2n}{n-2}} dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}\Big]^{\frac{1}{2}} |u''_m(t)| \\
&= \Big[\Big(\int_\Omega |u_m(t)|^{n\rho} dx\Big)^{\frac{1}{n\rho}}\Big]^\rho \Big(\int_\Omega |u'_m(t)|^{\frac{2n}{n-2}} dx\Big)^{\frac{n-2}{2n}} |u''_m(t)| \\
&= |u_m(t)|^\rho_{L^{n\rho}(\Omega)} |u'_m(t)|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)} |u''_m(t)| \\
&\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho \|u'_m(t)\||u''_m(t)|.
\end{aligned}$$

Portanto, em todos os casos temos

$$\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u'_m(t)||u''_m(t)|dx \leqslant C\|u_m(t)\|^\rho \|u'_m(t)\||u''_m(t)|.$$

Daí,

$$-C\|u_m(t)\|^\rho \|u'_m(t)\||u''_m(t)| \leqslant \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t) u''_m(t) dx. \tag{4.40}$$

Multiplicando (4.40) por $-2\lambda(\rho+1)$ e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} -2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t)u_m''(t)dx &\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho\|u_m'(t)\||u_m''(t)| \\ &\leqslant C\Big[\|u_m'(t)\|^2+|u_m''(t)|^2\Big]\leqslant CF_m(t). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Notemos que nos cálculos acima e no que segue, C denota várias constantes positivas. Analogamente mostramos que

$$\frac{2\lambda\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u_m''(t)dx \leqslant CF_m(t). \tag{4.42}$$

De (4.39), (4.41) e (4.42), resulta que

$$\begin{aligned} F_m'(t)\leqslant F_m'(t)+2\alpha_0\eta_0|u_m''(t)|^2_{\Gamma_1} &\leqslant \frac{3|\alpha'(t)|}{\alpha_0}F_m(t)+CF_m(t). \\ &= \Big(\frac{3|\alpha'(t)|}{\alpha_0}+C\Big)F_m(t). \end{aligned} \tag{4.43}$$

De (4.35), temos

$$F_m(0)=|u_m''(0)|^2+\alpha(0)\Big[\|u_m'(0)\|^2+|f_1^{\frac12}\delta_m''(0)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac12}\delta_m'(0)|^2_{\Gamma_1}\Big].$$

Mostraremos que $F_m(0)$ é limitada.

- Como u_m é solução do problema aproximado, então podemos escrever

$$(u_m''(0),u_m''(0))-\alpha(0)(\Delta u_m(0),u_m''(0))+(|u_m(0)|^\rho|u_m(0)|,u_m''(0))=0.$$

Consequentemente, por Cauchy-Schwarz,

$$|u_m''(0)|\leqslant \alpha(0)|\Delta u_m(0)|+\Big||u_m(0)|^\rho|u_m(0)|\Big|.$$

Como $u_m(0)\to u_0$ em $V\cap H_\Delta(\Omega)$, resulta que, $\|u_m(0)-u_0\|_{V\cap H_\Delta(\Omega)}\to 0$. Das imersões $V\cap H_\Delta(\Omega)\hookrightarrow V\hookrightarrow H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, resulta que, $\|u_m(0)-u_0\|\to 0$ e $|u_m(0)-u_0|\to 0$. Como $\|u_m-u\|_{V\cap H_\Delta(\Omega)}\to 0$, obtemos que

$$\|u_m(0)-u_0\|_{H_\Delta(\Omega)}\to 0.$$

Por outro lado, temos

$$|\Delta u_m(0)-\Delta u_0|^2=\|u_m(0)-u_0\|^2_{H_\Delta(\Omega)}-|u_m(0)-u_0|^2,$$

que implica em $|\Delta u_m(0)-\Delta u_0|\to 0$, se $m\to\infty$. Isso prova que $(\Delta u_m(0))$ é limitada, e da continuidade da função $\psi(s)=|s|^\rho s$, a sequência $(|u_m(0)|^\rho u_m(0))$ também é limitada.

Portanto, existe uma constante independente de m tal que $|u''_m(0)| \leqslant C$.

- Da convergência $u'_m(0) \to u_1$ em V, resulta que a sequência $u'_m(0)$ é limitada em V.
- Tomando em (4.24), $z_j = \delta''_m(t)$ e $t = 0$, segue que

$$|(f_1\delta''_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}| \leqslant |(u'_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}| + |(f_2\delta'_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}| + |(f_3\delta_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}|.$$

Lembrando que $\bar{f}_1 = \min_{x\in\Gamma_1} f(x)$ e usando Cauchy-Schwarz, temos

$$\bar{f}_1|\delta''(0)|^2_{\Gamma_1} \leqslant |u'_m(0)|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} + |f_2\delta'_m(0)|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} + |f_3\delta_m(0)|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1}$$

Da Estimativa I, segue as limitações das sequências $(u'_m(0))$ e $(\delta'_m(0))$ e da convergência $\delta_m(0) \to \delta_0$ em $L^2(\Gamma_1)$, segue a limitação de $\delta_m(0)$. Assim, existe uma constante C, que não depende de m, tal que $|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} \leqslant \dfrac{C}{\bar{f}_1}$.

- Como já vimos da Estimativa I, a sequência $\delta'_m(0)$ é limitada.

Portanto, concluímos que $F_m(0)$ é limitada.

Integrando (4.43) de 0 a t, $t \in (0,T)$, obtemos

$$F_m(t) \leqslant F_m(0) + \int_0^t \Big(C + \frac{3|\alpha'(s)|}{\alpha_0}\Big)F_m(s)ds.$$

Daí, e pela desigualdade de Gronwall, obtemos:

$$F_m(t) \leqslant F_m(0)e^{\int_0^t C + \frac{3|\alpha'(s)|}{\alpha_0}ds}, \ t \in (0,T).$$

Logo, $F_m(t)$ é limitada. Notemos ainda que,

$$\begin{aligned} 2\alpha_0\eta_0\int_0^t |u''_m(s)|^2_{\Gamma_1}ds &\leqslant -F_m(t) + F_m(0) + \int_0^t CF_m(s)ds \\ &\leqslant \Big| - F_m(t) + F_m(0) + \int_0^t CF_m(s)ds\Big| \\ &\leqslant |F_m(t)| + |F_m(0)| + \int_0^t C|F_m(s)|ds \\ &\leqslant C. \end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante positiva C que não depende de t e nem de m tal que

$$F_m(t) + 2\alpha_0\eta_0\int_0^t |u''_m(s)|^2_{\Gamma_1}ds \leqslant C.$$

Antes de passarmos para a próxima seção, vejamos duas limitações necessárias, que serão garantidas pelas afirmações:

Afirmação 1: $\big(|u_m|^\rho u_m\big)$ possui uma subsequência limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Prova: Das Estimativas I e II, podemos concluir que (u_m) é limitada em $L^2(0,T;V)$ e (u'_m) é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Como $L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ então, pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência (u_μ) de (u_m) que é convergente em $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(\Omega \times (0,T))$, isto é, existe $u^* \in L^2(\Omega \times (0,T))$ tal que

$$\|u_\mu - u^*\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \to 0, \text{ quando } \mu \to \infty.$$

Daí, pelo Teorema (5), resulta que

$$u_\mu \to u^* \text{ forte q.s. em } \Omega \times (0,T).$$

Da continuidade da função $\psi(s) = |s|^\rho s$, segue que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \to |u^*|^\rho u^* \text{ forte q.s. em } \Omega \times (0,T).$$

Consequentemente, temos que existe uma constante C tal que

$$\big||u_\mu|^\rho u_\mu\big| \leqslant C \text{ q.s. em } \Omega \times (0,T). \tag{4.44}$$

Portanto, de (4.44), podemos concluir que $(|u_\mu|^\rho u_\mu)$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, como queríamos demonstrar.

Afirmação 2: (u_m) possui uma subsequência limitada em $V \cap H_\Delta(\Omega)$.

Prova: De (4.44), existe uma subsequência $(|u_\mu|^\rho u_\mu)$ de $(|u_m|^\rho u_m)$ limitada em $L^2(\Omega)$. Agora, notemos que

$$\begin{aligned} \|u_\mu\|^2_{V\cap H_\Delta(\Omega)} &= \Big(\|u_\mu\| + \|u_\mu\|_{H_\Delta(\Omega)}\Big)^2 \\ &\leqslant 2\Big(\|u_\mu\|^2 + \|u_\mu\|^2_{H_\Delta(\Omega)}\Big) \\ &= 2\Big(\|u_\mu\|^2 + |u_\mu|^2 + |\Delta u_\mu|^2\Big). \end{aligned}$$

Da Estimativa I, (u_μ) é limitada em V e da imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, resulta que (u_μ) é limitada em $L^2(\Omega)$. Como u_μ é solução aproximada, então

$$\alpha_0|\Delta u_\mu| \leqslant \alpha(t)|\Delta u_\mu| = |-u''_\mu - |u_\mu|^\rho u_\mu| \leqslant |u''_\mu| + \big||u_\mu|^\rho u_\mu\big|. \tag{4.45}$$

Vimos na Estimativa II que (u''_μ) é limitada em $L^2(\Omega)$. Daí, e de (4.45), resulta que (Δu_μ) é limitada em $L^2(\Omega)$. Isso prova a Afirmação 2.

4.4 Passagem ao Limite nas Soluções Aproximadas

Usando as Estimativas I e II e as Afirmações 1 e 2, obtemos

$$(u_\mu) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V\cap H_\Delta(\Omega)) \equiv \big(L^1(0,T;(V\cap H_\Delta(\Omega))')\big)'; \quad (4.46)$$

$$(u'_\mu) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V) \equiv \big(L^1(0,T;V')\big)'; \quad (4.47)$$

$$(u''_\mu) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \quad (4.48)$$

$$(\gamma_0(u'_\mu)) \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)); \quad (4.49)$$

$$(\delta_m),(\delta'_m),(\delta''_m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \equiv \big(L^1(0,T;L^2(\Gamma_1))\big)'; \quad (4.50)$$

$$(|u_\mu|^\rho u_\mu) \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad (4.51)$$

onde (u_μ) é uma subsequência de (u_m).

Pelo corolário 1 e o teorema 3, de (4.46)-(4.51) segue que existem subsequências de (u_μ), que por simplicidade ainda denotaremos por (u_μ), e (δ_μ) de (δ_m), tais que

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;V\cap H_\Delta(\Omega)); \quad (4.52)$$

$$u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{u} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;V); \quad (4.53)$$

$$u''_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \widehat{u} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \quad (4.54)$$

$$\gamma_0(u'_\mu) \rightharpoonup \gamma_0(\widetilde{v}) \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)); \quad (4.55)$$

$$\delta_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \delta \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)); \quad (4.56)$$

$$\delta'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{\delta} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)); \quad (4.57)$$

$$\delta''_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \widehat{\delta} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)); \quad (4.58)$$

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup \chi \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (4.59)$$

Pela cadeia de imersões

$$L^\infty(0,T;V\cap H_\Delta(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(\Omega\times(0,T)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),$$

temos que $u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T))$ e $u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \widetilde{u}$ em $\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T))$. Além disso, temos:

$$\langle u'_\mu, \varphi\rangle = -\langle u_\mu, \varphi'\rangle \to -\langle u, \varphi'\rangle = \langle u', \varphi\rangle, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),$$

ou seja, $u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T))$. Da unicidade do limite fraco estrela, segue que $\widetilde{u} = u'$. De modo similar provamos que $\widehat{u} = u''$. Analogamente usando a cadeia de imersões

$$L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \equiv L^2(\Gamma_1 \times (0,T)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Gamma_1 \times (0,T)),$$

provamos que $\widetilde{\delta} = \delta'$, $\widehat{\delta} = \delta''$ e $\gamma_0(\widetilde{\nu}) = \gamma_0(u')$.

Notemos ainda que

$$V \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Da Estimativa I temos que (u_μ) é limitada em V e (u'_μ) é limitada em $L^2(\Omega)$. Logo (u_μ) é limitada em $L^2(0,T;V)$ e (u'_μ) é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Então, pelo Lema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de (u_μ), que ainda denotaremos por (u_μ), tal que

$$u_\mu \to u \ \text{ fortemente em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Daí, e da continuidade da função $\psi(s) = |s|^\rho s$, existe uma subsequência de (u_μ), que ainda continuaremos denotado por (u_μ), tal que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \to |u|^\rho u \ \text{ q.s. em } \ \Omega \times (0,T).$$

Como $|u_\mu|^\rho u_\mu, |u|^\rho u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(\Omega \times (0,T))$ e $(|u_\mu|^\rho u_\mu)$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, então pelo Lema de Lions, temos

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup |u|^\rho u \ \text{ em } \ L^2(\Omega \times (0,T)).$$

Portanto, da unicidade do limite fraco, segue que $\chi = |u|^\rho u$.

Seja $j \in \mathbb{N}$ e $\mu \in \mathbb{N}$, com $\mu \geqslant j$ e consideremos $\theta(t) \in \mathcal{D}(0,T)$. Multiplicando o problema aproximado por $\theta(t)$ e integrando em $[0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u''_\mu, w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \alpha(t)((u_\mu, w_j))\theta(t)dt - \int_0^T \alpha(t)(\delta'_\mu, w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (\eta(u'_\mu), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt + \lambda\int_\Omega |u_\mu|^\rho u_\mu w_j\theta(t)dxdt = 0, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u'_\mu, w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \alpha(t)((u_\mu, w_j))\theta(t)dt - \int_0^T \alpha(t)(\delta'_\mu, w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (\eta(u'_\mu, w_j))_{\Gamma_1}\theta(t)dt + \lambda\int_\Omega |u_\mu|^\rho u_\mu w_j\theta(t)dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u'_\mu, z_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt + \int_0^T (f_1\delta''_\mu, z_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt + \int_0^T (f_2\delta'_\mu, z_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (f_3\delta_\mu, z_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt = 0. \end{aligned} \tag{4.61}$$

De (4.52)-(4.59), temos

$$\int_0^T \langle u_\mu, \phi_1\rangle dt \to \int_0^T \langle u, \phi_1\rangle dt, \forall\ \phi_1 \in L^1(0,T;(V\cap H_\Delta(\Omega))'),$$

$$\int_0^T \langle u'_\mu, \phi_2\rangle dt \to \int_0^T \langle u', \phi_2\rangle dt, \forall\ \phi_2 \in L^1(0,T;V'),$$

$$\int_0^T (\delta_\mu, \zeta_1)_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (\delta, \zeta_1)_{\Gamma_1} dt, \forall\ \zeta_1 \in L^1(0,T;L^2(\Gamma_1)),$$

$$\int_0^T (\delta'_\mu, \zeta_2)_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (\delta', \zeta_2)_{\Gamma_1} dt, \forall\ \zeta_2 \in L^1(0,T;L^2(\Gamma_1)),$$

$$\int_0^T (\delta''_\mu, \zeta_3)_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (\delta'', \zeta_3)_{\Gamma_1} dt, \forall\ \zeta_3 \in L^1(0,T;L^2(\Gamma_1)),$$

$$\int_0^T\int_\Omega |u_\mu(x,t)|^\rho u_\mu(x,t)\beta(x,t)dxdt \to \int_0^T\int_\Omega |u(x,t)|^\rho u(x,t)\beta(x,t)dxdt,$$

$\forall\ \beta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Tomando, em particular,

$$\phi_1 = -\Delta w_j\alpha(t)\theta(t),\ \ \phi_2 = w_j\theta'(t),\ \ \zeta_1 = f_1 z_j\theta(t),$$
$$\zeta_2 = f_2 z_j\theta(t),\ \ \zeta_3 = f_3 z_j\theta(t),\ \ \beta = w_j\theta(t),$$

obtemos,

$$\int_0^T \langle u_\mu, -\Delta w_j\rangle \alpha(t)\theta(t)dt \to \int_0^T \langle u, -\Delta w_j\rangle \alpha(t)\theta(t)dt,$$

isto é,

$$\int_0^T\int_\Omega u_\mu(-\Delta w_j)\alpha(t)\theta(t)dxdt \to \int_0^T\int_\Omega u(-\Delta w_j)\alpha(t)\theta(t)dxdt.$$

Pela Fórmula de Green,

$$\int_0^T \Big(\int_\Omega \nabla u_\mu\cdot\nabla w_j dx - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial w_j}{\partial\nu}u_\mu d\Gamma\Big)\alpha(t)\theta(t)dt \to$$
$$\int_0^T \Big(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w_j dx - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial w_j}{\partial\nu}u d\Gamma\Big)\alpha(t)\theta(t)dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T ((u_\mu, w_j))\alpha(t)\theta(t)dt - \int_0^T (u_\mu, \frac{\partial w_j}{\partial\nu})_{\Gamma_1}\alpha(t)\theta(t)dt \to$$
$$\int_0^T ((u, w_j))\alpha(t)\theta(t)dt - \int_0^T (u, \frac{\partial w_j}{\partial\nu})_{\Gamma_1}\alpha(t)\theta(t)dt.$$

Como $u'_\mu \rightharpoonup u'$ em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, então

$$\int_0^T (u_\mu, \frac{\partial w_j}{\partial \nu})_{\Gamma_1} \alpha(t)\theta(t)dt \to \int_0^T (u, \frac{\partial w_j}{\partial \nu})_{\Gamma_1} \alpha(t)\theta(t)dt.$$

Logo,

$$\int_0^T ((u_\mu, w_j))\alpha(t)\theta(t)dt \to \int_0^T ((u, w_j))\alpha(t)\theta(t)dt. \tag{4.62}$$

Temos ainda que,

$$\int_0^T (u'_\mu, w_j)\theta(t)dt \to \int_0^T (u', w_j)\theta(t)dt, \tag{4.63}$$

$$\int_0^T \int_\Omega |u_\mu(x,t)|^\rho u_\mu(x,t) w_j \theta(t)dxdt \to \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^\rho u(x,t) w_j \theta(t)dxdt, \tag{4.64}$$

e

$$\int_0^T \alpha(t)(\delta'_\mu, w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt \to \int_0^T \alpha(t)(\delta', w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt. \tag{4.65}$$

Agora analisaremos o termo $\int_0^T (\eta(u'_\mu), w_j)_{\Gamma_1}\alpha(t)\theta(t)dt$. Sendo η contínua em $\Gamma_1 \times \mathbb{R}$ e (u'_μ) limitada em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$ então $(\eta(u'_\mu))$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$. Daí,

$$\eta(u'_\mu) \to \eta(u') \text{ q.s. em } \Gamma_1 \times (0,T).$$

Pelo Lema de Lions, temos

$$\eta(u'_\mu) \rightharpoonup \eta(u') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Com isso, segue que

$$\int_0^T (\eta(u'_\mu), w_j)_{\Gamma_1}\alpha(t)\theta(t)dt \to \int_0^T (\eta(u'), w_j)_{\Gamma_1}\alpha(t)\theta(t)dt. \tag{4.66}$$

Assim, de (4.60) e (4.62)-(4.66), obtemos

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u', w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \alpha(t)((u, w_j))\theta(t)dt - \int_0^T \alpha(t)(\delta', w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (\eta(u', w_j))_{\Gamma_1}\theta(t)dt + \lambda \int_\Omega |u|^\rho u\, w_j\, \theta(t)\, dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Como as combinações lineares finitas dos w_j's são densas em $V \cap H_\Delta(\Omega)$ a igualdade em (4.67) permanece válida para toda $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, isto é,

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u', w)\theta'(t)dt + \int_0^T \alpha(t)((u, w))\theta(t)dt - \int_0^T \alpha(t)(\delta', w)_{\Gamma_1}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (\eta(u', w))_{\Gamma_1}\theta(t)dt + \lambda \int_\Omega |u|^\rho u\, w\, \theta(t)\, dxdt = 0, \end{aligned}$$

para toda $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, ou ainda,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u'(t), w), \theta \right\rangle + \left\langle \alpha(t)\Big[((u,w)) - (\delta', w)_{\Gamma_1} + (\eta(u'), w)_{\Gamma_1}\Big], \theta \right\rangle \qquad (4.68)$$
$$+\left\langle \lambda \int_\Omega |u|^\rho u\, w\, dx, \theta \right\rangle = 0,$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, o que nos leva a concluir que

$$\frac{d}{dt}(u'(t), w) + \alpha(t)\Big[((u,w)) - (\delta', w)_{\Gamma_1} + (\eta(u'), w)_{\Gamma_1}\Big] + \lambda \int_\Omega |u|^\rho u w dx = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T).$$

Por outro lado, temos ainda as convergências

$$\int_0^T (u'_\mu, z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt \to \int_0^T (u', z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt, \qquad (4.69)$$

$$\int_0^T (f_1 \delta''_\mu, z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt \to \int_0^T (f_1 \delta'', z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt, \qquad (4.70)$$

$$\int_0^T (f_2 \delta'_\mu, z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt \to \int_0^T (f_2 \delta', z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt, \qquad (4.71)$$

$$\int_0^T (f_3 \delta_\mu, z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt \to \int_0^T (f_3 \delta, z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt. \qquad (4.72)$$

Logo, de (4.61) e (4.69)-(4.72), temos

$$\int_0^T (u', z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt + \int_0^T (f_1 \delta'', z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt + \int_0^T (f_2 \delta', z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt + \int_0^T (f_3 \delta, z_j)_{\Gamma_1} \theta(t) dt = 0.$$

Sendo as combinações lineares finitas dos z_j's densas em $L^2(\Gamma_1)$, então

$$\int_0^T (u', z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt + \int_0^T (f_1 \delta'', z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt + \int_0^T (f_2 \delta', z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt + \int_0^T (f_3 \delta, z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt = 0,$$

para todo $z \in L^2(\Gamma_1)$, ou ainda,

$$\left\langle (u', z)_{\Gamma_1}, \theta \right\rangle + \left\langle (f_1 \delta'', z)_{\Gamma_1}, \theta \right\rangle + \left\langle (f_2 \delta', z)_{\Gamma_1}, \theta \right\rangle + \left\langle (f_3 \delta, z)_{\Gamma_1}, \theta \right\rangle = 0,$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Assim, concluímos que

$$(u', z)_{\Gamma_1} + (f_1 \delta'', z)_{\Gamma_1} + (f_2 \delta', z)_{\Gamma_1} + (f_3 \delta, z)_{\Gamma_1} = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T).$$

Agora voltaremos ao problema na forma pontual em (1.1), verificando o sentido das igualdades. Para $w \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V \cap H_\Delta(\Omega)$, resulta que

$$\int_0^T \big[(u'', w) + \alpha(t)((u,w)) + (\lambda |u|^\rho u, w)\big] \theta(t) dt = 0, \ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Pela Fórmula de Green, obtemos

$$\int_0^T \big[(u'', w) - \alpha(t)(\Delta u, w) + (\lambda |u|^\rho u, w)\big]\theta(t)dt = 0.$$

Assim, usando o Lema de Du Bois Raymond, temos

$$(u'' - \alpha(t)\Delta u + \lambda |u|^\rho u, w) = 0, \ \forall w \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Novamente pelo Lema de Du Bois Raymond, segue que

$$u'' - \alpha(t)\Delta u + \lambda |u|^\rho u = 0 \text{ q.s. em } \Omega \times [0, T). \tag{4.73}$$

Notemos que

$$\Delta u = \frac{1}{\alpha(t)}\big(u'' + \lambda |u|^\rho u\big),$$

que implica em $\Delta u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Analogamente, aplicando duas vezes o Lema de Du Bois Raymond, obtemos

$$u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta = 0 \text{ q.s. sobre } \Gamma_1 \times [0, T),$$

em $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1))$.

Agora, multiplicando (4.73) por $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $\theta(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, e integrando em $\Omega \times [0, T]$, temos

$$\int_0^T (u'', w)\theta(t)dt - \int_0^T \alpha(t)(\Delta u, w)\theta(t)dt + \int_0^T (\lambda |u|^\rho u, w)\theta(t)dt = 0.$$

Pela Fórmula de Green, segue que

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u'', w)\theta(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\big[((u, w)) - (\frac{\partial u}{\partial \nu}, w)_{\Gamma_1}\big]\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (\lambda |u|^\rho u, w)\theta(t)dt = 0.\end{aligned} \tag{4.74}$$

Subtraindo (4.68) e (4.74), obtemos

$$\int_0^T \alpha(t)\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u'), w\Big)_{\Gamma_1}\theta(t)dt, \ \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Aplicando o Lema de Du Bois Raymond, resulta que

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u'), w\Big)_{\Gamma_1} = 0, \ \forall w \in V \cap H_\Delta(\Omega).$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u') = 0 \ \text{ q.s. em } \Gamma_1 \times [0, T).$$

4.5 Verificação das Condições Iniciais

Nesta seção verificaremos as condições iniciais do problema (1.1).

Como $V \cap H_\Delta(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então $u, u', u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e assim, pelo Teorema 13, faz sentido falarmos em $u(0), u(T), u'(0), u'(T)$.

Primeiramente provaremos que $u(0) = u_0$. De fato, seja $\theta \in C^1[0,T]$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Como $u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$, então

$$\int_0^T (u'_\mu(t), w_j)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t)dt.$$

Agora notemos que,

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'_\mu(t), w_j)\theta(t)dt &= (u_\mu, w_j)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u_\mu(t), w_j)\theta'(t)dt \\ &= -(u_\mu(0), w_j) - \int_0^T (u_\mu(t), w_j)\theta'(t)dt.\end{aligned}$$

Assim,

$$-(u_\mu(0), w_j) - \int_0^T (u_\mu(t), w_j)\theta'(t)dt \to -(u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

De $u \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;V \cap H_\Delta(\Omega))$, temos que

$$\int_0^T (u_\mu(t), w_j)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt,$$

o que implica em

$$(u_\mu(0), w_j) \to (u(0), w_j), \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Daí, segue que

$$u_\mu(0) \rightharpoonup u(0) \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Como $u_\mu(0) \to u_0$ em $V \cap H_\Delta(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então $u_\mu(0) \rightharpoonup u_0$ em $L^2(\Omega)$. Pela unicidade do limite fraco, concluímos que $u(0) = u_0$, como queríamos demonstrar.

Agora, provaremos que $u'(0) = u_1$. Considerando θ como anteriomente, podemos escrever

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u''_\mu(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)((u_\mu(t), w_j))dt - \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\delta'_\mu(t), w_j)_{\Gamma_1}dt \\ &+ \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\eta(u'_\mu(t)), w_j)_{\Gamma_1}dt + \lambda\int_0^T\int_\Omega |u_\mu(x,t)|^\rho u_\mu(x,t)w_j\theta(t)dxdt = 0.\end{aligned}$$

Integrando por partes, segue que

$$
\begin{aligned}
&-(u'_\mu(0), w_j) - \int_0^T (u'_\mu(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)((u_\mu(t), w_j))dt \\
&- \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\delta'_\mu(t), w_j)_{\Gamma_1} dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\eta(u'_\mu(t)), w_j)_{\Gamma_1} dt \\
&+\lambda \int_0^T \int_\Omega |u_\mu(x,t)|^\rho u_\mu(x,t) w_j \theta(t) dx dt = 0.
\end{aligned}
$$

Tomando o limite em $\mu \to \infty$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-(u_1, w_j) - \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)((u(t), w_j))dt \\
&- \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\delta'(t), w_j)_{\Gamma_1} dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\eta(u'(t)), w_j)_{\Gamma_1} dt \\
&+\lambda \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^\rho u(x,t)\, w_j\, \theta(t)\, dx dt = 0.
\end{aligned}
$$

Sendo as combinações lineares finitas dos w_j's densas em $V \cap H_\Delta(\Omega)$, então

$$
\begin{aligned}
&-(u_1, w) - \int_0^T (u'(t), w)\theta'(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)((u(t), w))dt \\
&- \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\delta'(t), w)_{\Gamma_1} dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\eta(u'(t)), w)_{\Gamma_1} dt \\
&+\lambda \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^\rho u(x,t)\, w\, \theta(t)\, dx dt = 0,
\end{aligned}
$$

para todo $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$. Integrando por partes o segundo termo resulta que

$$
\begin{aligned}
&-(u_1, w) + (u'(0), w) + \int_0^T (u''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)((u(t), w))dt \\
&- \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\delta'(t), w)_{\Gamma_1} dt + \int_0^T \alpha(t)\theta(t)(\eta(u'(t)), w)_{\Gamma_1} dt \\
&+\lambda \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^\rho u(x,t)\, w\, \theta(t)\, dx dt = 0.
\end{aligned}
$$

Como u é solução fraca, resulta que $-(u_1, w) + (u'(0), w) = 0$, isto é,

$$(u'(0), w) = (u_1, w), \forall\, w \in V \cap H_\Delta(\Omega).$$

Portanto, $u'(0) = u_1$.

Resta mostrarmos que $\delta(0) = \delta_0$ sobre Γ_1. De (4.56) e (4.57), temos que $\delta, \delta' \in L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_1))$. Pelo Teorema 13, segue que $\delta \in C([0,T]; L^2(\Gamma_1))$. Das convergências (4.56) e (4.57) e da imersão $L^\infty(0,T; L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0,T; L^2(\Gamma_1))$, temos que

$$\int_0^T (\delta_\mu(t), \zeta(t))_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (\delta(t), \zeta(t))_{\Gamma_1} dt$$

e

$$\int_0^T (\delta'_\mu(t), \zeta(t))_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (\delta'(t), \zeta(t))_{\Gamma_1} dt,$$

para toda $\zeta \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$. Tomando $\zeta(x,t) = z(x)\theta(t)$, com $z \in L^2(\Gamma_1)$ e $\theta \in C^1[0,T]$, tal que $\theta(T) = 0, \theta(0) = 1$, resulta que

$$\int_0^T (\delta_\mu(t), z)_{\Gamma_1} \theta'(t) dt \to \int_0^T (\delta(t), z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt \tag{4.75}$$

e

$$\int_0^T (\delta'_\mu(t), z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt \to \int_0^T (\delta'(t), z)_{\Gamma_1} \theta(t) dt. \tag{4.76}$$

Somando (4.75) e (4.76), obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(\delta_\mu(t), z)_{\Gamma_1}\theta(t)] dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}[(\delta(t), z)_{\Gamma_1}\theta(t)] dt,$$

que implica em

$$(\delta_\mu(0), z)_{\Gamma_1}\theta(T) - (\delta_\mu(0), z)_{\Gamma_1}\theta(0) \to (\delta(0), z)_{\Gamma_1}\theta(T) - (\delta(0), z)_{\Gamma_1}\theta(0), \ \forall\, z \in L^2(\Gamma_1).$$

Logo,

$$(\delta_\mu(0), z)_{\Gamma_1} \to (\delta(0), z), \ \forall\, z \in L^2(\Gamma_1). \tag{4.77}$$

Por outro lado, como $\delta_\mu(0) \to \delta_0$ forte em $L^2(\Gamma_1)$, então

$$(\delta_\mu(0), z)_{\Gamma_1} \to (\delta_0, z)_{\Gamma_1}, \ \forall\, z \in L^2(\Gamma_1). \tag{4.78}$$

Assim, de (4.77) e (4.78), concluímos que $\delta(0) = \delta_0$.

4.6 Unicidade das Soluções

Nesta seção provaremos a unicidade da solução do problema (1.1) via o Método da Energia. Suponhamos que $\{u, \delta\}$ e $\{\widehat{u}, \widehat{\delta}\}$ sejam soluções do problema (1.1) e consideremos $v = u - \widehat{u}$ e $\varphi = \delta - \widehat{\delta}$. Então, para toda $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $z \in L^2(\Gamma_1)$, temos

$$\left| \begin{array}{l} (v'', w) + \alpha(t)\Big[((v, w)) - (\varphi', w)_{\Gamma_1} + (\eta(u') - \eta(\widehat{u}'), w)_{\Gamma_1}\Big] \\ +\lambda \displaystyle\int_\Omega (|u|^\rho u - |\widehat{u}|^\rho \widehat{u}) w \, dx = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty); \\ (v', z)_{\Gamma_1} + (f_1\varphi'', z)_{\Gamma_1} + (f_2\varphi', z)_{\Gamma_1} + (f_3\varphi, z)_{\Gamma_1} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1; \\ v(x,t) = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_0 \times (0,\infty); \\ v(x,0) = v'(x,0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega; \\ \varphi(x,0) = \varphi'(x,0) = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_1; \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} - \varphi' + \eta(u') - \eta(\widehat{u}') = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_1 \times (0,\infty). \end{array} \right. \tag{4.79}$$

Tomando $w = 2v'$ e $z = 2\varphi'$, em $(4.79)_1$ e $(4.79)_2$, obtemos

$$\begin{aligned} &2(v''(t), v'(t)) + \alpha(t)\Big[2((v(t), v'(t))) - 2(\varphi'(t), v'(t))_{\Gamma_1} + 2(\eta(u'(t)) \\ &-\eta(\widehat{u}'(t)), v'(t))_{\Gamma_1}\Big] + 2\lambda\int_\Omega \big(|u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t)\big)v'(t)dx = 0 \end{aligned} \tag{4.80}$$

e

$$\begin{aligned} &2(v'(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1} + 2(f_1\varphi''(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1} + 2(f_2\varphi'(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1} \\ &+2(f_3\varphi(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Notemos que,

$$\frac{d}{dt}|v'(t)|^2 = 2(v''(t), v'(t)); \tag{4.82}$$
$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 = 2((v'(t), v(t))); \tag{4.83}$$
$$\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} = 2(f_1\varphi''(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1}; \tag{4.84}$$
$$\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} = 2(f_3\varphi'(t), \varphi(t))_{\Gamma_1}. \tag{4.85}$$

Multiplicando (4.81) por $\alpha(t)$ e em seguida somando com (4.80), e levando em conta (4.82)-(4.85), obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}|v'(t)|^2 + \alpha(t)\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 + 2\alpha(t)(\eta(u'(t)) - \eta(\widehat{u}'(t)), v'(t))_{\Gamma_1} \\ &+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\lambda\int_\Omega \big(|u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho\widehat{u}(t)\big)v'(t)dx \\ &+\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + \alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Notemos ainda que

$$\alpha(t)\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\|v(t)\|^2\Big) - \alpha'(t)\|v(t)\|^2; \tag{4.87}$$
$$\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} = \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1}\Big) - \alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1}; \tag{4.88}$$
$$\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1} = \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\Big) - \alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}. \tag{4.89}$$

Substituindo (4.87)-(4.89) em (4.86), segue que

$$\begin{aligned} &H'(t) + 2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\alpha(t)(\eta(u'(t)) - \eta(\widehat{u}(t)), v'(t))_{\Gamma_1} \\ &+2\lambda\int_\Omega (|u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho\widehat{u}(t))v'(t)dx = \alpha'(t)\Big(\|v(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\Big), \end{aligned} \tag{4.90}$$

onde

$$H(t) = |v'(t)|^2 + \alpha(t)\Big(\|v(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\Big).$$

Agora notemos que

$$2\alpha(t)(\eta(u'(t)) - \eta(\widehat{u}'(t)), v'(t))_{\Gamma_1} \geqslant 2\alpha_0\eta_0|v'(t)|^2_{\Gamma_1}, \tag{4.91}$$

pois $[\eta(x,s) - \eta(x,r)](s-r) \geqslant \eta_0(s-r)^2$, $\forall\ x \in \Gamma_1$ e $\forall\ s, r \in \mathbb{R}$ e $\alpha(t) \geqslant \alpha_0$. Seja $\psi(s) = |s|^\rho s$. Então $\psi'(s) = (\rho+1)|s|^\rho$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $s_0 \in (s_1, s_2)$ tal que

$$\psi(s_2) - \psi(s_1) = \psi'(s_0)(s_2 - s_1).$$

Escrevendo $s_0 = s_1 + (s_2 - s_1)\xi_0$, com $\xi_0 \in (0,1)$, e tomando $s_2 = u(t)$ e $s_1 = \widehat{u}(t)$, obtemos

$$|\psi(u(t)) - \psi(\widehat{u}(t))| = |\widehat{u}(t) + (u(t) - \widehat{u}(t))\xi_0|^\rho |u(t) - \widehat{u}(t)|,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \Big||u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t)\Big| &\leqslant (\rho+1)\big[2(|u(t)| + |\widehat{u}(t)|)\big]^\rho |u(t) - \widehat{u}(t)| \\ &= (\rho+1)2^\rho\big(|u(t)| + |\widehat{u}(t)|\big)^\rho |v(t)| \\ &\leqslant (\rho+1)2^{2\rho}\big(|u(t)|^\rho + |\widehat{u}(t)|^\rho\big)|v(t)|. \end{aligned}$$

Daí, resulta que

$$2\lambda\Big|\big(|u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t), v'(t)\big)\Big| \leqslant (\rho+1)\lambda 2^{2\rho+1}\int_\Omega \big(|u(t)|^\rho + |\widehat{u}(t)|^\rho\big)|v(t)||v'(t)|\,dx.$$

Com raciocínio análogo ao da seção 4.3 (Veja pág. 32), garatimos a existência de uma constante C tal que

$$\int_\Omega |u(t)|^\rho |v(t)||v'(t)|dx \leqslant C\|u(t)\|^\rho \|v(t)\||v'(t)|$$

e

$$\int_\Omega |\widehat{u}(t)|^\rho |v(t)||v'(t)|dx \leqslant C\|\widehat{u}(t)\|^\rho \|v(t)\||v'(t)|.$$

Portanto, existe uma constante, que ainda denotamos por C, tal que

$$\begin{aligned} 2\lambda\Big|\big(|u(t)|^\rho u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho \widehat{u}(t), v'(t)\big)\Big| &\leqslant 2C\|v(t)\||v'(t)| \\ &\leqslant C\big[\|v(t)\|^2 + |v'(t)|^2\big]. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Temos ainda que,

$$\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}H(t) = \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}|\nu'(t)|^2 + \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}|\alpha'(t)|\Big(\|\nu(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\Big) \tag{4.93}$$
$$\geqslant |\alpha'(t)|\Big(\|\nu(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\Big),$$

onde usamos novamente a hipótese $\alpha(t) \geqslant \alpha_0 > 0$. Assim, de (4.90)-(4.93), obtemos

$$H'(t) + 2\alpha_0|f_2^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\alpha_0\eta_0|\nu'(t)|^2_{\Gamma_1} - C(\|\nu(t)\|^2 + |\nu'(t)|^2) \leqslant \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}H(t).$$

Daí,

$$\begin{aligned} H'(t) &\leqslant C(\|\nu(t)\|^2 + |\nu'(t)|^2) + \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}H(t) \\ &\leqslant C|\nu'(t)|^2 + C\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\|\nu(t)\|^2 + \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}H(t) \\ &\leqslant C|\nu'(t)|^2 + C\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\|\nu(t)\|^2 + \alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma} + \alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma} + \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}H(t) \\ &\leqslant \Big(d + \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}\Big)H(t), \end{aligned}$$

onde $d = \max\Big\{1, C, \dfrac{C}{\alpha_0}\Big\}$. Pondo, $R(t) = d + \dfrac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}$, então $H'(t) \leqslant R(t)H(t)$, que implica em

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{\int_0^t R(s)ds}H(t)\Big) = e^{\int_0^t R(s)ds}H'(t) - R(t)e^{\int_0^t R(s)ds}H(t) \leqslant 0. \tag{4.94}$$

Integrando (4.94) de 0 a t e usando o fato de $H(0) = 0$, temos que $H(t) = 0$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. Portanto, $\nu = \varphi = 0$, ou seja, $u = \widehat{u}$ e $\delta = \widehat{\delta}$, provando a unicidade das soluções. ■

Capítulo 5

Comportamento Assintótico

Neste capítulo provaremos que a energia total

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big\{|u'(t)|^2 + \Big(\frac{2\lambda}{\rho+2}\Big)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \alpha(t)\Big(\|u(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)\Big\}$$

associada ao sistema (1.1), decai assintoticamente quando $t \to \infty$.

5.1 Hipóteses Adicionais

Inicialmente vamos supor que:

$$f_i \in C(\Gamma_1), \; f_i(x) > 0 \;\; \forall\, x \in \Gamma_1 \;\text{ e }\; i = 1,2,3. \tag{5.1}$$

Assumiremos também que Γ_0 e Γ_1 são fechados, conexos e disjuntos e satisfazem

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma;\; m(x)\cdot\nu(x) \leqslant 0\} \;\text{ e }\; \Gamma_1 = \{x \in \Gamma;\; m(x)\cdot\nu(x) > 0\},$$

onde $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada por $m(x) = x - x_0$, com $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, porém fixo, e $\nu(x)$ é o vetor unitário normal no ponto x. Notemos que, da continuidade da função $m(x)\cdot\nu(x)$, existe ζ tal que

$$0 < \zeta = \min_{x\in\Gamma_1}\{m(x)\cdot\nu(x)\}.$$

Aqui consideraremos

$$\eta(x,s) = [m(x)\cdot\nu(x)]\eta_1(s) \;\forall\, x \in \Gamma_1, \tag{5.2}$$

onde η_1 é uma função real contínua satisfazendo

$$\text{(i) } [\eta_1(s) - \eta_1(r)](s-r) \geqslant \overline{\eta}_1(s-r)^2 \;\forall\, s,r \in \mathbb{R} \text{ e } \overline{\eta}_1 > 0; \tag{5.3}$$

$$\text{(ii) } |\eta_1(s)| \leqslant \widehat{\eta}_1|s| \;\forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Admitiremos que existem constantes $\varepsilon > 0$ e $\kappa_1 > 0$, a serem escolhidas posteriormente, tais que

$$|\alpha'(t)| \leqslant \alpha_0\varepsilon, \ \forall \ t \geqslant 0 \ \text{ e } \ 0 < \lambda \leqslant \frac{11}{8\kappa_1}. \tag{5.5}$$

Finalmente, admitiremos também que exista uma constante α_1 tal que

$$0 < \alpha_0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \alpha_1 \text{ q.s. em } [0, \infty). \tag{5.6}$$

5.2 Comportamento Assintótico

Sendo $\{u, \delta\}$ a solução do problema (1.1), então

$$u'' - \alpha(t)\Delta u + \lambda|u|^{\rho}u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0, \infty); \tag{5.7}$$

$$u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta = 0 \text{ sobre } \ \Gamma_1 \times (0, \infty); \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u') = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_1 \times (0, \infty). \tag{5.9}$$

Multiplicando (5.7) por u', integrando em Ω, usando a Fórmula de Green e (5.9), temos

$$\begin{aligned}&(u''(t), u'(t)) + \alpha(t)\Big[((u'(t), u(t))) - (\delta'(t), u'(t))_{\Gamma_1} + (\eta(u'(t)), u'(t))_{\Gamma_1}\Big] \\ &+\lambda\int_{\Omega} |u(t)|^{\rho}u(t)u'(t)dx = 0.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora multiplicando (5.8) por $\alpha(t)\delta'$ e integrando em Γ_1, obtemos

$$\begin{aligned}&\alpha(t)(u'(t), \delta'(t))_{\Gamma_1} + \alpha(t)(f_1\delta''(t), \delta'(t))_{\Gamma_1} + \alpha(t)(f_2\delta'(t), \delta'(t))_{\Gamma_1} \\ &+\alpha(t)(f_3\delta(t), \delta'(t))_{\Gamma_1} = 0.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Notemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2 = (u''(t), u'(t)) \tag{5.12}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = ((u'(t), u(t))) \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho}u(t)u'(t)dx \tag{5.14}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} = (f_1\delta''(t), \delta'(t))_{\Gamma_1} \tag{5.15}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} = (f_3\delta(t), \delta'(t))_{\Gamma_1}. \tag{5.16}$$

Substituindo (5.12)-(5.16) em (5.10) e (5.11) e somando o resultados, resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2+\frac{\alpha(t)}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+\alpha(t)(\eta(u'(t)),u'(t))_{\Gamma_1}+\frac{\lambda}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}$$
$$+\frac{\alpha(t)}{2}\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{2}\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}=0.$$

Sendo

$$\begin{aligned}
\alpha(t)\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\|u(t)\|^2\Big)-\alpha'(t)\|u(t)\|^2\\
\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\\
\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1},
\end{aligned}$$

então podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left[|u'(t)|^2+\left(\frac{2\lambda}{\rho+2}\right)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\alpha(t)\Big(\|u(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)\right]\right\}$$
$$+\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\alpha(t)(\eta(u'),u'(t))_{\Gamma_1}=\frac{\alpha'(t)}{2}\Big[\|u(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&E'(t)+\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\alpha(t)(\eta(u'),u'(t))_{\Gamma_1}\\
\leqslant\ &\frac{|\alpha'(t)|}{2}\Big[\|u(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big].
\end{aligned}\tag{5.17}$$

Pondo $\overline{f}_i=\min\limits_{x\in\Gamma_1}f_i(x)>0$ e $\widehat{f}_i=\max\limits_{x\in\Gamma_1}f_i(x)>0$, então

$$0<\overline{f}_i\leqslant f_i\leqslant\widehat{f}_i,$$

que implica em

$$1\leqslant\frac{f_i}{\overline{f}_i}\leqslant\frac{\widehat{f}_i}{\overline{f}_i}\quad\text{e}\quad\frac{\overline{f}_i}{\widehat{f}_i}\leqslant\frac{f_i}{\widehat{f}_i}\leqslant1\ \text{ para }\ i=1,2,3.$$

Daí,

$$\frac{f_1}{\widehat{f}_1}\leqslant1\leqslant\frac{f_2}{\overline{f}_2},\ \text{ou ainda,}\ \frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1}f_1\leqslant f_2.$$

Assim,

$$\frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1}\int_{\Gamma_1}f_1(\delta')^2d\Gamma\leqslant\int_{\Gamma_1}f_2(\delta')^2d\Gamma,$$

ou seja,

$$\frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\leqslant|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}.\tag{5.18}$$

De $[\eta_1(s)-\eta_1(r)](s-r) \geqslant \overline{\eta}_1(s-r)^2,\ \forall\ s,r \in \mathbb{R}$, resulta que

$$\eta_1(u')u' \geqslant \overline{\eta}_1(u')^2, \text{ ou ainda, } (m\cdot\nu)\eta_1(u')u' \geqslant (m\cdot\nu)\overline{\eta}_1(u')^2,$$

que integrando em Γ_1, obtemos

$$(\eta(u'),u'(t))_{\Gamma_1} \geqslant \overline{\eta}_1|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}. \tag{5.19}$$

De (5.17), (5.18),(5.19) e notando que $|\alpha'(t)| \leqslant \alpha_0\varepsilon \leqslant \alpha(t)\varepsilon\ \forall\ t \geqslant 0$, segue que

$$\begin{aligned} & E'(t)+\alpha(t)\frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\overline{\eta}_1\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \\ \leqslant\ & \frac{\alpha(t)\varepsilon}{2}\Big(\|u(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Enunciaremos agora o principal resultado deste capítulo, a saber:

Teorema 18. *Assumiremos as hipóteses $(1.2)_1$ e (1.4), associadas ao problema (1.1). Se (5.1)-(5.6) são válidas, então:*

$$E(t) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}E(0)e^{-\frac{\varepsilon\tau}{\varepsilon_2}t}\ \forall\ t \geqslant 0,$$

onde ε, τ, ε_1 e ε_2 são constantes positivas.

Demonstração: Para provarmos este teorema, seguiremos as ideias de Haraux and Zuazua [10] e Komornik and Zuazua [11]. Consideremos $\varepsilon > 0$ dado por

$$\varepsilon := \min\Big\{\frac{\overline{\eta}_1}{\kappa_2}, \frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1\kappa_3}, \frac{1}{4M_2}\Big\},$$

onde κ_2, κ_3 e M_2 são constantes a serem definidas posteriormente. Definamos,

$$E_\varepsilon(t) = E(t)+\varepsilon\mu(t),$$

onde

$$\mu(t) := 2\big(u'(t),(m\cdot\nabla)u(t)\big)+\Big(n-\frac{1}{2}\Big)(u'(t),u(t))+[2\alpha(t)-3\alpha_1](f_1\delta'(t),\delta(t))_{\Gamma_1}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mu'(t) &= 2\big(u''(t),(m\cdot\nabla)u(t)\big)+2\big(u'(t),(m\cdot\nabla)u'(t)\big)+\Big(n-\frac{1}{2}\Big)(u''(t),u(t)) \\ &\quad +\Big(n-\frac{1}{2}\Big)(u'(t),u'(t))+[2\alpha(t)-3\alpha_1](f_1\delta''(t),\delta(t))_{\Gamma_1} \\ &\quad +[2\alpha(t)-3\alpha_1](f_1\delta'(t),\delta'(t))_{\Gamma_1}+2\alpha'(t)(f_1\delta'(t),\delta(t))_{\Gamma_1}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

De (5.7) e (5.8), temos

$$(u''(t), u(t)) = \alpha(t)(\Delta u(t), u(t)) - \lambda(|u(t)|^\rho u(t), u(t)); \tag{5.22}$$

$$\big(u''(t), (m\cdot\nabla)u(t)\big) = \alpha(t)\big(\Delta u(t), (m\cdot\nabla)u(t)\big) - \lambda\big(|u(t)|^\rho u(t), (m\cdot\nabla)u(t)\big); \tag{5.23}$$

$$(f_1\delta''(t), \delta(t))_{\Gamma_1} = -(u'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} - (f_2\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} - (f_3\delta(t), \delta(t))_{\Gamma_1}. \tag{5.24}$$

Substituindo (5.22)-(5.24) em (5.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\mu'(t) &= 2\alpha(t)\big(\Delta u(t), (m\cdot\nabla)u(t)\big) - 2\lambda\big(|u(t)|^\rho u(t), (m\cdot\nabla)u(t)\big)\\
&\quad +2\big(u'(t), (m\cdot\nabla)u'(t)\big) + \big(n-\frac{1}{2}\big)\alpha(t)(\Delta u(t), u(t)) - \lambda\big(n-\frac{1}{2}\big)(|u(t)|^\rho u(t), u(t))\\
&\quad +\big(n-\frac{1}{2}\big)|u'(t)|^2 - [2\alpha(t)-3\alpha_1](u'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} - [2\alpha(t)-3\alpha_1](f_2\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1}\\
&\quad -[2\alpha(t)-3\alpha_1]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} + [2\alpha(t)-3\alpha_1]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\alpha'(t)(f_1\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1}\\
&= I_1 + \cdots + I_{11}.
\end{aligned}$$

Agora analisaremos cada termo do lado direito da derivada acima, de modo que consigamos majorá-los por termos que aparecem na energia $E(t)$:

Etapa 1. $I_1 = 2\alpha(t)\big(\Delta u(t), (m\cdot\nabla)u(t)\big)$.

Pela Identidade de Rellich, temos:

$$2(\Delta v, (m\cdot\nabla)v) = (n-2)|\nabla v|^2 - \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla v|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}(m\cdot\nu)v d\Gamma,$$

para toda $v \in V\cap H^2(\Omega)$. Daí,

$$\begin{aligned}
2\alpha(t)\big(\Delta u, (m\cdot\nabla)u\big) &= -(2-n)\alpha(t)|\nabla u|^2 - \alpha(t)\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma\\
&\quad +2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu}(m\cdot\nabla)u d\Gamma.
\end{aligned}$$

Agora notemos que

$$\begin{aligned}
2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma &\leqslant \Big|2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma\Big|\\
&\leqslant \alpha(t)\int_{\Gamma_1} 2\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big||m||\nabla u|\, d\Gamma\\
&\leqslant \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{2\widehat{m}}{(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}|\nabla u|\, d\Gamma\\
&\leqslant \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{\widehat{m}^2}{(m\cdot\nu)}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma + \alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma,
\end{aligned}$$

onde $\widehat{m} = \max_{x\in\overline{\Omega}}\|m(x)\|_{\mathbb{R}^n}$. Consequentemente, obtemos

$$-\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma + 2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma \leqslant \widehat{m}^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(m\cdot\nu)}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma.$$

Logo,

$$2\alpha(t)\big(\Delta u(t),(m\cdot\nabla)u(t)\big)\leqslant-\alpha(t)(2-n)\|u(t)\|^2+\widehat{m}^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(m\cdot\nu)}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma.$$

De (5.2) e (5.9), temos

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2=|\delta'-\eta(u')|^2 &\leqslant (|\delta'|+|\eta(u')|)^2\\ &\leqslant 2(|\delta'|^2+|\eta(u')|^2)\\ &= 2|\delta'|^2+2|(m\cdot\nu)|^2|\eta_1(u')|^2\\ &\leqslant 2|\delta'|^2+2(m\cdot\nu)^2\widehat{\eta}_1^2|u'|^2,\end{aligned}$$

pois $|\eta_1(s)|\leqslant\widehat{\eta}_1|s|\ \forall\ s\in\mathbb{R}$. Daí,

$$\widehat{m}^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(m\cdot\nu)}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma\leqslant 2\widehat{m}^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(m\cdot\nu)}|\delta'|^2 d\Gamma+2\widehat{m}^2\alpha(t)\widehat{\eta}_1^2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2 d\Gamma.$$

Notemos que

$$|f_1^{\frac12}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}=\int_{\Gamma_1}f_1(\delta')^2 d\Gamma\geqslant\bar{f}_1\int_{\Gamma_1}(\delta')^2 d\Gamma=\bar{f}_1|\delta'(t)|^2_{\Gamma_1},\ \text{ou seja, } |\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\leqslant\frac{1}{\bar{f}_1}|f_1^{\frac12}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

Assim,

$$\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(m\cdot\nu)}|\delta'|^2 d\Gamma\leqslant\frac{1}{\zeta}\int_{\Gamma_1}(\delta')^2 d\Gamma=\frac{1}{\zeta}|\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\leqslant\frac{1}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac12}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

Portanto,

$$I_1\leqslant-\alpha(t)(2-n)\|u(t)\|^2+\frac{2\alpha(t)\widehat{m}^2}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac12}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+2\widehat{m}^2\widehat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac12}u'(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

Etapa 2. $I_2+I_5=-2\lambda\big(|u(t)|^\rho u,(m\cdot\nabla)u(t)\big)-\lambda\big(n-\frac12\big)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}$.

Pondo $m=(m_1,\dots,m_n)$, onde $m_k=x_k-x_0$ segue que

$$\begin{aligned}-2\lambda\big(|u(t)|^\rho u,(m\cdot\nabla)u(t)\big) &= -2\lambda\int_\Omega|u(t)|^\rho u(t)(m\cdot\nabla)u(t)\,dx\\ &= -2\lambda\sum_{k=1}^n\int_\Omega|u(t)|^\rho u(t)\,m_k\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\,dx.\end{aligned}$$

Pondo $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ e pela Fórmula de Green-Gauss, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)\, m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx &= -\int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)\, (x_k - x_0) \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx \\
&= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(|u(t)|^\rho u(t)(x_k - x_0)\Big) u(t)\, dx \\
&\quad -\int_{\Gamma_1} |u(t)|^\rho u(t)(x_k - x_0) u(t)\, \nu_k\, d\Gamma \\
&= \int_\Omega \Big(\rho |u(t)|^{\rho-1} \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)| u(t)(x_k - x_0) \\
&\quad + |u(t)|^\rho \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}(x_k - x_0) + |u(t)|^\rho u(t)\Big) u(t)\, dx \\
&\quad -\int_{\Gamma_1} |u(t)|^\rho u(t)(x_k - x_0) u(t)\, \nu_k\, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
-2\lambda \sum_{k=1}^n \int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)\, m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx &= 2\lambda\rho \sum_{k=1}^n \int_\Omega |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx \\
&\quad + 2\lambda \sum_{k=1}^n \int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)\, m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx \\
&\quad + 2n\lambda \int_\Omega |u(t)|^{\rho+2} dx - 2\lambda \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |u(t)|^{\rho+2} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-2\lambda \sum_{k=1}^n \int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)\, m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx &= \lambda\rho \sum_{k=1}^n \int_\Omega |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx \\
&\quad + \lambda n \int_\Omega |u(t)|^{\rho+2} dx - \lambda \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |u(t)|^{\rho+2} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Novamente pela Fórmula de Green-Gauss, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lambda\rho \int_\Omega |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx &= -\lambda\rho \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\Big[|u(t)|^{\rho+1}(x_k - x_0)\Big] |u(t)| dx \\
&\quad + \lambda\rho \int_{\Gamma_1} |u(t)|^{\rho+1}(x_k - x_0)|u(t)| \nu_k\, d\Gamma \\
&= -\lambda\rho(\rho+1) \int_\Omega |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx \\
&\quad - \lambda\rho \int_\Omega |u(t)|^{\rho+2}\, dx + \lambda\rho \int_{\Gamma_1} |u(t)|^{\rho+2} m_k \nu_k\, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Como $\rho + \rho(\rho+1) = \rho(\rho+2)$, então

$$\lambda\rho \int_\Omega |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx = -\frac{\lambda\rho}{\rho+2} \int_\Omega |u(t)|^{\rho+2}\, dx + \frac{\lambda\rho}{\rho+2} \int_{\Gamma_1} |u(t)|^{\rho+2} m_k \nu_k\, d\Gamma,$$

donde resulta que

$$\lambda\rho\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}|u(t)|^{\rho+1}m_k\frac{\partial}{\partial x_k}|u(t)|\,dx=-\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\int_{\Omega}|u(t)|^{\rho+2}\,dx+\frac{\lambda\rho}{\rho+2}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u(t)|^{\rho+2}\,d\Gamma.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}-2\lambda\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}|u(t)|^{\rho}u\,m_k\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\,dx &= \lambda\Big(n-\frac{n\rho}{\rho+2}\Big)\int_{\Omega}|u(t)|^{\rho+2}dx\\ &\quad+\lambda\Big(\frac{\rho}{\rho+2}-1\Big)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u(t)|^{\rho+2}d\Gamma\\ &\leqslant \frac{2\lambda n}{\rho+2}\int_{\Omega}|u(t)|^{\rho+2}dx\\ &= \frac{2\lambda n}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)},\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $\dfrac{\rho}{\rho+2}-1<0$.

Como $V\hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ então existe uma constante $C_0>0$ tal que

$$\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}\leqslant C_0\|u(t)\|^{\rho+2}=C_0\|u(t)\|^{\rho}\|u(t)\|^2\leqslant C_0C\|u(t)\|^2,$$

pois u é limitada em V.

Usando a última desigualdade e lembrando que $\alpha(t)\geqslant\alpha_0>0$ e denotando $\kappa_1=\dfrac{C_0C}{\alpha_0}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}I_2+I_5 &\leqslant \frac{2\lambda n}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}-\lambda\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}\\ &= \lambda\Big(\frac{2n}{\rho+2}-n\Big)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\frac{\lambda}{2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}\\ &\leqslant -\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\lambda\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}\\ &\leqslant -\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\lambda\kappa_1\alpha(t)\|u(t)\|^2.\end{aligned}$$

Etapa 3. $I_3=2\big(u'(t),(m\cdot\nabla)u'(t)\big)$.

Notemos que

$$I_3=2\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx.$$

Então, pela Fórmula de Green-Gauss, para cada $k\in\{1,\dots,n\}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx &= -\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_k}\big(u'(t)m_k\big)u'(t)dx+\int_{\Gamma_1}u'(t)m_ku'(t)\nu_kd\Gamma\\ &= -\int_{\Omega}u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx-\int_{\Omega}(u'(t))^2dx+\int_{\Gamma_1}m_k\nu_k(u'(t))^2d\Gamma,\end{aligned}$$

que implica em

$$2\int_\Omega u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx=-\int_\Omega (u'(t))^2dx+\int_{\Gamma_1} m_k\nu_k(u'(t))^2d\Gamma.$$

Somando em k de 1 a n, obtemos

$$\begin{aligned}I_3=2\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx &= -n\int_\Omega (u'(t))^2dx+\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(u'(t))^2d\Gamma\\ &= -n|u'(t)|^2+|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}.\end{aligned}$$

Daí, lembrando que $\alpha(t)\geqslant\alpha_0>0$, temos

$$I_3\leqslant -n|u'(t)|^2+\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

Etapa 4. $I_4=\Big(n-\dfrac{1}{2}\Big)\alpha(t)(\Delta u(t),u(t))$.

Aplicando a Fórmula de Green e (5.9), temos

$$\begin{aligned}I_4 &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_\Omega u(t)\Delta u(t)dx\\ &= -\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla u(t)\,dx\\ &\quad+\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u(t)}{\partial\nu}u(t)\,d\Gamma\\ &= -\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\|u(t)\|^2+\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\delta'(t)u(t)\,d\Gamma\\ &\quad-\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\eta_1(u'(t))u(t)\,d\Gamma.\end{aligned}$$

Da continuidade da função traço (Ver Teorema 8), existe uma constante $C_1>0$ tal que

$$|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}v|^2_{\Gamma_1}\leqslant\frac{C_1}{2}\|v\|^2, \tag{5.25}$$

para toda $v \in V$, donde obtemos que

$$\begin{aligned}
&\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\delta'(t)u(t)\,d\Gamma \\
= \;& \alpha(t)\int_{\Gamma_1}2\sqrt{C_1}\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}\delta'(t)\,\frac{(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{C_1}}\,u(t)\,d\Gamma \\
\leqslant \;& \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\Big[4C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{1}{(m\cdot\nu)}(\delta'(t))^2+\frac{(m\cdot\nu)}{4C_1}(u(t))^2\Big]d\Gamma \\
= \;& 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(m\cdot\nu)}(\delta'(t))^2 d\Gamma \\
& +\frac{\alpha(t)}{8C_1}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(u(t))^2 d\Gamma \\
\leqslant \;& 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta}|\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{8C_1}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u(t)|^2_{\Gamma_1} \\
\leqslant \;& 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{8C_1}\cdot\frac{C_1}{2}\|u(t)\|^2 \\
= \;& 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{16}\|u(t)\|^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&-\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\eta_1(u'(t))u(t)d\Gamma \\
\leqslant \;& \Big|-\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\eta_1(u'(t))u(t)\,d\Gamma\Big| \\
\leqslant \;& \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\Big(n-\frac{1}{2}\Big)|(m\cdot\nu)||\eta_1(u'(t))||u(t)|\,d\Gamma \\
= \;& \alpha(t)\int_{\Gamma_1}2\sqrt{C_1}\Big(n-\frac{1}{2}\Big)(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}|\eta_1(u'(t))|\frac{(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{C_1}}|u(t)|d\Gamma \\
\leqslant \;& \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\Big[4C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2(m\cdot\nu)|\eta_1(u'(t))|^2+\frac{(m\cdot\nu)}{4C_1}|u(t)|^2\Big]d\Gamma \\
= \;& 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\eta_1(u'(t))|^2 d\Gamma+\frac{\alpha(t)}{8C_1}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u(t)|^2 d\Gamma \\
\leqslant \;& 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(\widehat{\eta}_1)^2|u'(t)|^2 d\Gamma+\frac{\alpha(t)}{8C_1}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u(t)|^2_{\Gamma_1} \\
\leqslant \;& 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\widehat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{16}\|u(t)\|^2,
\end{aligned}$$

onde usamos (5.25) na última parcela. Assim,

$$\begin{aligned}
I_4 \leqslant -\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\|u(t)\|^2 &+ 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{16}\|u(t)\|^2 \\
&+2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\widehat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{16}\|u(t)\|^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}I_4 &\leqslant -\Big(n-\frac{5}{8}\Big)\alpha(t)\|u(t)\|^2+2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\\ &\quad+2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\hat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}.\end{aligned}$$

Etapa 5. $I_7+\cdots+I_{11}$.

• Da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}&-[2\alpha(t)-3\alpha_1](u'(t),\delta(t))_{\Gamma_1}\\ =&-[2\alpha(t)-3\alpha_1]\int_{\Gamma_1}\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}\delta(t)\sqrt{\alpha_0}(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)d\Gamma\\ \leqslant&-[2\alpha(t)-3\alpha_1]\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\alpha_0(m\cdot\nu)}(\delta(t))^2+\alpha_0(m\cdot\nu)(u'(t))^2\Big]d\Gamma\\ \leqslant&\ \frac{-[2\alpha(t)-3\alpha_1]}{2\zeta\alpha_0\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}-\frac{[2\alpha(t)-3\alpha_1]\alpha_0}{2}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}\\ =&\ \Big[\frac{-\alpha(t)}{\zeta\alpha_0\bar{f}_3}+\frac{3\alpha_1}{2\zeta\alpha_0\bar{f}_3}\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}+\Big[-\alpha(t)\alpha_0+\frac{3\alpha_1\alpha_0}{2}\Big]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}\\ \leqslant&\ \Big[\frac{\alpha(t)}{\zeta\alpha_0\bar{f}_3}+\frac{3\alpha_1}{2\zeta\bar{f}_3\alpha_0}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}+\Big[\alpha(t)\alpha_0+\frac{3\alpha_1\alpha_0}{2}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\Big]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}\\ =&\ \sigma\alpha(t)\Big[\frac{1}{\bar{f}_3\zeta}+\frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta\alpha_0}\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}+\alpha(t)\Big[\frac{1}{\sigma}+\frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0}\Big]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1},\end{aligned}$$

onde $\sigma=\dfrac{1}{\alpha_0}$.

• Novamente da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}&-[2\alpha(t)-3\alpha_1](f_2\delta'(t),\delta(t))_{\Gamma_1}\\ =&-[2\alpha(t)-3\alpha_1]\int_{\Gamma_1}\sqrt{\alpha_0}f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}f_2^{\frac{1}{2}}\delta(t)d\Gamma\\ \leqslant&-[2\alpha(t)-3\alpha_1]\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\Big[\alpha_0f_2(\delta'(t))^2+\frac{1}{\alpha_0}f_2(\delta(t))^2\Big]d\Gamma\\ \leqslant&-[2\alpha(t)-3\alpha_1]\Big[\frac{\alpha_0\hat{f}_2}{2}|\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\hat{f}_2}{2\alpha_0}|\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big]\\ \leqslant&-[2\alpha(t)-3\alpha_1]\Big[\frac{\alpha_0\hat{f}_2}{2\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\hat{f}_2}{2\alpha_0\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big]\\ =&\ \Big[\frac{-\alpha(t)\alpha_0\hat{f}_2}{\bar{f}_1}+\frac{3\alpha_1\alpha_0\hat{f}_2}{2\bar{f}_1}\Big]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\Big[\frac{-\alpha(t)\hat{f}_2}{\alpha_0\bar{f}_3}+\frac{3\alpha_1\hat{f}_2}{2\alpha_0\bar{f}_3}\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\\ \leqslant&\ \Big[\frac{\alpha(t)\alpha_0\hat{f}_2}{\bar{f}_1}+\frac{3\alpha_1\alpha_0\hat{f}_2}{2\bar{f}_1}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\Big]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\Big[\frac{\alpha(t)\hat{f}_2}{\alpha_0\bar{f}_3}+\frac{3\alpha_1\hat{f}_2}{2\alpha_0\bar{f}_3}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\\ =&\ \alpha(t)\Big[\frac{\hat{f}_2}{\sigma\bar{f}_1}+\frac{3\hat{f}_2\alpha_1}{2\sigma\bar{f}_1\alpha_0}\Big]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\sigma\alpha(t)\Big[\frac{\hat{f}_2}{\bar{f}_3}+\frac{3\hat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3\alpha_0}\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}.\end{aligned}$$

- Prosseguindo ainda com raciocínio análogo, segue que

$$\begin{aligned}
2\alpha'(t)(f_1\delta'(t),\delta(t))_{\Gamma_1} &= 2\alpha'(t)\int_{\Gamma_1} f_1\delta'(t)\delta(t)d\Gamma \\
&= \alpha'(t)\int_{\Gamma_1}\frac{2}{\sqrt{\sigma}}f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)\sqrt{\sigma}f_1^{\frac{1}{2}}\delta(t)d\Gamma \\
&\leqslant |\alpha'(t)|\frac{1}{\sigma}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |\alpha'(t)|\sigma\frac{\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{\sigma}\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \varepsilon\sigma\alpha(t)\frac{\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned}$$

- Lembrando que $\sigma = \dfrac{1}{\alpha_0}$, notemos que,

$$\begin{aligned}
-[2\alpha(t)-3\alpha_1]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2 &\leqslant -2\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2 + 3\alpha(t)\frac{\alpha_1}{\alpha_0}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&\leqslant -2\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2 + 3\sigma\alpha_1\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned}$$

- Como $\alpha(t)\leqslant\alpha_1$, então

$$[2\alpha(t)-3\alpha_1]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leqslant [2\alpha(t)-3\alpha(t)]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 = -\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&I_7+\cdots+I_{11} \\
\leqslant\ & \alpha(t)\Big[\frac{1}{\sigma}+\frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0}\Big]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t)\Big[\frac{\widehat{f}_2}{\sigma\bar{f}_1}+\frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\sigma\bar{f}_1\alpha_0}+\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&-\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 - \alpha(t)\Big[2-\sigma\Big(\frac{1}{\bar{f}_3\zeta}+\frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta\alpha_0}+\frac{\widehat{f}_2}{\bar{f}_3}+\frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3\alpha_0}+\frac{\varepsilon\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}+3\alpha_1\Big)\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned}$$

Usando as etapas 1, 2, 3, 4 e 5 resulta que

$$\begin{aligned}
\mu'(t) \leqslant\ & -\alpha(t)(2-n)\|u(t)\|^2 + \frac{2\alpha(t)\widehat{m}^2}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2\widehat{m}^2\widehat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&-\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + \lambda\kappa_1\alpha(t)\|u(t)\|^2 - n|u'(t)|^2 + \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&+\Big(n-\frac{1}{2}\Big)|u'(t)|^2 - \Big(n-\frac{5}{8}\Big)\alpha(t)\|u(t)\|^2 + 2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&+2C_1\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\widehat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \alpha(t)\Big[\frac{1}{\sigma}+\frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0}\Big]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&+\alpha(t)\Big[\frac{\widehat{f}_2}{\sigma\bar{f}_1}+\frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\sigma\bar{f}_1\alpha_0}+\frac{\varepsilon}{\sigma}\Big]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 - \alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 \\
&-\alpha(t)\Big[2-\sigma\Big(\frac{1}{\bar{f}_3\zeta}+\frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta\alpha_0}+\frac{\widehat{f}_2}{\bar{f}_3}+\frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3\alpha_0}+\frac{\varepsilon\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}+3\alpha_1\Big)\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2.
\end{aligned}$$

Definindo,

$$
\begin{aligned}
\kappa_2 &:= 2\widehat{m}^2\widehat{\eta}_1^2 + \frac{1}{\alpha_0} + 2C_1\Big(n - \frac{1}{2}\Big)^2\widehat{\eta}_1^2 + \frac{1}{\sigma} + \frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0};\\
\kappa_3 &:= \frac{2\widehat{m}^2}{\zeta\bar{f}_1} + \frac{2C_1}{\zeta\bar{f}_1}\Big(n - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{\widehat{f}_2}{\sigma\bar{f}_1} + \frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\sigma\bar{f}_1\alpha_0} + \frac{\varepsilon}{\sigma};\\
\kappa_4 &:= \frac{1}{\bar{f}_3\zeta} + \frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta\alpha_0} + \frac{\widehat{f}_2}{\bar{f}_3} + \frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3\alpha_0} + \frac{\varepsilon\widehat{f}_1}{\bar{f}_3} + 3\alpha_1,
\end{aligned}
$$

obtemos,

$$
\begin{aligned}
\mu'(t) \;\leqslant\; & -\Big(\frac{11}{8} - \lambda\kappa_1\Big)\alpha(t)\|u(t)\|^2 - \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \\
& -\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \kappa_2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
& +\kappa_3\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} - \alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} - \alpha(t)(2 - \sigma\kappa_4)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

Multiplicando (5.26) por $\varepsilon > 0$ e somando com (5.20), obtemos:

$$
\begin{aligned}
E'_\varepsilon(t) \;\leqslant\; & -\frac{\varepsilon}{2}|u'(t)|^2 - \varepsilon\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \\
& -\varepsilon\alpha(t)\Big[\Big(\frac{11}{8} - \lambda\kappa_1\Big)\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\Big] - \alpha(t)\Big[\frac{\bar{f}_2}{\widehat{f}_1} - \varepsilon\kappa_3\Big]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
& -\alpha(t)[\bar{\eta}_1 - \varepsilon\kappa_2]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} - \varepsilon\alpha(t)\Big[\frac{3}{2} - \sigma\kappa_4\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

Notemos que

$$
-\varepsilon\alpha(t)\Big(\frac{11}{8} - \lambda\kappa_1\Big)\|u(t)\|^2 \leqslant -\varepsilon\frac{\alpha(t)}{2}\|u(t)\|^2; \tag{5.28}
$$

$$
-\alpha(t)\Big[\frac{\bar{f}_2}{\widehat{f}_1} - \varepsilon\kappa_3\Big]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant 0; \tag{5.29}
$$

$$
-\alpha(t)[\bar{\eta}_1 - \varepsilon\kappa_2]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant 0, \tag{5.30}
$$

pois $\frac{11}{8} - \lambda\kappa_1 \geqslant 0$, $\frac{\bar{f}_2}{\widehat{f}_1} - \varepsilon\kappa_3 \geqslant 0$ e $\bar{\eta}_1 - \varepsilon\kappa_2 \geqslant 0$. Pondo,

$$
a = \frac{1}{\bar{f}_3\zeta} + \frac{\widehat{f}_2}{\bar{f}_3} + \frac{\varepsilon\widehat{f}_1}{\bar{f}_3} + 3\alpha_1 \quad \text{e} \quad b = \frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta} + \frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3}
$$

então $\kappa_4 = a + \frac{b}{\alpha_0}$. Suponhamos agora que α_0 é escolhido tal que $\sigma\kappa_4 = \frac{\kappa_4}{\alpha_0} \leqslant 1$. De fato, tal escolha para α_0 pode ser feita, pois

$$
\frac{1}{\alpha_0}\Big(a + \frac{b}{\alpha_0}\Big) \leqslant 1 \;\text{ implica que }\; \alpha_0^2 - a\alpha_0 - b \geqslant 0.
$$

Logo,

$$
\alpha_0 \leqslant \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha_0 \geqslant \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.
$$

Como $\alpha_0 > 0$, necessariamente temos que $\alpha_0 \geqslant \dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$. Sendo $\sigma = \dfrac{1}{\alpha_0}$, então

$$0 < \sigma \leqslant \frac{2}{a+\sqrt{a^2+4b}}.$$

que implica em $\sigma\kappa_4 \leqslant 1$. Assim,

$$-\varepsilon\alpha(t)\Big[\frac{3}{2} - \sigma\kappa_4\Big]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant -\varepsilon\frac{\alpha(t)}{2}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}. \tag{5.31}$$

De (5.27)-(5.31), segue que

$$E'_\varepsilon(t) \leqslant -\varepsilon\tau E(t), \tag{5.32}$$

onde $\tau = \min\{1, n\rho\} > 0$.

Agora majoraremos os termos da expressão para $\mu(t)$. Para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$, temos

$$2\widehat{m}\int_\Omega u'\frac{\partial u}{\partial x_k}dx \leqslant 2\Big[\int_\Omega (u')^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}}\widehat{m}\Big[\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_\Omega (u')^2 dx + \widehat{m}^2\int_\Omega\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)^2 dx.$$

Então,

$$\begin{aligned}
2\big(u'(t), (m\cdot\nabla)u(t)\big) &\leqslant 2\sum_{k=1}^n \int_\Omega \Big|u'(t)m_k\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\Big|dx \\
&\leqslant 2\widehat{m}\sum_{k=1}^n\int_\Omega |u'(t)|\Big|\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\Big|dx \\
&\leqslant n|u'(t)|^2 + \widehat{m}^2\|u(t)\|^2 \\
&\leqslant n|u'(t)|^2 + \widehat{m}^2\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\|u(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\Big(n-\frac{1}{2}\Big)(u'(t), u(t)) &= \int_\Omega \Big(n-\frac{1}{2}\Big)u'(t)u(t)\,dx \\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{2}\Big[\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2(u'(t))^2 + (u(t))^2\Big]dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2|u'(t)|^2 + \frac{C}{2}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\|u(t)\|^2,
\end{aligned} \tag{5.34}$$

onde usamos a imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, obtemos também

$$\begin{aligned}
(f_1\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} &\leqslant \Big|\int_{\Gamma_1} f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)f_1^{\frac{1}{2}}\delta(t)\,d\Gamma\Big| \\
&\leqslant |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big[|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big] \\
&\leqslant \frac{1}{2}\Big[|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \frac{\widehat{f_1}}{\check{f_3}}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big],
\end{aligned} \tag{5.35}$$

pois,

$$\frac{\widehat{f_1}}{\overline{f_3}}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} = \frac{\widehat{f_1}}{\overline{f_3}}\int_{\Gamma_1} f_3(\delta(t))^2 d\Gamma \geqslant \widehat{f_1}\int_{\Gamma_1}(\delta(t))^2 d\Gamma \geqslant \int_{\Gamma_1} f_1(\delta(t))^2 d\Gamma = |f_1^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

De (5.33), (5.34) e (5.35), obtemos

$$\begin{aligned} |\mu(t)| &\leqslant \left[n+\frac{1}{2}\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2\right]|u'(t)|^2 + \alpha(t)\Big(\frac{\widehat{m}^2}{\alpha_0}+\frac{C}{2\alpha_0}\Big)\|u(t)\|^2 \\ &\quad +\alpha(t)\Big(1+\frac{3\alpha_1}{2\alpha_0}\Big)\Big(|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\widehat{f_1}}{\overline{f_3}}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|\Big). \end{aligned}$$

Escrevendo

$$M_1 = \max\Big\{1, \frac{\widehat{f_1}}{\overline{f_3}}\Big\}$$

e

$$M_2 = \max\Big\{n+\frac{1}{2}\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2, \frac{\widehat{m}^2}{\alpha_0}+\frac{C}{2\alpha_0}, M_1\Big(1+\frac{3\alpha_1}{2\alpha_0}\Big)\Big\},$$

resulta que $|\mu(t)| \leqslant 2M_2E(t)$, isto é,

$$-2M_2E(t) \leqslant \mu(t) \leqslant 2M_2E(t).$$

Multiplicando por $\varepsilon > 0$ a última desigualdade e somando $E(t)$, obtemos

$$E(t) - 2\varepsilon M_2E(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\mu(t) \leqslant E(t) + 2\varepsilon M_2 E(t),$$

isto é,

$$\varepsilon_1 E(t) \leqslant E_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_2 E(t), \tag{5.36}$$

onde $\varepsilon_1 = 1 - 2\varepsilon M_2 > 0$ e $\varepsilon_2 = 1 + 2\varepsilon M_2 > 0$. De (5.32) e (5.36), resulta que

$$E'_\varepsilon(t) \leqslant -\varepsilon\tau E(t) \leqslant -\frac{\varepsilon\tau}{\varepsilon_2}E_\varepsilon(t),$$

que implica em

$$E_\varepsilon(t) \leqslant \frac{E(0)}{\varepsilon_1}e^{-\frac{\varepsilon\tau}{\varepsilon_2}t},$$

onde usamos o fato de $E_\varepsilon(0) = E(0)$. Como $E(0) \leqslant \varepsilon_2 E(0)$, então

$$E_\varepsilon(t) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}E(0)e^{-\frac{\varepsilon\tau}{\varepsilon_2}t},$$

e com isso concluímos a demonstração do Teorema 18. ■

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R.A., *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics, New York, (1975).

[2] ALCÂNTARA, A.A., *Estabilização, Análise e Simulação Numérica da Equação de Ondas com Condição da Acústica na Fronteira*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática, UFRJ, (2015).

[3] BEALE, J.T. and ROSENCRANS, S.I., *Acoustic Boundary Conditions*. Bull. Amer. Math. Soc., Vol 80, Number 6, (1974), p. 1276-1278.

[4] BRAZ e SILVA, P., CLARK, H.R. e FROTA, C.L., *On a nonlinear coupled system of thermoelastic type with acoustic boundary conditions*, Computational Applied Mathematics, Springer, (2015), DOI 10.1007/540314-015-0236-1.

[5] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Rutgers University*, Springer Velarg, (2011).

[6] BURKILL, J.C., *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambridge University press, (1970).

[7] CAVALCANTE, M.M. e CAVALCANTE, V., *Introdução às Equações Diferenciais Parciais*, UEM, (2010).

[8] EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American Mathematical Society, (1997).

[9] GONCALVES, A.S., *Estabilização na Fronteira de Equação de Ondas*, Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, UFPA, (2012).

[10] HARAUX, A. and ZUAZUA, E., *Decay estimates for same semilinear damped hyperbolic problems*, Arch. Rat. Mech. Anal, (1998), 191-206.

[11] KORMORNIK, Y. and ZUAZUA, E., *A direct method for boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pure et Appl. 69 (1990), 33-54.

[12] LIONS, J.L., Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, (1969).

[13] LIZANA, J.L., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidad de Los Andes, Venezuela, (2013).

[14] MARIVALDO, M.P., Integral de Bochner e os Espaços $L^p(0, T; X)$. Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, (1998).

[15] MEDEIROS, L.A. e MILLA MIRANDA, M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (2000).

[16] MEDEIROS, L.A. e MILLA MIRANDA, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos e Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).

[17] MEDEIROS, L.A., RIVERA, P.H, *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos. Rio de Janeiro, Editora UFRJ, (1975).

[18] MORSE, P.M. and INGARD, K.U., *Theoretical Acoustic*, McGraw-Hill, New York, (1968).

[19] NERY, N., *Soluções Fracas para Um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano(*$2 < p < 3$*)*, Notas de Aula, Departamento de Matemática, UFPB, Março, (2005).

[20] VICENTE, A., *Equações de Ondas com Condições de Fronteira da Acústica*, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, (2010).