Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estabilidade de Hipersuperfícies com r-Curvatura Média Constante

Ítalo Dowell Lira Melo

Teresina - 2012

Ítalo Dowell Lira Melo

Dissertação de Mestrado:

Estabilidade de Hipersuperfícies com r-Curvatura Média Constante

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2012

Estabilidade de Hipersuperfícies com r-Curvatura Média Constante

Ítalo Dowell Lira Melo

Dissertação submetida à Coordenação de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa (Orientador-UFPI)
- Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima (UFPI)
- Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva (UFPI)

Teresina - 2012

Aos meus amados pais, Francisco e Gizelda.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido a chance de conhecer a matemática e suas belezas que tanto me fascinavam e, também, permitir a realização deste grande sonho.

Agradeço a toda a minha família que sempre me apoiou no caminho do estudo, principalmente meus pais, em especial à minha mãe Gizelda, por todo o seu esforço durante esses anos, ao meu irmão Igor por todos os momentos de alegria. Também agradeço o apoio do meus tios Adauto, Valderón, à minha tia Lira e aos meus primos Amanda, Ricardo, Rafael e Valdeany.

Agradeço à minha namorada Gilciana Carvalho, por está sempre ao meu lado todos esses anos, por me apoiar sempre que precisei, pela sua compreensão e carinho em momentos difícies e por me proporcinar momentos inesquecíveis de alegria ao seu lado (Amo você).

Agradeço a todos os meus amigos de infância: Adoniran, Leonardo, Rafael, Edson, Edinaldo, Eurípedes e tantos outros que de várias formas contribuíram positivamente na minha formação como pessoa.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UFPI, que diretamente ou indiretamente contribuíram na minha formação, em especial ao meu orientador Paulo Alexandre a quem me acompanha desde a iniciação científica com ensinamentos e conselhos, ao professor João Xavier a quem me ajudou em várias ocasiões, ao professor João Benício e ao professor Roger Peres.

Agradeço aos professores Juscelino Silva e Barnabé Pessoa por terem aceitado o convite de participar da minha banca.

Agradeço aos amigos de estudo e lazer Daniel, Pedro Jorge, José Arimatéia, Gleison, Cleiton, Yuri, Kelson, Aílton, Gilberto, João Santos, João Carlos, Pollyanna, Conceição, Therezynha, Francisco e todos os meus amigos que convivem diretamente comigo.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Nunca ande pelo caminho traçado, pois ele conduz somente até onde os outros já foram".

Graham Bell.

Resumo

Nesta dissertação, descrevemos resultados obtidos por Lucas Barbosa e Gervásio Colares em 1997, sobre a estabilidade de hipersuperfícies orientáveis compactas sem bordo imersas em espaços forma com r-curvatura média constante.

Abstract

In this work, we describe results obtained by Lucas Barbosa Gervasio Colares in 1997 and, on the stability of compact orientable hypersurfaces without boundary immersed in $\mathfrak{r}$-space form with constant mean curvature.

Sumário

Introdução

Associado a segunda forma fundamental de uma imersão $x : \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{M}}^{n+1}$ existem n invariantes, chamados de funções simétricas elementares S_r das curvaturas principais $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, definidas por:

$$S_r = \sum_{i_1 < ... < i_r} \lambda_1 \cdots \lambda_r, \ 0 \leqslant r \leqslant n.$$

A r-curvatura média H_r de x é definida por $H_r = \dfrac{S_r}{\binom{n}{r}}$. Observe que H_1 é a curvatura média e H_n é a curvatura de Gauss-Kronecker de x.

É bem sabido que imersões com curvatura média constante são pontos críticos para o problema variacional de minimizar o funcional área, mantendo o volume constante. Uma solução local para este problema variacional é dita estável. Este conceito foi introduzido por Barbosa em [3], onde foi provado que quando a varieadade ambiente é o $\mathbb{R}^{n+1}$, um hesmifério aberto de esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$, esferas são as únicas imersões estáveis.

Quando a variedade ambiente $\overline{\mathbb{M}}^{n+1}$ possui curvatura seccional constante c, é possível mostrar que imersões com r-curvatura média constante surgem como pontos críticos para o problema variacional de minimizar certas integrais de curvatura, do tipo

$$A_r = \int_M F_r(S_1, ..., S_r) dM,$$

mantendo o volume constante, onde F_r é uma função adequada. Para este problema, as fórmulas da primeira e da segunda variação são determinadas e o conceito de r-estabilidade é estabelecido, generalizando o conceito de estabilidade.

Quando o espaço ambiente é o $\mathbb{R}^{n+1}$, o estudo da r-estabilidade foi tratado por Alencar em [12], provando que para cada valor de r, esferas são as únicas hipersuperfícies orientáveis compactas imersas que são r-estáveis. Quando o espaço ambiente é um hemisfério aberto da esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, o mesmo resultado vale para o caso em que $r = 2$ e foi provado por Alencar em [1].

Nesta dissertação, provaremos que para qualquer valor de $\mathtt{r}$, as esferas geodésicas são as únicas hipersuperfícies orientáveis compactas $\mathtt{r}$-estáveis imersas em um hemisfério aberto da esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$, generalizando os resultados obtidos por Alencar em [1].

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos definições e resultados da geometria Riemanniana que serão utilizados ao longo deste trabalho. Parte substancial deste capítulo encontra-se em [9] e [8]. Denotaremos por M^n (ou simplesmente por M) uma variedade Riemanniana de dimensão n e classe C^∞, $\langle\, ,\, \rangle$ denotará sua métrica Riemanniana e ∇ a sua conexão Riemanniana.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞. Dado $p \in M$, T_pM denotará o plano tangente à variedade M no ponto p.

1.1 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano

Definição 1. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O gradiente de* f *é o único campo vetorial suave* ∇f*, definido sobre* M *que satisfaz a seguinte condição:*

$$X(f) = \langle \nabla f, X \rangle$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Decorre da definição que se f, g são funções suaves, então:

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

2. $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

Proposição 1. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Se p é um ponto de máximo ou mínimo local de* f*, então* $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração: Dado $\nu \in T_pM$, seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva suave com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \nu$. Note que 0 é ponto crítico da funcão $f \circ \gamma$. Assim $\dfrac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} = (X(f))(p) = \langle \nabla f(p), \nu \rangle = 0$, onde X é uma extensão local de γ. Como a relação acima é válida para todo $\nu \in TpM$, segue que $\nabla f(p) = 0$ ∎

Proposição 2. *Seja M uma variedade Riemanniana conexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $\nabla f = 0$, então f é constante em M.*

Demonstração: Fixado $p \in M$ seja $C = \{q \in M; f(q) = f(p)\}$, como f é suave segue que f é contínua assim o conjunto C é fechado em M. Afirmo que C é um aberto de M. De fato, dado $q \in M$ seja U_q uma vizinhança coordenada conexa de q. Assim, dado $p' \in U$ existe uma curva suave $\gamma : [0, 1] \to U$ com $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = p'$. Por outro lado, note que $\dfrac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f, \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)} = 0$. Assim a função $f \circ \gamma$ é constante, logo $f(p) = f \circ \gamma(0) = f(q) = f \circ \gamma(1) = f(q')$. Donde temos que $U_q \subset C$. Deste fato segue que C é aberto. Como M é conexa e $C \neq \varnothing$, segue que $M = C$ logo f é constante. ∎

Definição 2. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X é a função suave* $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}\{\nu \mapsto \nabla_\nu X\},$$

onde $\nu \in T_pM$ e tr indica o traço do operador.

Decorre da definição, que se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e f é uma função suave então:

1. div $(X + Y)$ =div X + div Y;
2. div $(f \cdot X)$ = f·div X+$\langle \nabla f, X \rangle$.

Teorema 1. *(Teorema da Divergência) Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então*

$$\int_M \operatorname{div} X \, dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle dS,$$

onde ν é um campo unitário normal a ∂M apontando para fora de M.

Corolário 1. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta sem bordo e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então,*

$$\int_M \operatorname{div} X \, dM = 0.$$

Definição 3. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O Laplaciano de* f *é a função suave* $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

Das proprieades do gradiente e do divergente segue que, se $f, g : M \to \mathbb{R}$ são funções suaves então:

1. $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$
2. $\Delta(f \cdot g) = \Delta f \cdot g + g \cdot \Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$.

Obs 1. *Diz-se que um referencial ortornomal* $\{e_1, ...e_n\}$ *em um aberto* $U \subset M$*, é geodésico em p, se* $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ *para todos* $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Definição 4. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O hessiano de* f *no ponto* p *é o operador linear* $\operatorname{Hess} f_p : T_pM \to T_pM$*, definido por*

$$\operatorname{Hess} f_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades de conexão Riemanniana que, se X é uma extensão local de v então $\operatorname{Hess} f_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p)$.

Proposição 3. *Se* f *é uma função suave definida sobre* M*, então o hessiano de* f *no ponto* p *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração: Dados $x, y \in T_pM$, sejam X, Y extensões de x, y respectivamente a campos definidos em uma vizinhança de p em M. Então,

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{Hess} f_p(x), y\rangle &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle_p \\
&= X\langle \nabla f, Y\rangle_p - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle_p \\
&= (X(Y(f)))_p - \langle \nabla f, \nabla_Y X + [X, Y]\rangle_p \\
&= (Y(X(f)))_p + ([X, Y](f))_p - \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle_p - ([X, Y](f))_p \\
&= \langle \nabla_Y \nabla f, X\rangle_p \\
&= \langle \operatorname{Hess} f_p(y), x\rangle.
\end{aligned}$$

■

Proposição 4. *Se* $f : M \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então para todo* $p \in M$ *vale a igualdade:*

$$\Delta f(p) = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f_p).$$

Demonstração: Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base ortonormal de T_pM, usando a notação de Einstein temos que

$$\begin{aligned} tr(\text{Hess}\, f_p) &= \langle (\text{Hess}\, f)_p(v_i), v_i\rangle \\ &= \langle \nabla_{v_i}\nabla f, v_i\rangle_p \\ &= \text{div}\, \nabla f(p) \\ &= \Delta f(p). \end{aligned}$$

■

Seja f uma função suave. Como $\text{Hess}\, f_p$ é um operador auto-adjunto, este operador induz de modo natural, uma forma bilinear simétrica em T_pM chamada forma hessiana de f em p. Abusando da notação, também denotaremos a forma hessiana de f em p por $\text{Hess}\, f_p$. Dados $x, y \in T_pM$, a forma hessiana de f em p é definida da seguinte maneira

$$\text{Hess}\, f_p(x, y) = \langle \text{Hess}\, f_p(x), y\rangle$$

Proposição 5. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Se* p *é um ponto de máximo local para* f*,* $v \in T_pM$ *e* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *é uma curva suave tal que* $\gamma(0) = p$ *e* $\gamma'(0) = v$*, então*

$$\text{Hess}\, f_p(v, v) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \leqslant 0.$$

Demonstração: Veja que,

$$\begin{aligned} \text{Hess}\, f_p(v, v) &= \langle \text{Hess}\, f_p(v), v\rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\nabla f, \frac{d\gamma}{dt}\rangle_p \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle \nabla f, \gamma'\rangle - \langle \nabla f, \frac{D}{dt}\gamma'\rangle_p. \end{aligned}$$

Como p é ponto de máximo local de f, usando a Proposição 1 temos que $\nabla f(p) = 0$. Sendo 0 ponto de máximo local de $f \circ \gamma(t)$, temos que

$$\begin{aligned} \text{Hess}\, f_p(v, v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle \nabla f, \gamma'\rangle \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}(f \circ \gamma)(t) \leqslant 0. \end{aligned}$$

■

1.2 Curvatura

A curvatura R de uma varieadade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 6. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) R *é bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$*, isto é:*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

f*,* $g \in C^\infty(M)$*, e* $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par* X*,* $Y \in \mathfrak{X}(M)$*, o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *é linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$$

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z,$$

$f \in C^\infty(M)$ *e* $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

(iii) *Vale a Primeira Identidade de Bianchi:*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Na proposição abaixo, por conveniência, usaremos a seguinte notação:

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}.$$

Proposição 7. *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bi-dimensional do espaço tangente* T_pM *e sejam* $x, y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K_p(\sigma) = K_p(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 5. *Dado um ponto* $p \in M$ *e um subespaço bi-dimensional* $\sigma \subset T_pM$*, o número real* $K_p(\sigma) = K_p(x, y)$*, onde* $\{x, y\}$ *é uma base qualquer de* σ*, é chamado curvatura seccional de* σ *em* p*.*

Diz-se que uma variedade Riemanniana M possui curvatura constante se $K_p(\sigma)$, onde $\sigma \subset T_pM$, não depende da escolha do ponto p e do subespaço bi-dimensional σ. Um exemplo clássico desse tipo de variedade é a esfera $\mathbb{S}^{n+}(1)$. Provaremos, mais adiante, este resultado utilizando o método do referencial móvel.

1.3 Imersões isométricas

1.3.1 A segunda forma fundamental

Definição 6. *Sejam* M^n*,* $\overline{M}^{n+m=k}$ *variedades Riemannianas. Uma aplicação suave* $f : M \longrightarrow \overline{M}$ *é uma imersão se* $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ *é injetiva para todo* $p \in M$*.*

Sejam $\left(\overline{M}^{n+m=k}, \langle,\rangle, \overline{\nabla}\right)$ uma variedade Riemanniana, M^n uma variedade n-dimensional e $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ uma imersão. Nestas condições, a métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M através da definição

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \ \forall p \in M, \ \forall u, v \in T_pM.$$

Dessa forma, a aplicação f é uma imersão isométrica.

Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Portanto existem uma vizinhança $\overline{U}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\Phi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que Φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com o vetor $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Assim, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^\perp, \ v^T \in T_pM, \ v^\perp \in (T_pM)^\perp.$$

Denominamos por v^T a componente tangencial de v e $v^\perp$ a componente normal de v. Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos:

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T.$$

Verifica-se que esta é a conexão Riemanniana relativa a métrica induzida de M por f.

Definição 7. *Sejam* $f : M \longrightarrow \overline{M}$ *uma imersão isométrica,* $U \subset M$ *uma vizinhança de* $p \in M$ *tal que* $f(U) \subset \overline{M}$ *é uma subvariedade de* $\overline{M}$ *e* $N \in \mathfrak{X}(\overline{U})$ *um campo local em* $\overline{M}$*, com* $\overline{U} \subset \overline{M}$ *aberto e* $f(U) \subset \overline{U}$*. O campo* N *diz-se normal a* M *se* $\overline{X}(p) = \overline{X}_p \in (T_pM)^\perp$ *para todo* $p \in U$*.*

Assim segue da definição acima, que $B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. Prova-se que $B(X,Y)$ está bem definida ou seja, $B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. Indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em U normais a U.

Proposição 8. *Se* X*,* $Y \in \mathfrak{X}(U)$*, a aplicação* $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ *dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Omitiremos a demonstração desta proposição, apenas indicaremos o principal fato usado, a saber: exprimindo B em um sistema de coordenadas, verifica-se que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e de $Y(p)$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle, \; x, y \in T_pM,$$

é, pela proposição anterior, uma forma bilinear e simétrica.

Definição 8. *A forma quadrática* II_η *definida em* T_pM *por* $II_\eta(x) = H_\eta(x,x) = \langle B(x,x), \eta\rangle$*, é denominada de segunda forma fundamental de* M *em* p *segundo o vetor normal* η*.*

Às vezes se utiliza também a expressão **segunda forma fundamental** para designar a aplicação B que em cada $p \in M$.

Associada à aplicação H_η temos a aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$, definida por:

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle.$$

Proposição 9. *Sejam* $p \in M$*,* $x \in T_pM$ *e* $\eta \in (T_pM)^\perp$*. Seja* N *uma extensão local de* η *normal a* M*. Então*

$$A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^\top.$$

Demonstração: Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, respectivamente. Então $\langle N, Y\rangle = 0$, donde concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X,Y)(p), N\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y, N\rangle(p) \\
&= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle(p) \\
&= \langle -\overline{\nabla}_x N, y\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. Donde obtemos que $A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^\top$. ■

Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja, $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão isométrica. Neste caso, $f(M) \subset \overline{M}$ é então denominada de hipersuperfície.

Sejam $f(M) \subset \overline{M}$ uma hipersuperfície, $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ é auto-ajunta, existe uma base ortonormal de $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de T_pM formada por autovetores com autovalores associados $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Supondo que M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas então o vetor η fica univocamente determinado. Se escolhermos uma base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ na orientação de M, então $\{e_1, \cdots, e_n, \eta\}$ é uma base na orientção de $\overline{M}$. Neste caso, chamamos os e_i de direções principais e os λ_i de curvaturas principais da imersão f. A aplicação $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\eta$ é chamada de **operador de Weingarten** associado à segunda forma fundamental. Além disso, vale a igualdade $A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^\top = -\overline{\nabla}_x N$.

Associado ao operador de Weingarten da imersão, existem n invariantes chamados de funções simétricas elementares S_r das curvaturas principais $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, definidas por:

$$S_r = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \lambda_1 \cdots \lambda_r, \ 0 \leqslant r \leqslant n.$$

A r-curvatura média H_r da imersão é definida por $H_r = S_r \big/ \binom{n}{r}$. Observe que H_1 é a curvatura média e H_n é a curvatura de Gauss-Kronecker de x.

Relacionaremos agora as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$. Se x, $y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$ são linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, segundo o plano gerado por x e y.

Teorema 2. *(Equação de Gauss) Sejam* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão isométrica,* $p \in M$ *e* x*,* y *vetores ortonormais de* T_pM*. Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \big\langle B(x, x), B(y, y)\big\rangle - |B(x, y)|^2.$$

No caso de hipersuperfície $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, a Equação de Gauss admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$, $\eta \in (T_pM)^\perp$ (com $|\eta| = 1$) e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual $A_\eta = A$ é diagonal, isto é, $A(e_i) = \lambda_i e_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Então, $H(e_i, e_i) = \langle A(e_i), e_j\rangle = \lambda_i$ e $H(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$. Assim $B(e_i, e_j) = 0$ e $B(e_i, e_i) = \lambda_i \eta$. Portanto, a Equação de Gauss escreve-se da seguinte forma

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j.$$

1.4 O método do referencial móvel

Nesta secção, veremos grande parte das definições e dos resultados apresentados até este momento sob o ponto de vista do método do referencial móvel. Grande parte dos resultados citados nesta secção podem ser encontrados em [8].

Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n, $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança de p onde estão definidos campos de vetores deferenciáveis $e_1, e_2, \cdots, e_n$ tais que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. O conjunto $\{e_i\}$ é denominado de um referencial (ortonormal, móvel) em U. Chamaremos de coreferencial associado a $\{e_i\}$ à família de formas diferenciais $\{\omega_i\}$ definidas por $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Lema 1 (Cartan)**.** *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão* n *e* $\omega_1, \cdots, \omega_r : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *formas lineares de* V *linearmente independentes, onde* $r \leqslant n$*. Suponhamos que existam formas lineares* $\theta_1, ..., \theta_r : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfazendo a seguinte condição:* $\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0$*. Então,*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \quad i, j = 1, \cdots, r, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Lema 2. *Sejam* U *um aberto da variedade* M *e* $\omega_1, ..., \omega_n$ *formas diferenciais linearmente independentes em* U. *Suponha que exista em* U *um conjunto de* 1*-formas diferenciais* $\{\omega_{ij}\}$ *satisfazendo as condições:*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}.$$

Então um tal conjunto é único.

Demonstração: Suponhamos que exista outro conjunto de formas $\{\widetilde{\omega}_{ij}\}$ satisfazendo

$$\widetilde{\omega}_{ij} = -\widetilde{\omega}_{ji}, \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \widetilde{\omega}_{kj}.$$

Então $\sum_k \omega_k \wedge (\widetilde{\omega}_{kj} - \omega_{kj}) = 0$. Pelo Lema de Cartan, temos

$$\widetilde{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B^j_{ki}\omega_i, \quad B^j_{ki} = B^j_{ik}.$$

Agora observe que,

$$\widetilde{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B^j_{ki}\omega_i = -(\widetilde{\omega}_{kj} - \omega_{kj}) = -\sum_i B^k_{ji}\omega_i.$$

Como as formas diferenciais $\omega_1, ..., \omega_n$ linearmente independentes, temos $B^j_{ki} = -B^k_{ji}$. Usando as simetrias obtidas, concluímos que

$$B^k_{ji} = -B^j_{ki} = -B^j_{ik} = B^i_{jk} = B^i_{kj} = -B^k_{ij} = -B^k_{ji}.$$

Daí $B^k_{ji} = 0$, donde obtemos que $\widetilde{\omega}_{kj} = \omega_{kj}$. ∎

O próximo lema mostrará a existência das formas $\{\omega_{ij}\}$, satisfazendo as condições do lema anterior, a partir da métrica Riemanniana de M.

Lema 3 (Levi-Civita)**.** *Escolhido um referencial* $\{e_i\}$ *em um aberto* $U \in M$ *de uma variedade Riemanniana* M*, existe em* U *um único conjunto de formas diferenciais* ω_{ij} *que são anti-simétricas* $(\omega_{ij} = -\omega_{ji})$ *e satisfazem* $d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}$.

Em particular, quando a variedade Riemanniana é o $\mathbb{R}^n$ temos outras equações adicionais:

$$\begin{aligned} de_i &= \sum_j \omega_{ij} e_j, \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \end{aligned}$$

As formas ω_{ij} são chamadas as **formas da conexão** de M, no referencial $\{e_i\}$, e as equações $d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}$ são chamadas as **equações de estrutura**. O interesse geométrico das formas da conexão é que elas permitem definir uma noção de derivação para campos de vetores em M.

Proposição 10. *Sejam X e Y campos suaves de vetores em M e $\{e_i\}$ um referencial em um aberto $U \in M$. Suponhamos que $Y = \sum_i y_i e_i$ e façamos*

$$\nabla_X Y = \sum_j \{dy_j(X) + \sum_i \omega_{ij}(X) y_i\} e_j.$$

Então $\nabla_X Y$ é independente do referencial $\{e_i\}$ e, portanto, globalmente definido em M.

A expressão $\nabla_X Y$ é chamada de derivada covariante de Y em relação a X. Na proposição abaixo, apresentamos algumas propriedades satisfeitas pela derivada covariante.

Proposição 11. *Sejam $f, g : M \to \mathbb{R}$ funções suaves, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos suaves em M e $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Então:*

1. $\nabla_{fX+gZ} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_Z Y$;

2. $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$;

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;

4. $\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = X(\langle Y, Z\rangle)$;

5. *Se $p \in M$, então $(\nabla_X Y)(p)$ depende somente do valor de X no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : (\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X(p)$.*

Obs 2. *A derivação covariante permite interpretar geometricamente as formas da conexão. A saber, da definição de derivada covariante segue que para todo campo X*

$$\langle \nabla_X e_i, e_j\rangle = \omega_{ij}(X).$$

Agora, introduziremos a curvatura em uma variedade Riemanniana sob o ponto de vista do método do referncial móvel. Considere o conjunto de formas $\{\Omega_{ij}\}$, definidas como segue:

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \tag{1.1}$$

As formas Ω_{ij} são chamadas as **formas de curvatura** de M no referencial de $\{e_i\}$. Prova-se (ver [8]) que para cada $p \in M$ e cada par de vetores $X, Y \in T_pM$, a matriz $\{\omega_{ij})_p(X,Y)\}$ é a matriz de uma aplicação linear

$$(R_{XY})_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$

que independe do referencial móvel $\{e_i\}$. R_{XY} é chamado o operador de curvatura M. Como $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, segue que $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ e, além disso, note que Ω_{ij} é uma forma bilinear alternada. Assim, temos as seguintes identidades para o operador curvatura. Se X, Y, Z, T são campos suaves de vetores em M, então

$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = -\langle R_{YX}Z, T\rangle,$$
$$\langle R_{XY}Z, T\rangle = -\langle R_{XY}T, Z\rangle.$$

Diferenciando exteriormente a equação

$$d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}.$$

Obtemos a Primeira Identidadede Bianchi, que é dada por $\sum_i \omega_i \wedge \Omega_{ij} = 0$. Diferenciando a equação (1.1) obtemos a Segunda Identidade de Bianchi, que é dada por

$$0 = d\Omega_{ij} + \sum_k \Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj}.$$

Como as formas Ω_{ij} são de grau dois, elas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l = -\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l.$$

Pela definição de R_{e_k,e_l} temos que

$$\langle R_{e_k,e_l}(e_i), e_j\rangle = \Omega_{ji}(e_k, e_l) = -\frac{1}{2}\sum_{s,t} R_{jist}\omega_s \wedge \omega_t(e_k, e_l) = R_{ijkl} = \langle R_{e_i,e_j}(e_k), e_l\rangle.$$

As formas de curvatura nos permite definir a curvatura seccional de uma forma alternativa, que passaremos a introduzir. Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois. Escolhamos um referencial ortonormal $e_1, \cdots, e_n$ em uma vizinhança de $p \in M$, de tal modo que e_1 e e_2 geram σ. Mostra-se (ver [8]) que o número $(\Omega_{12})_p(e_1, e_2)$ independe do referencial escolhido, ou seja, depende apenas do subespaço σ. O número

$$K_p(\sigma) = -(\Omega_{12})_p(e_1, e_2) = \langle (R_{e_1,e_2})_p(e_1), e_2\rangle$$

é chamado de curvatura seccional de M em p segundo σ. Prova-se que se X, Y são dois vetores linearmente independentes em $\sigma \subset T_pM$ então

$$K_p(\sigma) = \frac{\langle R_{X,Y}X, Y\rangle}{|X \wedge Y|^2}.$$

Diz-se que uma variedade Riemanniana M é isotrópica em $p \in M$ se todas as curvaturas seccionais em p possuem o mesmo valor, ou seja, o valor de $K_p(\sigma)$ não depende $\sigma \subset T_pM$.

Proposição 12. *Seja M uma varieadade Riemanniana, p um ponto de M e $\{e_i\}$ um referencial em uma vizinhança de p. Então M é isotrópica em p se e somente se*

$$\Omega_{ij} = -K_p\omega_i \wedge \omega_j. \tag{1.2}$$

Proposição 13 (Schur)**.** *Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional $(n \geqslant 3)$ conexa. Suponha que M é isotrópica para todo $p \in M$. Então M tem curvatura constante.*

Demonstração: Como M é isotrópica segue pela proposição anterior que

$$d\Omega_{ij} = -dK_p\omega_i \wedge \omega_j - K_p d\omega_i \wedge \omega_j + K_p\omega_i \wedge d\omega_j.$$

Por outro lado, a Segunda Identidade de Bianchi e as Equações de Estrutura fornecem

$$\begin{aligned}
d\Omega_{ij} &= -\sum_k \Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} \\
&= \sum_k K_p\omega_i \wedge \omega_k \wedge \omega_{kj} - \sum_k K_p\omega_{ik} \wedge \omega_k \wedge \omega_j \\
&= K_p\omega_i \wedge \left(\sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}\right) - K_p\left(\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_k\right) \wedge \omega_j \\
&= K_p\omega_i \wedge d\omega_j - K_p d\omega_i \wedge \omega_j.
\end{aligned}$$

Segue-se daí que, para quaisquer i e j temos

$$dK_p\omega_i \wedge \omega_j = 0.$$

Portanto, $dK_p = 0$ em M. Disto segue que $\nabla K_p = 0$, pela Proposição 2 obtemos que K_p não depende de p. ∎

1.4.1 Tensores em variedades riemannianas

Um tensor de ordem r em M é uma correspondência F que a cada ponto $p \in M$ associa uma forma r-linear

$$F_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Um tensor F é diferenciável em $p \in M$ se: escolhido um referencial $\{e_i\}$ em uma vizinhança U de p, e $\{\omega_i\}$ denota o coreferencial associado a $\{e_i\}$, as funções $F_{i_1 \cdots i_r} : U \to \mathbb{R}$ definidas por

$$F_{i_1 \cdots i_r}(q) = F_q(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r})$$

são diferenciáveis no ponto p. Mostra-se que esta condição não depende do referencial escolhido. Diz-se que F é diferenciável em M se é diferenciável em todos os pontos de M. As funções $F_{i_1 \cdots i_r}$ são chamadas as componentes do tensor F no referencial $\{e_i\}$. Neste trabalho, serão considerados apenas tensores diferenciáveis. Frequentemente, será conveniente deixar de indicar o ponto p nos cálculos. Por exemplo, se $X_1, \cdots, X_r$ são campos diferenciáveis de vetores em M, $F(X_1, \cdots, X_r)$ indica a função suave qua a cada p corresponde o valor $F_p((X_1)_p, \cdots, (X_r)_p)$.

Em uma variedade Riemanniana, é possível estender a noção de diferencial covariante a tensores de ordem r. Seja F um tensor de ordem r em uma variedade Riemanniana M. Seja $p \in M$ e $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança U de p, a diferencial covariante do tensor F, denotada por ∇F, é um tensor de ordem $r+1$ cujas componentes $F_{i_1 \cdots i_r;j} = \nabla F(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}, e_j)$ no referencial $\{e_i\}$ são definidas como segue:

$$\begin{aligned}
\sum_j F_{i_1 \cdots i_r;j}\omega_j &= dF_{i_1 \cdots i_r} + \sum_j F_{j i_2 \cdots i_r}\omega_{j i_1} + \sum_j F_{i_1 j i_3 \cdots i_r}\omega_{j i_2} \\
&\quad + \cdots + \sum_j F_{i_1 \cdots i_{r-1} j}\omega_{j i_r}.
\end{aligned}$$

Prova-se (ver referência [8]) que,

$$\nabla F(X_1, \cdots, X_r, Y) = dF(X_1, \cdots, X_r)(Y) - F(\nabla_Y X_1, \cdots, X_r) - \cdots - F(X_1, \cdots, \nabla_Y X_r).$$

Esta igualdade mostra que a definição de ∇F não depende do referencial escolhido. A derivação covariante permite estender às varieadades Riemannianas certos operadores diferenciais. Listaremos alguns destes operadores.

Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Sabemos que o ∇f é um campo vetorial em M definido por

$$df_p(X) = \langle \nabla f(p), X \rangle_p,$$

para todo $p \in M$ e todo $X \in T_pM$. Considerando um referencial $\{e_i\}$ em um aberto $U \subset M$ contendo p, podemos escrever $df = \sum_i f_i \omega_i$. Note que,

$$\nabla f = \sum_i \langle \nabla f, e_i \rangle e_i = \sum_i df(e_i) e_i = \sum_i f_i e_i.$$

A diferencial covariante de df é um tensor de ordem 2, logo pode ser escrito na forma

$$\nabla(df) = \sum_{i,j} f_{i,j} \omega_i \wedge \omega_j.$$

Pela definição de diferencial covariante, segue que $\sum_j f_{i,j}\omega_j = df_i + \sum_j f_j \omega_{ji}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} f_p(e_i, e_j) &= \langle \operatorname{Hess} f_p(e_i), e_j \rangle_p \\
&= \langle \operatorname{Hess} f_p(e_j), e_i \rangle_p \\
&= \langle \nabla_{e_j} \nabla f, e_i \rangle_p \\
&= e_j \langle \nabla f, e_i \rangle (p) - \langle \nabla f, \nabla_{e_j} e_i \rangle_p \\
&= e_j(f_i)(p) - \sum_k f_k(p) \langle e_k, \nabla_{e_j} e_i \rangle_p \\
&= df_i(p)(e_j) + \sum_k f_k(p) \omega_{ki}(e_j) \\
&= f_{i,j}(p) = \nabla(df)_p(e_i, e_j).
\end{aligned}$$

Desta forma, $\nabla(df)_p = \operatorname{Hess} f_p$. Como $\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f)$, segue que $\Delta f = \sum_i f_{i,i}$.

Proposição 14. *Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se p é um ponto de máximo para a função f, então para todo $v \in T_pM$ temos*

$$d^2 f_p(v) \leqslant 0.$$

Demonstração: Sendo $df = \sum_i f_i \omega_i$, temos como consequência que

$$d^2 f = \sum_{i,j} f_{i,j} \omega_j \wedge \omega_i - \sum_{i,j} f_i \omega_i \wedge \omega_{ji}.$$

Como p é ponto de máximo para a função f, temos $\nabla f(p) = 0$. Donde concluímos que $f_i(p) = 0$, para $1 \leqslant i \leqslant n$. Pela Proposição 5, obtemos

$$d^2 f_p(\nu) = \sum_{i,j} f_{i,j}(p)\omega_j \wedge \omega_i(\nu,\nu) = \nabla(df)_p(\nu,\nu) = \operatorname{Hess} f_p(\nu) \leqslant 0$$

para todo $\nu \in T_p M$. ∎

1.4.2 Imersões riemannianas

Seja M^n uma variedade Riemanniana e seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+q}$ uma imersão isométrica. Dado $p \in M$, escolheremos uma vizinhança $U \subset M$ de p de tal modo que x restrita a U seja injetiva. Seja $V \subset \overline{M}$ uma vizinhança de p em $\overline{M}$ tal que $x(U) \subset V$ e que seja possível definir um referencial ortornormal adaptado $\{e_A\}$, $1 \leqslant A \leqslant n+q$, isto é, restritos a $x(U)$ os vetores $e_1, \cdots, e_n$ são tangentes a M. Faremos a convenção usual de identificar $U \subset M$ com $x(U) \subset \overline{M}$, e utilizaremos os seguintes domínios para os índices: $1 \leqslant A, B, C, \cdots \leqslant n+q$; $1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n$ e $n+1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma, \cdots \leqslant n+q$.

O espaço tangente a $\overline{M}$ no ponto p, denotado por $T_p\overline{M}$, decompõe-se em uma soma direta $T_p(\overline{M}) = T_p(M) \oplus N_p(M)$, onde identificamos $dx_p(M) \approx T_p(M)$ e denotamos por $N_p(M)$ o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p\overline{M}$. O subespaço $N_p(M)$ é chamado de espaço normal da imersão x em p. Um campo normal ν é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor $\nu(p) \in N_p(M)$, de tal modo que para todo referencial adaptado em uma vizinhança $V \subset \overline{M}$ de p, as funções ν_α dadas por $\nu = \sum_\alpha \nu_\alpha e_\alpha$ sejam diferenciáveis em p. Esta condição não depende da escolha do referencial.

No aberto V, as formas ω_A e ω_{AB} $(1 \leqslant A, B \leqslant n+q)$ satisfazem as equações de estrutura:

$$d\omega_A = \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA},$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}, \quad \overline{\Omega}_{AB} = -\frac{1}{2}\sum_{CD} \overline{R}_{ABCD}\omega_C \wedge \omega_D.$$

Como o refencial é adaptado, as restrições destas formas a $U \subset V$ satisfazem $\omega_\alpha = 0$. Decorre daí que

$$0 = d\omega_\alpha = \sum_i \omega_i \wedge \omega_{i\alpha}.$$

Pelo Lema de Cartan,

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}.$$

A forma quadrática $II^\alpha = \sum_{i,j} h^\alpha_{ij}\omega_i\omega_j = \sum_i \omega_{i\alpha}\omega_i$ é a segunda forma quadrática da imersão x na direção do vetor e_α. Seja ν um campo unitário normal em M. É possível escolher um referencial ortonormal adaptado $\{e_\alpha\}$ em U de modo que $e_{n+1} = \nu$. A segunda forma quadrática de x, na direção ν, é definifa como $II^\nu = II^{n+1}$. Mostra-se que a definição não depende da escolha do referencial. De fato, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s com $\alpha(0) = p$. Sem perda de generalidade, também podemos supor que $\alpha'(s) = e_1$. Fazendo $\alpha'(0) = u$, temos

$$\begin{aligned} II^\nu_p(u) = II^{n+1}_p(e_1) &= \left(\sum_i \omega_{i\alpha}\omega_i\right)(e_1) = \sum_i \langle \overline{\nabla}_{e_1} e_i, e_{n+1}\rangle \omega_i(e_1) \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_1} e_1, \nu\rangle = \langle \overline{\nabla}_{\alpha'(0)}\alpha'(s), \nu\rangle = -\langle u, \overline{\nabla}_u \nu\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, II_ν não depende da escolha do referencial. Além disso, II^ν está globalmente definida. No caso particular $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+q}$, o referencial $\{e_A\}$ satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} dx &= \sum \omega_A e_A, \\ de_A &= \sum \omega_{AB} e_B, \\ d\omega_A &= \sum \omega_B \wedge \omega_{BA}, \\ d\omega_{AB} &= \sum \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}. \end{aligned}$$

As restrições das formas ω_A e ω_{AB} ao aberto $U \subset V$ satisfazem as equações acima e, além disso, temos a condição adicional $\omega_\alpha = 0$ para todo α.

Seja $A^\nu_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ a transformação linear auto-adjunta, associada à forma quadrática II^ν_p. Assim, $\langle A^\nu_p(u), u\rangle = II^\nu_p(u) = -\langle u, \overline{\nabla}_u \nu\rangle$. Às vezes, é conveniente usar a aplicação bilinear $B_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow N_pM$ dada por

$$\langle B_p(X, Y), \nu\rangle_p = \langle A^\nu_p(X), Y\rangle_p, \quad X, Y \in T_pM, \quad \nu \in N_p(M).$$

Desta forma, no referencial ortonormal adaptado B é dada por

$$B(X, Y) = \sum_\alpha \left(\sum_{ij} h^\alpha_{ij}\omega_i(X)\omega_j(Y)\right) e_\alpha.$$

A igualdade mostra que B é uma aplicação bilinear simétrica. Usando estes fatos, provaremos que a esfera $\mathbb{S}^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ centrada na origem possui curvatura constante igual 1. Escolhendo um referencial ortonormal adaptado $e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, teremos

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{i,(n+1)} \wedge \omega_{(n+1),j} \text{ onde } i, j, k = 1, \cdots, n.$$

Donde concluímos que,

$$\Omega_{ij} = \omega_{i,(n+1)} \wedge \omega_{(n+1),j}.$$

Podemos escolher o referencial de tal forma que $e_{n+1} = -x$, o vetor posição da esfera $\mathbb{S}^n(1)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então,

$$\sum_i \omega_{(n+1),i} e_i = de_{n+1} = -dx = -\sum_i \omega_i e_i.$$

Com isto, obtemos $\omega_{(n+1),i} = -\omega_i$. Decorre daí que $\Omega_{ij} = -\omega_i \wedge \omega_j$, pela Proposição 12 concluímos que $\mathbb{S}^n(1)$ possui curvatura seccional constante 1.

1.4.3 Um modelo para o espaço hiperbólico

As variedades Riemannianas mais simples, são as variedades de curvatura seccional constante. Dentre elas, a esfera e o espaço hiperbólico ocupam uma posição especial. A esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ pode ser isometricamente mergulhada em $\mathbb{R}^{n+2}$, este fato facilita a utilização do método do referencial móvel em questões relativas à esfera. Mostraremos que é possível mergulhar isometricamente o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ em $\mathbb{R}^{n+2}$, munido da métrica de Lorentz.

A métrica de Lorentz é definida do seguinte modo: consideremos em $\mathbb{R}^{n+2}$ a base canônica $a_0 = (1, 0, \cdots, 0), a_0 = (0, 1, \cdots, 0) \cdots, a_{n+1} = (0, \cdots, 0, 1)$ e introduzamos a forma bilinear simétrica $(,)$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ definida por

$$(a_i, a_j) = \delta_{ij}, \ (a_0, a_i) = 0, \ (a_0, a_0) = -1, \text{ onde } 1 \leqslant i, j \leqslant n + 1.$$

A forma bilinear $(,)$ define um produto interno em $\mathbb{R}^{n+2}$ (que não é positivo definido), denominado de métrica de Lorentz. Indicaremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ munido da métrica $(,)$ por E^{n+2}.

Seja $U \subset E^{n+2}$ um aberto e $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ um referencial móvel em U, satisfazendo as condições:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (e_0, e_i) = 0, \quad (e_0, e_0) = -1. \tag{1.3}$$

Sejam $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, \omega_{n+1}$ as formas diferenciais, definidas em U, que em cada $p \in U$ formam a base dual da base $\{e_0(p), e_1(p), \cdots, e_{n+1}(p)\}$. Agora, considere as formas ω_{AB} defindas por

$$de_A = \sum \omega_{AB} e_B,$$

onde A, B, C indicarão índices que variam de 0 a $n+1$. Se $x : E^{n+2} \longrightarrow E^{n+2}$ denota a aplicação identidade, segue pela definição dos ω_A que

$$dx = \sum \omega_A e_A.$$

Derivando exteriormente as duas equações acima, obtemos as equações de estrutura de E^{n+2}, a saber:

$$d\omega_A = \sum \omega_A \wedge \omega_{BA},$$
$$d\omega_{AB} = \sum \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}.$$

Além disto,

$$2(de_0, e_0) = 2\left(\sum \omega_{0,A} e_A, e_0\right) = -\omega_{0,0}.$$

Como $(e_0, e_0) = -1$, segue que $\omega_{0,0} = 0$. De modo análogo, usando que $(e_i, e_j) = 0$ e que $(e_i, e_0) = 0$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$, obtemos

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \ \ \omega_{0,i} = \omega_{i,0}.$$

Considere agora, o conjunto dos pontos $x \in E^{n+2}$ tais que $(x, x) = -1$. Escrevendo $x = x_0 a_0 + x_1 a_1 + \cdots + x_{n+1} a_{n+1}$, temos que

$$(x, x) = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = -1.$$

Um tal conjunto é um "hiperbolóide de duas folhas" em E^{n+2}, a componente conexa do hiperbolóide correspondente a $x_0 > 0$ será indicada por $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$. Como $(x, dx) = 0$, o espaço tangente em cada ponto de $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ é normal a x. Por outro lado, como $(x, x) = -1$ é possível escolher uma base $\{b_0, b_1, \cdots, b_{n+1}\}$ de E^{n+2} com

$$b_0 = x, \ \ (b_i, b_0) = 0, \ \ (b_i, b_j) = \delta_{ij} \text{ para quaisquer } i, j = 1, \cdots, n+1.$$

Decorre daí que $T_x\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ é gerado por $\{b_1, \cdots, b_{n+1}\}$, isto é, a métrica induzida por E^{n+2} em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ é Riemanniana. De agora por diante, usaremos referenciais locais e_A em E^{n+2} que satisfazem (1.3) e que são adaptados a $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$, isto é, restritos a $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ os campos $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ são tangentes e $e_0 = x$. De modo análogo, como foi feito para a esfera, prova-se que o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ possui curvatura seccional constante igual a -1. Provaremos agora, alguns resultados auxiliares que serão importantes para provar o principal resultado do Capítulo 2. Na prova da proposição abaixo, estamos usando as identificações discutidas anteriormente.

Proposição 15. *Seja* $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$*uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta orientável, então existe um ponto* $p \in M$ *onde todas as curvaturas principais possuem o mesmo sinal.*

Demonstração: Considere a função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \langle x(p), x(p)\rangle$, como M é compacta existe um ponto $p \in M$ tal que f assume o valor máximo. Dado $v \in T_pM$, com $|v| = 1$, consideremos uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ de modo que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Como p é ponto de máximo, segue que $(f \circ \alpha)'(0) = 0$ e $(f \circ \alpha)''(0) \leqslant 0$. Além disso, observe que

$$(f \circ \alpha)'(t) = 2\langle \alpha(t), \alpha'(t)\rangle.$$

Assim, quando $t = 0$ temos que $\langle p, v\rangle = 0$. Como v foi tomado arbitrário, segue que p está na direção normal. Desta forma, podemos supor que $N(p) = \dfrac{p}{|p|}$. Por outro lado,

$$(f \circ \alpha)''(0) = 2\langle v, v\rangle + 2\langle p, \alpha''(0)\rangle \leqslant 0.$$

Donde concluímos que

$$1 + |p|\langle N(p), \alpha''(0)\rangle \leqslant 0 \Longrightarrow II(v) \leqslant -\frac{1}{|p|} < 0.$$

Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ a base que diagonaliza o operador de Weingarten $A_p : T_pM \to T_pM$ e $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ as curvaturas principais. Assim,

$$II(e_i) = \langle A_p(e_i), e_i\rangle = \lambda_i < 0.$$

Portanto, as curvaturas principais são negativas. Se tivessemos escolhido $N(p) = -\dfrac{p}{|p|}$, obteríamos que as curvaturas principais são positivas. De qualquer forma, todas possuem o mesmo sinal. ■

Provaremos, na proposição a seguir, uma versão do resultado apresentado acima para imersões no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ ou num hemisfério aberto da esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Denotaremos por $\mathbb{S}^{n+1}(1)^+$ o conjunto dos pontos da esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ tais que $x_{n+2} > 0$.

Proposição 16. *Seja* $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta orientável, onde* $\overline{M}^{n+1}$ *denota* $\mathbb{S}^{n+1}(1)^+$ *ou* $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$*. Então, existe* $p \in M^{n-1}$ *onde todas as curvaturas principais possuem o mesmo sinal.*

Demonstração: Provaremos somente o caso da imersão num hemisfério aberto da esfera. O caso da imersão no espaço hiperbólico é feito de modo análago. Considere a função altura $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ na direção do vetor $a_{n+2} = (0, \cdots, 0, 1)$, ou seja, $f(p) = \langle x(p), a_{n+2} \rangle$. Como M^n é compacta, f atinge o valor máximo num ponto $q \in M$. Então, $df_q = 0$ e $d^2 f_q \leqslant 0$. Seja $U \subset M$ uma vizinhança de q tal que a restrição de x a U é injetiva. Agora, consideremos uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n+2}$ de $x(q)$ tal modo que $V \cap \mathbb{S}^{n+1}(1)^+ \supset x(U)$ e seja possível definir um referencial móvel $\{e_0, e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ adaptado a x, ou seja, restritos a $x(U)$ os campos $\{e_1, \cdots, e_n\}$ são tangentes e $e_{n+1} = N$ é normal a $x(U)$ e tangente a $\mathbb{S}^{n+1}(1)^+$. Além disso, escolha o referencial de tal forma que e_0 restrito a $x(U)$ seja a inclusão.

Restringiremos a $x(U) \subset V$ as formas do coreferencial associado e as formas de conexão. No que segue, usaremos a seguinte convenção de índices: $1 \leqslant i, j, k, \cdots \leqslant n$ e $0 \leqslant A, B, C, \cdots \leqslant n + 1$.

Sendo $\omega_{n+1} = 0$, segue pelo Lema de Cartan que $0 = d\omega_{n+1} = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{j(n+1)}$. Desta forma, podemos inferir que $\omega_{i(n+1)} = \sum_j h_{ij}\omega_j$ onde $h_{ij} = h_{ji}$.

Por outro lado, escrevendo $a_{n+2} = \sum_i \nu_i e_i + \nu_0 e_0 + \nu_{n+1} e_{n+1}$ obtemos a seguinte expressão para $f = \langle e_0, a_{n+2} \rangle = \nu_0$. Daí, $d(\nu_0)_q = 0$ e $d^2(\nu_0)_q \leqslant 0$. Além disso, como é a_{n+2} constante temos

$$0 = da_{n+2} = \sum_i d\nu_i e_i + d\nu_0 e_0 + d\nu_{n+1} e_{n+1} + \sum_i \nu_i de_i + \nu_0 de_0 + \nu_{n+1} de_{n+1}.$$

Sendo $\omega_0 = \omega_{n+1} = 0$ restritas a $x(U)$, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_i d\nu_i e_i + d\nu_0 e_0 + d\nu_{n+1} e_{n+1} \\
&+ \sum_i \left(\sum_A \omega_{iA} e_A + \omega_{i0} e_0 \right) \\
&+ \nu_{n+1} \left(\sum_A \omega_{(n+1)A} e_A + \omega_{(n+1)0} e_0 \right) \\
&+ \nu_0 \left(\sum_i \omega_{0i} e_i + \omega_{0(n+1)} e_{n+1} + \underbrace{\omega_{00}}_{0} e_0 \right).
\end{aligned}$$

Como e_0, restrito a $x(U)$, é a inclusão vale a seguinte igualdade:

$$\sum_i \omega_i e_i = de_0 = \sum_i \omega_{0i} e_i + \omega_{0(n+1)} e_{n+1}.$$

Da igualdade acima, concluímos que $\omega_{0(n+1)} = 0$ e $\omega_i = \omega_{0i}$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \left(dv_j + \sum_i v_i \omega_{ij} + v_0 \omega_{0j} + v_{n+1} \omega_{(n+1)j} \right) e_j \\ &+ \left(dv_0 + \sum_i v_i \omega_{i0} \right) + \left(dv_{n+1} + \sum_i v_i \omega_{i(n+1)} \right) e_{n+1}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} dv_j &= \sum_i v_i \omega_{ji} - v_0 \omega_{0j} - v_{n+1} \omega_{(n+1)j} \,; \\ dv_0 &= -\sum_i v_i \omega_i \,; \\ dv_{n+1} &= -\sum_i v_i \omega_{(n+1)i}. \end{aligned}$$

Como $d(v_0)_q = 0$, segue que $v_1(q) = \cdots = v_n(q) = 0$. Agora observe que

$$\begin{aligned} -d^2(v_0)_q &= \sum_j (dv_j)_q \omega_j \\ &= \sum_{j,i} v_i(q) \omega_{ji} \omega_j - \sum_j v_0(q) \omega_{0j} \omega_j - \sum_j v_{n+1}(q) \omega_{(n+1)j} \omega_j \\ &= -\sum_j v_n(q) \omega_{nj} \omega_j - \sum_j v_{n+1}(q) \omega_{(n+1)j} \omega_j. \end{aligned}$$

Fazendo uso da igualdade $\omega_{0j} = \omega_j$, obtemos

$$\begin{aligned} -d^2(v_0)_q &= \sum_j v_{n+1}(q) \omega_{j(n+1)} \omega_j - \sum_j v_0(q) (\omega_j)^2 \\ &= v_{n+1}(q) \sum_{j,i} h_{ij} \omega_i \omega_j - v_0 \sum_j (\omega_j)^2. \end{aligned}$$

Podemos supor que a base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ diagonaliza o operador de Weingarten. Daí, $h_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$. Portanto,

$$-d^2(v_0)_q = \sum_i (\lambda_i v_{n+1} - v_0)(\omega_i)^2 \geqslant 0.$$

Aplicando a desigualdade acima em cada e_i, tem-se que $\lambda_i v_{n+1} \geqslant v_0$. Como estamos considerando $v_0 > 0$, temos para quaisquer i, j que

$$\lambda_i \lambda_j (v_{n+1})^2 \geqslant (v_0)^2 \Longrightarrow \lambda_i \lambda_j > 0.$$

Isto prova que todas as curvaturas principais possuem o mesmo sinal. ■

Capítulo 2

O operador L_r

Seja $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade Riemanniana orientável simplesmente conexa de curvatura seccional constante c. Uma vez que $\overline{M}$ é orientável, podemos considerar uma forma de volume $d\overline{M}$ globalmente definida sobre $\overline{M}$. Considere agora, uma imersão isométrica $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ de uma variedade Riemanniana orientável compacta conexa M^n. Sejam A o operador de Weingarten da imersão x, S_r a r-ésima função simétricas elementar associada a A e $H_r = \frac{S_r}{\binom{n}{r}}$ a r-ésima curvatura média. Lembremos que, as funções simétricas elementares S_r associadas a A podem ser definidas usando o polinômio característico de A, a saber:

$$\det(tI - A) = (t - k_1) \cdot \ldots \cdot (t - k_n) = \sum_{r}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}.$$

Na proposição a seguir, estabelecemos uma desigualdade envolvendo as curvaturas médias de ordem superior. A demonstração da proposição pode ser encontrada em [13].

Proposição 17. *Se as curvaturas* $H_1, \cdots, H_{r-1}$ *são não negativas e* H_r *é postivo para algum* $1 < r \leqslant n$*, então*

$$H_1 \geqslant H_2^{\frac{1}{2}} \geqslant H_3^{\frac{1}{3}} \geqslant \cdots \geqslant H_r^{\frac{1}{r}}.$$

Além disso, a igualdade ocorre somente nos pontos umbílico.

As transformações clássicas de Newton P_r são definidas indutivamente por:

$P_0 = I$

$P_r = S_r I - A \cdot P_{r-1}.$

Segue-se da fórmula de recorrência que $P_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j$, onde $S_0 = 1$. Como A é um operador auto-adjunto, segue que cada A^j também é. Por outro lado, como a soma de operadores auto-adjuntos é um operador auto-adjunto segue da expressão obtida que, para cada r, P_r é um operador auto-adjunto.

Sejam $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de A, correspondendo respectivamente aos autovalores $k_1, \cdots, k_n$. Da expressão obtida para P_r, segue que

$$P_r(e_i) = \left(\sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} {k_i}^j \right) e_i.$$

Assim, cada P_r possui os mesmos autovetores de A. Além disso, temos que os autovalores de P_n são da forma

$$\lambda_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j S_{n-j} k_i^j, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Fazendo $n - j = r$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} S_r k_i^{n-r} \\ &= (-1)^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r k_i^{n-r} \\ &= \prod_{j=1}^{n} (k_j - k_i) = 0. \end{aligned}$$

Como todos os autovalores associados a base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n\}$ são nulos, segue que $P_n = 0$. Representando por A_i a restrição da transformação A ao subespaço normal a e_i, e por $S_r(A_i)$ a r-função simétrica associada a A_i. Considerando $S_{n+1} = 0$, no lema abaixo apresentamos alguns resultados clássicos sobre os autovalores do operador P_r.

Lema 4. *Para cada $1 \leqslant r \leqslant n-1$, vale:*

(1) $P_r(e_i) = S_r(A_i) e_i$, *para cada* $1 \leqslant i \leqslant n$;

(2) $\mathrm{tr}(P_r) = \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (n-r) S_r$;

(3) $\mathrm{tr}(AP_r) = \sum_{i=1}^{n} k_i S_r(A_i) = (r+1) S_{r+1}$;

(4) $\mathrm{tr}(A^2 P_r) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 S_r(A_i) = S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}$,

onde tr *denota o traço do operador.*

Demonstração: Para provarmos o item (1), faremos indução sobre r. Para $r = 1$ temos

$$P_1(e_i) = (S_1 I - A)e_i = (k_1 + \cdots + k_n)e_i - k_i e_i = (k_1 + \cdots + \widehat{k_i} + \cdots + k_n)e_i = S_1(A_i)e_i.$$

Agora suponhamos que o resultado é válido para $r - 1$, isto é,

$$P_{r-1}(e_i) = S_{r-1}(A_i)e_i.$$

Desta forma, temos $P_r(e_i) = S_r I(e_i) - A(P_{r-1}(e_i)) = (S_r - S_{r-1}(A_i)\cdot k_i)\, e_i = S_r(A_i)e_i$.

Para o item (2), observe que os autovalores de P_r associados a base ortonormal $e_1, \cdots, e_n$ são $S_r(A_1), \cdots, S_r(A_n)$, respectivamente. Assim $\mathrm{tr}(P_r) = \sum_{i=1}^{n}, S_r(A_i)$ o que prova a primeira igualdade do item (2). Para provar a segunda igualdade, considere S_r e $S_r(A_i)$ como polinômios homogêneos nas variáveis k_i. Se $i \notin \{j_1, \cdots, j_r\}$, cada monômio $k_{j_1} \cdots k_{j_r}$ de S_r é também um monômio de $S_r(A_i)$. Assim, cada monômio aparece exatamente $n - r$ vezes no somatório $\sum_{i=1}^{n} S_r(A_i)$. Reciprocamente, cada monômio de $S_r(A_i)$ é um monômio de S_r. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (n - r)S_r$$

o que prova a segunda igualdade do item (2).

Segue do item (1) que os autovalores de AP_r, associados a base ortonormal $\{e_1, \cdots, e_n\}$ são respectivamente $k_1 S_r(A_1), \cdots, k_r S_r(A_n)$. Assim $\mathrm{tr}(AP_r) = \sum_{i=1}^{n} k_i S_r(A_i)$, o que prova a primeira igualdade do item (3). Da definição do operador P_r segue que

$$\mathrm{tr}(AP_r) = \mathrm{tr}(S_{r+1} I) - \mathrm{tr}(P_{r+1}) = nS_{r+1} - (n - r - 1)S_{r+1} = (r + 1)S_{r+1}.$$

Concluindo a prova do item (3). Novamente pelo item (1), temos que os autovalores de $A^2 P_r$ são respectivamente $k_1^2 S_r(A_1), \cdots, k_r^2 S_r(A_n)$. Assim

$$\mathrm{tr}(A^2 P_r) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 S_r(A_i)$$

o que prova a primeira igualdade do item (3). Da igualdade $P_{r+1} = S_{r+1} I - AP_r$ concluímos que

$$\mathrm{tr}(A^2 P_r) = \mathrm{tr}(S_{r+1} A) - \mathrm{tr}(AP_{r+1}) = S_1 S_{r+1} - (r + 2)S_{r+2}.$$

Finalizando a demonstração do lema. ∎

Associado a cada transformação de Newton P_r, da imersão $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, temos o operador diferencial de segunda ordem L_r definido abaixo:

$$L_r(f) = \mathrm{tr}(P_r \mathrm{Hess}\,(f)).$$

Quando $\overline{M}^{n+1}(c)$ é uma variedade Riemanniana orientável simplesmente conexa de curvatura seccional constante c, Rosenberg provou em [12] como uma consequência da equação de Codazzi que

$$L_r(f) = \mathrm{div}\,(P_r \nabla f).$$

Uma consequência muito útil deste fato é dada na seguinte proposição.

Proposição 18. *Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta sem bordo em um espaço forma. Então,*

$$\int_M L_r(f)dM = 0 \text{ e } \int_M fL_r(f)dM = -\int_M \langle P_r\nabla f, \nabla f\rangle dM.$$

Demonstração: Como podemos escrever L_r na forma divergente $L_r(f) = \mathrm{div}\,(P_r\nabla f)$, segue diretamente do Teorema da Divergência que $\int_M L_r(f)dM = 0$. Para provar a segunda igualdade, observe que das propriedades do operador divergente temos

$$\mathrm{div}\,(f \cdot P_r\nabla f) = f \cdot L_r(f) + \langle \nabla f, P_r\nabla f\rangle.$$

Pelo Teorema da Divergência, segue que

$$0 = \int_M \mathrm{div}\,(f \cdot P_r\nabla f)dM = \int_M f \cdot L_r(f)dM + \int_M \langle \nabla f, P_r\nabla f\rangle dM.$$

Donde obtemos a igualdade desejada. ∎

Na próxima proposição, provaremos que sob certas condições o operador L_r é elíptico, o que será de fundamental importância para os principais resultados deste trabalho.

Proposição 19. *Seja $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientável compacta conexa sem bordo, onde $\overline{M}^{n+1}(c)$ representa o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ ou um hemisfério aberto da esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço hiperbó- lico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$. Se S_{r+1} é positivo, então para todo $1 \leqslant j \leqslant r$*

1. *cada operador L_j é elíptico;*

2. *cada H_j é positivo.*

Demonstração: Pelas Proposições 15 e 16, temos que existe um ponto $p \in M$ onde todas as curvaturas principais de x possuem o mesmo sinal. Além disso, podemos considerar um campo de vetores normal unitário de modo que todas as curvaturas principais sejam positivas em p. Por continuidade, as curvaturas principais são positivas em bola aberta U centrada em p. Consequentemente, as funções $\{S_i(A_j), S_i, H_i\}$ são positivas em U. Para provar o item 1, note que a elipticidade de L_j é equivalente a positividade da forma quadrática associada a P_j, o qual é equivalente a positividade dos autovalores $S_j(A_i)$ de P_j. Assim, provaremos isto. Para isto, considere o conjunto K_j consistindo de todos pontos de M onde as funções $S_j(A_i)$ são positivas, $1 \leqslant i \leqslant n$.

É claro que, para cada j temos $U \subset K_j$ e cada K_j é aberto, devido a continuidade das funções $S_j(A_i)$. Representando por G_j a componente conexa de K_j que contém U, temos o seguinte:

Lema 5. *Para cada* j*,* $G_{j+1} \subset G_j$*.*

Demonstração: Para cada i, defina o conjunto aberto

$$V_i = \bigcap_{j=1}^{i} G_j.$$

É claro que as funções $S_j(A_k)$, onde $1 \leqslant k \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant i$, são positivas em V_i. Daí, para cada ponto de V_i segue da Proposição 17 que

$$H_1(A_k) \geqslant H_2(A_k)^{\frac{1}{2}} \geqslant H_3(A_k)^{\frac{1}{3}} \geqslant \cdots \geqslant H_r(A_k)^{\frac{1}{r}},\ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2.1}$$

ocorrendo a igualdade somente nos pontos umbílicos. Por continuidade, as desigualdades são válidas nos pontos da fronteira de V_i. Agora suponhamos que um ponto q da fronteira de V_i pertença a G_i, de (2.1) segue que $q \in G_j$ para $1 \leqslant j \leqslant n$. Logo, $q \in V_i$ que é uma contradição pois $q \in \partial V_i$. Como $V_i \subset G_i$, isto mostra que a fronteira de V_i está contida na fronteira de G_i. Sendo $V_i = \overline{V_i} \bigcap G_i$, segue que V_i é um conjunto fechado em G_i. Por outro lado, V_i é aberto em G_i. Como V_i é não vazio, temos pela conexidade de G_i que $G_i = V_i$. Pela definição de V_{j+1} temos que $G_{j+1} = V_{j+1} \subset G_j$. Isto completa a prova do lema. ∎

Provaremos agora que G_r é fechado. Tome um ponto $q \in \partial G_r$. Por continuidade, $S_r(A_i) \geqslant 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Usando o lema anterior, temos que $q \in \overline{G_j}$ para $1 \leqslant j \leqslant r$. Assim, no ponto q, $S_j(A_i) \geqslant 0$ para $1 \leqslant j \leqslant r$ e $1 \leqslant i \leqslant n$. Observe que para cada i vale a igualdade

$$S_{r+1} = k_i S_r(A_i) + S_{r+1}(A_i).$$

Mostraremos que $S_j(A_i) > 0$, no ponto q. Suponha por contradição que $S_r(A_i) = 0$ em q, da equação acima segue $S_{r+1} = S_{r+1}(A_i)$. Como $S_{r+1} > 0$, segue que $S_{r+1}(A_i) > 0$ e, consequentemente, $H_{r+1}(A_i) > 0$. Por outro lado, como $q \in \overline{G_j}$ para $1 \leqslant j \leqslant r$ temos que $H_k(A_i) \geqslant 0$ para todo $1 \leqslant k \leqslant r$. Pela proposição 17 temos que

$$H_1(A_i) \geqslant H_2(A_i)^{\frac{1}{2}} \geqslant \cdots \geqslant H_r(A_i)^{\frac{1}{r}} \geqslant H_{r+1}(A_i)^{\frac{1}{r+1}} > 0.$$

Assim $S_r(A_i) = S_r(A_i)\binom{n-1}{r} > 0$. O que é uma contradição, portanto $S_r(A_i) > 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ em q. Donde concluímos que $q \in G_r$, assim G_r é fechado em M. Como G_r é fechado e aberto em M e não vazio, segue da conexidade de M que $G_r = M$. Pelo Lema 5, temos que $M \subset G_r \subset \cdots \subset G_1 \subset M$. Assim $G_j = M$, para $1 \leqslant j \leqslant r$. Da definição de G_j, segue que $S_j(A_k) > 0$ para $1 \leqslant j \leqslant r$ e $1 \leqslant k \leqslant n$ o que prova o item 1. Pelo Lema 4 temos $\sum_{i=1}^{n} S_j(A_i) = (n-j)S_j$ assim para $1 \leqslant j \leqslant r$ segue que $S_j > 0$. Logo H_j é positivo, o que prova o item 2. ■

Capítulo 3

O problema variacional

Ao longo deste capítulo, M^n denotará uma variedade Riemanniana orientável compacta conexa sem bordo e $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão isométrica.

Definição 9. *Uma variação de* x *é uma aplicação diferenciável* $X : I \times M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ *tal que para cada* $t \in I$ *a aplicação* $X_t(\,.\,) = X(t,\,.\,) : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ *é uma imersão e* $X_0 = x$.

A função volume associada à variação X é a função $V : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V(t) = \int_{[0,t]\times M} X^* d\overline{M}.$$

Dizemos que a variação X preserva volume se $V(t) = V(0)$ para todo $t \in I$.

Definição 10. *O campo* $\dfrac{\partial X(t,p)}{\partial t}$ *é chamado de campo variacional de* X. *Denotaremos por* $\dfrac{\partial X}{\partial t}^T$ *a componente tangencial do campo variacional de* X.

Seja N um campo de vetores normal unitário ao longo de x, ao longo deste trabalho usaremos a seguinte notação

$$f = \left\langle \frac{\partial X(t,p)}{\partial t}\Big|_{t=0}, N \right\rangle.$$

Para cada $r \in \{0, 1, ..., n\}$, considere os funcionais

$$A_r = \int_M F_r(S_1, ..., S_r) dM$$

onde as funções F_r são definidas recursivamente por

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = S_1$$
$$F_r = S_r + \frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2}, \text{ para } 2 \leqslant r \leqslant n-1.$$

Considere o problema varicional de minimizar A_r para variações de x que preservam volume. Observe que este problema foi tratado em [5] para o caso em que $r = 0$, em [1] para o caso em que $r = 1$ e $\overline{M}$ sendo um hemisfério aberto da esfera euclidiana e em [2] para qualquer valor de r quando a variedade ambiente é $\mathbb{R}^{n+1}$.

Para resolvermos este problema, começaremos supondo que um de seus pontos críticos é a imersão dada x. Assim, com relação às variações que preservam volume a imersão dada x deve ser um ponto crítico da função

$$A_r(t) = \int_M F_r(S_1, ..., S_r)dM_t,$$

onde dM_t é o elemento de volume da métrica induzida em M por X_t. Para encontrar os pontos críticos deste problema usaremos um procedimento padrão que consiste em olhar para os pontos críticos de

$$J_r(t) = A_r(t) + \lambda V(t),$$

onde λ é uma constante. Para calcular $J_r'(0) = 0$, precisamos inicialmente determinar a derivada de $S_r(t)$, com respeito a t, em $t = 0$.

Proposição 20. *Sob as notações anterioes, vale:*

$$S_{r+1}' = L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f + D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T} S_{r+1}.$$

Esta proposição foi provada pela primeira vez em [11]. Uma prova alternativa para este fato, pode ser encontrada no apêndice. Ressaltamos que, quando S_{r+1} é constante então o último termo do lado direito é zero.

O seguinte lema é bem conhecido. Ele é usado por vários autores para determinar a fórmula da primeira variação, sua demonstração pode ser encontrada em [11].

Lema 6. *Seja* X *uma variação da imersão* x*, então*

$$\frac{\partial}{\partial t}(dM_t) = \left(-S_1 f + \operatorname{div} \frac{\partial X}{\partial t}^T\right) dM_t,$$

onde $f = f(t) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle$.

Nos três lemas a seguir, apresentamos resultados que serão utilizados para obtermos as fórmulas da primeira e segunda variação.

Lema 7. *Seja* X *uma variação da imersão* x*, então*

$$V'(t) = \int_M f(t) dM_t.$$

Demonstração: Fixe um ponto $p \in M$ e escolha um referencial ortonormal adaptado positivo $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1} = N\}$ numa vizinhança de $x(p)$. Então,

$$X^*(d\overline{M}) = a(t,p) dt \wedge dM.$$

Observe que,

$$\begin{aligned} a(t,p) &= X^*(d\overline{M})\left(\frac{\partial}{\partial t}, e_1, \cdots, e_n\right) = d\overline{M}\left(\frac{\partial X}{\partial t}, dX_t(e_1), \cdots, dX_t(e_n)\right) \\ &= vol\left(\frac{\partial X}{\partial t}, dX_t(e_1), \cdots, dX_t(e_n)\right) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N_t \right\rangle \end{aligned}$$

onde N_t é um campo de vetores unitário e normal à imersão X_t. Desta forma, obtemos a seguinte igualdade

$$V'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{[0,t]\times M} a(t,p) dt \wedge dM\right) = \int_M a(t,p) dM_t = \int_M f(t) dM_t.$$

■

Quando a variação preserva volume, temos pelo acima que $\int_M f(t) dM_t = 0$. No que segue, vamos considerar apenas variações que presevam volume.

Lema 8. *Para qualquer r,* $A_r'(t) = -(r+1)\int_M S_{r+1}(t) f(t) dM_t$.

Demonstração: Dividiremos a prova em dois casos, primeiro provaremos o resultado para r par. Fazendo indução sobre r, temos para $r = 0$ que

$$A_0'(t) = \int_M \frac{\partial}{\partial t}(dM_t) = \int_M \left(-S_1 f(t) + \operatorname{div} \frac{\partial X}{\partial t}^T\right) dM_t.$$

Como M é compacta, segue como consequência do Teorema da Divergência que

$$A_0'(t) = -\int_M S_1 f(t) dM_t.$$

Agora suponha que o lema seja válido para $r-2$, ou seja,

$$A_{r-2}'(t) = -(r-1)\int_M S_{r-1} f(t) dM_t.$$

Provaremos agora que o resultado é válido para r. Fazendo uso das definições de $A_r(t)$ e F_r temos

$$A_r(t) = \int_M S_r(t) dM_t + \frac{c(n-r+1)}{r-1} A_{r-2}(t).$$

Assim,

$$A'_r(t) = \int_M S'_r(t) dM_t + \int_M S_r \frac{\partial}{\partial t}(dM_t) + \frac{c(n-r+1)}{r-1} A'_{r-2}(t).$$

Segue como consequência da hipótese de indução, bem como da Proposição 20 e do Lema 6, que

$$\begin{aligned} A'_r(t) &= \int_M \left(L_{r-1}(f) + [S_1 S_r - (r+1)S_{r+1}]f + c(n-r+1)S_{r-1}f + D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T} S_r\right) dM_t \\ &+ \int_M \left(-S_1 f + \operatorname{div} \frac{\partial X}{\partial t}^T\right) S_r dM_t - c(n-r+1) \int_M S_{r-1} f(t) dM_t. \end{aligned}$$

Por outro lado, das propriedades da divergência temos que

$$\operatorname{div}\left(S_r \frac{\partial X}{\partial t}^T\right) = S_r \operatorname{div} \frac{\partial X}{\partial t}^T + D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T} S_r.$$

Então,

$$\begin{aligned} A'_r(t) &= \int_M \left(L_{r-1}(f) + [S_1 S_r - (r+1)S_{r+1}]f + c(n-r+1)S_{r-1}f + D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T} S_r\right) dM_t \\ &- \int_M S_1 S_r f dM_t + \int_M \operatorname{div}\left(S_r \frac{\partial X}{\partial t}^T\right) dM_t - \int_M D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T} S_r dM_t \\ &- c(n-r+1) \int_M S_{r-1} f(t) dM_t. \end{aligned}$$

Usando o fato que o perador L_r pode ser escrito na forma divergente e o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_M L_{r-1}(f) dM_t = \int_M \operatorname{div}\left(S_r \frac{\partial X}{\partial t}^T\right) dM_t = 0.$$

Portanto,

$$A'_r(t) = -\int_M (r+1) S_{r+1} f dM_t.$$

Para o caso em que r é ímpar, novamente demonstraremos o resultado fazendo indução sobre r. No caso $r = 1$, temos que

$$A'_1(t) = \int_M S'_1(t) dM_t + \int_M S_1 \frac{\partial}{\partial t}(dM_t).$$

Segue como consequência da Proposição 20 e do Lema 6 que

$$\begin{aligned} A'_1(t) &= \int_M \left(L_0(f) + [S_1 S_1 - 2S_2]f + cnf + D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T} S_1\right) dM_t \\ &+ \int_M S_1 \left(-S_1 f + \operatorname{div} \frac{\partial X}{\partial t}^T\right) dM_t. \end{aligned}$$

Por outro lado, das propriedades da divergência temos que

$$\operatorname{div}\left(S_1\frac{\partial X}{\partial t}^T\right) = S_1 \operatorname{div}\frac{\partial X}{\partial t}^T + D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T}S_1.$$

Assim,

$$A_1'(t) = \int_M \left(L_0(f) - 2S_2 f + cnf + \operatorname{div}\left(S_1\frac{\partial X}{\partial t}^T\right)\right) dM_t.$$

Usando que $L_0 = \Delta$ (Laplaciano) e o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_M L_0(f) dM_t = \int_M \operatorname{div}\left(S_1\frac{\partial X}{\partial t}^T\right) dM_t = 0.$$

Finalmente, como a variação preserva volume, concluímos que

$$A_1'(t) = -2\int_M S_2 f dM_t.$$

A continuação da demonstração, é exatamente igual à demonstração do caso em que r é par. ∎

Proposição 21. *(Fórmula da Primeira Variação) Para qualquer variação de x vale a igualdade*

$$J_r'(0) = \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda)\, f\, dM,$$

onde λ é uma constante (a ser determinada) e f é a projeção normal do campo varacional.

Demonstração: Como $J_r(t) = A_r(t) + \lambda V(t)$, segue que $J_r'(t) = A_r'(t) + \lambda V'(t)$. Fazendo uso dos resultados provados nos Lemas 7 e 8 temos que

$$J_r'(t) = \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda)\, f\, dM_t.$$

Em particular, a igualdade vale para $t = 0$. Donde concluímos a demonstração da proposição. ∎

O lema a seguir será utilizado para demonstrarmos que as hipersuperfícies com r-ésima curvatura constante são pontos críticos do funcional J.

Lema 9. *Para toda função suave $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\int_M f\, dM = 0$, existe uma variação normal que preserva volume cujo campo variacional é $f \cdot N$.*

A prova deste resultado pode ser encontrada em [5].

Proposição 22. *Sejam $A = \int_M dM$, $\gamma = A^{-1} \cdot \int_M S_{r+1} dM$ e $\lambda = (r+1)\gamma$. Se $J_r'(0) = 0$ para qualquer variação de x, então $\Gamma = \lambda - (r+1)S_{r+1} = 0$.*

Demonstração: Assuma que exista um ponto $p \in M$ onde $\Gamma(p) \neq 0$, podemos assumir que $\Gamma(p) > 0$. Considere os conjuntos abaixo:

$$D^+ = \{q \in M; \Gamma(q) > 0\}, \ D^- = \{q \in M; \Gamma(q) < 0\}.$$

Como Γ é uma função contínua, segue que D^+ é aberto e existe um aberto U tal que $\overline{U} \subset D^+$. Mostra-se, usando partição da unidade, que existe uma função suave $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo: 1) $0 \leqslant \phi \leqslant 1$; 2) $\phi = 1$ em U; 3) $supp(\phi) \subset D^+$. Logo,

$$\alpha_1 = \int_M \phi\Gamma \, dM > 0.$$

Sendo

$$\int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda) dM = -(r+1)\int_M S_{r+1} dM + (r+1)A\gamma = 0,$$

existe um aberto V tal que $\overline{V} \subset D^-$. Novamente, usando partição da unidade, garantimos a existência de uma função suave $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo: 1) $0 \leqslant \psi \leqslant 1$; 2) $\psi = 1$ em V; 3) $supp(\psi) \subset D^-$. Portanto,

$$\alpha_2 = \int_M \psi\Gamma \, dM < 0.$$

Tomando $\xi = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi > 0$, temos que

$$\int_M (\phi + \xi)\Gamma \, dM = \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\alpha_2 = 0.$$

Pelo Lema 9, existe uma variação da imersão x que preserva volume cujo vetor variacional é $(\phi + \xi)\Gamma \cdot N$. Assim, pela Proposição 21 segue que

$$0 = \int_M (\phi + \xi)\Gamma^2 \, dM > 0.$$

A contradição obtida surgiu pelo fato de supormos que existia um ponto $p \in M$ onde $\Gamma(p) \neq 0$, desta forma $\lambda = (r+1)S_{r+1}$. Isto completa a prova da proposição. ■

A proposição acima, nos diz que os pontos críticos para o problema variacional são imersões com r-ésima curvatura média constante. Afim de decidir se a imersão é ou não um mínimo local, calcularemos a segunda derivada de $A_r(t)$ em $t = 0$.

Observe que para variações que preservam volume temos $J_r'(t) = A_r'(t)$, assim para calcular $A_r''(0)$ é suficiente calcular $J_r''(0)$.

Proposição 23. *(Fórmula da Segunda Variação) Seja* $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica com* S_{r+1} *constante. Para variações que preservam volume, a segunda derivada de* A_r *em* $t = 0$ *é dada por*

$$A_r''(0) = -(r+1)\int_M f \cdot [L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f]\ dM.$$

Demonstração: Como escólio da demonstração da Proposição 21, temos

$$J_r'(t) = \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda) f dM_t.$$

Derivando $J_r'(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} J_r''(t) &= \int_M \frac{\partial}{\partial t}(-(r+1)S_{r+1} + \lambda) f(t)\, dM_t \\ &+ \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda) f'(t)\, dM_t \\ &+ \int_M (-(r+1)S_{r+1} + \lambda) f(t) \frac{\partial}{\partial t}(dM_t). \end{aligned}$$

Observe que, para $t = 0$ as duas últimas integrais da iguldade acima se anulam pois $\lambda = (r+1)S_{r+1}$. Da Proposição 20, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(-(r+1)S_{r+1} + \lambda)\Big|_{t=0} &= -(r+1)S_{r+1}'(0) \\ &= -(r+1)[L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f]. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$A_r''(0) = J_r''(0) = -(r+1)\int_M f \cdot [L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f]\ dM.$$

■

Capítulo 4

r-Estabilidade de hipersuperfícies

A expressão obtida para $A_r''(0)$, na Proposição 23, depende somente da imersão x e da função f. Vamos fixar a seguinte notação

$$I_r(f) = -\int_M f(L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f)dM.$$

Definição 11. *Seja* $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientável compacta conexa com* S_{r+1} *constante. Dizemos que* M *é* r*-estável quando* $I_r(f) \geqslant 0$ *para qualquer função* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satisfaz*

$$\int_M f\, dM = 0.$$

Proposição 24. *Esferas geodésicas de* $\overline{M}^{n+1}(c)$ *são r-estáveis.*

Demonstração: Seja Σ um esfera geodésica de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Uma vez que Σ é umbílica as curvaturas principis são todas iguais a uma certa constante k. Escolhendo o vetor normal de modo que $k > 0$, temos

$$S_j = \binom{n}{j} k^j.$$

Assim, Σ é uma subvariedade com S_{r+1} igual a uma constante positiva. Por outro lado, todos os autovalores de P_r são iguais a $\binom{n-1}{r}k^r$. Logo, $P_r = \binom{n-1}{r}k^r I$. Da forma divergente do operador L_r segue que

$$L_r(f) = \operatorname{div}\left(\binom{n-1}{r} k^r \nabla f\right) = \binom{n-1}{r} k^r \Delta f.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I_r(f) &= -\int_M \left(\left(\binom{n-1}{r}k^r f\Delta f + \left(n\binom{n}{r+1} - (r+2)\binom{n}{r+2}\right)\right) k^{r+2}f^2\right) dM \\
&\quad -\int_M c(n-r)\binom{n}{r}k^r f^2 dM \\
&= -\binom{n-1}{r}\int_M (k^r f\Delta f + nk^{r+2}f^2 + cnk^r f^2)dM \\
&= -\binom{n-1}{r}k^r\int_M (f\Delta f + n(k^2+c)f^2)dM.
\end{aligned}$$

Pela Equação de Gauss, podemos inferir que Σ é isométrica a uma n-esfera euclidiana com curvatura seccional constante igual a $k^2 + c$. Então, o primeiro autovalor do Laplaciano de Σ é dado por $\lambda_1 = n(k^2+c)$. Pela caracterização variacional de λ_1, que pode ser encontrada em [6], temos

$$I_r(f) \geqslant \binom{n-1}{r}k^r\int_M (\lambda_1 f^2 - n(k^2+c)f^2)dM = 0.$$

Isto completa a demonstração da proposição. ■

Para provarmos o resultado principal, definiremos funções auxiliares. Para imersões na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, seja U um vetor fixado de $\mathbb{R}^{n+2}$, no caso de imersões no espaço hiperbólico, consideremos U um vetor fixado do espaço de Lorentz E^{n+2}. Defina as funções

$$f = \langle N, U\rangle,\ \ g = \langle x, U\rangle.$$

No lema a seguir, $\overline{M}^{n+1}(c)$ representa o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, a esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$.

Lema 10. *Seja* $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica. Para todo ponto* $p \in M$*, seja* U^T *a projeção do vetor* U *sobre* T_pM*. Então,*

$$\begin{aligned}
L_r(g) &= -(r+1)S_{r+1}f - c(n-r)S_r g \\
L_r(f) &= -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f - c(r+1)S_{r+1}g + D_{U^T}S_{r+1}.
\end{aligned}$$

Observe que, quando S_{r+1} é constante $D_{U^T}S_{r+1} = 0$. A prova deste lema pode ser encontrada no apêndice desta dissertação.

No teorema a seguir provamos o principal resultado deste trabalho, a saber: é feita a caracterização das hipersuperfícies r-estáveis de $\overline{M}^{n+1}(c)$.

Teorema 3. *Seja* $\overline{M}^{n+1}(c)$ *o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ *ou um hemisfério aberto da esfera euclidiana* $\mathbb{S}^{n+1}(1)$*. Seja* $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta (sem bordo) orientável com* S_{r+1} *constante positivo. Então* M^n *é* r*-estável se, e somente se,* M *é uma esfera e* x *é a sua inclusão como uma esfera geodésica.*

Demonstração: De acordo com a Proposição 24, a condição é suficiente. Provaremos agora que também é necessária. Uma vez que M é compacta orientável e S_{r+1} é uma constante positiva, temos pela Proposição 19 que o operador L_r é elíptico. Analisaremos separadamente os dois casos.

Suponha que $\overline{M}^{n+1}(c)$ é um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}(1) \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Primeiramente provaremos que $\overline{N} = \int_M N dM \neq 0$, onde estamos considerando a integração e m cada função coordenada. Se $\overline{N} = 0$, então

$$\int_M \langle N, U \rangle dM = 0$$

para qualquer vetor $U \in \mathbb{R}^{n+2}$. Tome uma base ortonormal $U_0, \cdots, U_{n+1}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ e considere as funções

$$f_i = \langle N, U_i \rangle \text{ e } g_i = \langle x, U_i \rangle.$$

Pela hipótese de r-estabilidade, temos que $I(f_i) \geqslant 0$ para cada $i \in \{0, \cdots, n+1\}$. Usando a expressão obtida para $L_r(f_i)$ no Lema 10, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant -\int_M f_i(L_r(f_i) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_i + (n-r)S_r f_i) dM \\ &= \int_M ((r+1)S_{r+1} f_i g_i - (n-r)S_r f_i^2) dM. \end{aligned}$$

Somando em i temos

$$0 \leqslant \int_M \left((r+1)S_{r+1} \sum_{i=0}^{n+1} f_i g_i - (n-r)S_r \sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 \right) dM.$$

Por outro lado, podemos escrever $N = \sum_{i=0}^{n+1} f_i U_i$ e $x = \sum_{i=0}^{n+1} g_i U_i$. Daí,

$$\langle N, x \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} f_i g_i = 0 \text{ e } \sum_{i=0}^{n+1} f_i^2 = |N|^2 = 1.$$

Donde concluímos que

$$0 \leqslant -\int_M (n-r) S_r dM.$$

Da Proposição 19 temos que $S_r > 0$. Logo,

$$0 \leqslant -\int_M (n-r)S_r dM < 0.$$

Como chegamos a uma contradição, segue que $\overline{N} \neq 0$. A base $\{U_0, \cdots, U_{n+1}\}$ pode ser escolhida de tal forma que $U_0 = \dfrac{\overline{N}}{|\overline{N}|}$. Então, para $1 \leqslant i \leqslant n+1$ segue que

$$0 = \langle U_i, \overline{N}\rangle = \int_M \langle U_i, N\rangle = \int_M f_i dM.$$

Para essas funções teste, a definição de r-estabilidade implica que

$$0 \leqslant \int_M ((r+1)S_{r+1}f_i g_i - (n-r)S_r f_i^2)dM.$$

Adicionando estas equações em $1 \leqslant i \leqslant n+1$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_M [(r+1)S_{r+1}\sum_{i=1}^{n+1} f_i g_i - (n-r)S_r \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2]dM \\ &= \int_M [-(r+1)S_{r+1}f_0 g_0 - (n-r)S_r(1-f_0^2)]dM. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para qualquer referencial local $\{e_0 = x, e_1, \cdots, e_n, e_{n+1} = N\}$ adaptado à imersão x temos

$$1 = |U_0|^2 = \sum_{i=0}^{n+1}\langle U_0, e_i\rangle \geqslant \langle U_0, x\rangle^2 + \langle U_0, N\rangle^2 = g_0^2 + f_0^2.$$

Desta forma, $1 - f_0^2 \geqslant g_0^2$. Substituindo em (4.1) encontramos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_M [-(r+1)S_{r+1}f_0 g_0 - (n-r)S_r g_0^2]dM \\ &= \int_M g_0 L_r(g_0)\, dM = -\int_M \langle P_r \nabla g_0, \nabla g_0\rangle dM \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Usamos acima a Proposição 18 e o fato que L_r é elíptico. Observe que todas as desigualdades acima tornam-se igualdades, da elipticidade de L_r segue que $\nabla g_0 = 0$. Logo, g_0 é contante. Assim a imagem de x está contida em um hiperplano. Uma vez que x é uma imersão na esfera então a imagem x pertence a interseção da esfera com um hiperplano. Desta forma $x(M)$ é uma esfera geodésica de $\mathbb{S}^{n+1}(1)$.

No caso em que o ambiente é o espaço hiperbólico, a prova é feita de modo análogo.

■

Capítulo 5

Apêndice

Neste capítulo provaremos a Proposição 20 e o Lema 10. Estes resultados são encontrados na literatura e as suas provas são aqui incluídas para tornar este trabalho auto-suficiente.

Seja $X : M^n \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma aplicação diferenciável tal que para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a aplicação $X_t : M^n \times \{t\} \longrightarrow M^{n+1}$ definida por $X_t(p) = X(p, t)$ é uma imersão. Seja ds^2 a métrica em $\overline{M}$ e considere, em $M \times (-\epsilon, \epsilon)$ a forma quadrática $\omega = X^*(ds^2)$.

Esta é uma métrica Riemanniana quando restrita a cada $M_t = M \times \{t\}$, mas não necessariamente é métrica na variedade $M \times (-\epsilon, \epsilon)$. De fato, restrita a M_t a forma quadrática ω é exatamente a métrica induzida por X_t. Sejam $e_1, \cdots, e_n$ campos de vetores num aberto U de $M \times (-\epsilon, \epsilon)$, tal que para cada t fixado, eles formem um referencial ortonormal tangente a $M_t = M \times \{t\}$. Sejam $\omega_1, \cdots, \omega_n$ suas formas duais e $\omega_{n+1} = dt$ a forma dual do vetor unitário $\dfrac{\partial}{\partial t}$ tangente a $(-\epsilon, \epsilon)$. Considere no produto $M \times (-\epsilon, \epsilon)$, a métrica

$$\phi = \sum \omega_i^2 + dt^2.$$

As formas de conexão associadas a esta métrica são dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{ij} \wedge \omega_j, \ 1 \leqslant i \leqslant n+1, \\ \omega_{ij} &+ \omega_{ji} = 0, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n+1. \end{aligned}$$

Uma vez que $\omega_{n+1} = dt$, então

$$0 = \sum \omega_{(n+1)i} \wedge \omega_i.$$

Daí, $\omega_{(n+1)i} = -\sum \widehat{h}_{ij}\omega_j$, onde $\widehat{h}_{ij} = \widehat{h}_{ji}$. Considere agora os campos de vetores $dX(e_1), \cdots, dX(e_n)$ e defina $N : U \longrightarrow T\overline{M}$ por $N = dX(e_1) \wedge \cdots \wedge dX(e_n)$. Os campos de vetores $dX(e_1), \cdots, dX(e_n), N$ formam um referencial ortonormal adaptado a imersão X_t. Identificando e_i com sua imagem $dX(e_i)$, podemos escrever

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i + fN.$$

Assim,

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = ds^2\left(\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial t}\right) = f^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Uma vez que $\omega(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ e $\omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, e_j\right) = ds^2\left(\frac{\partial X}{\partial t}, e_j\right) = a_j$, temos

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} {\omega_j}^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_j dt\omega_j + \left(f^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) dt^2.$$

Assim podemos escrever $\omega = \sum_{j=1}^{n+1} \theta_j^2$, onde $\theta_j = \omega_j + a_j dt$ para $1 \leqslant j \leqslant n$ e $\theta_{n+1} = fdt$. De fato, estas formas são pull back do coreferencial dos campos de vetores $dX(e_1), \cdots, dX(e_n), N$. Defina as formas de conexão θ_{ij} associadas a $\theta_1, \cdots, \theta_{n+1}$ pelas equações:

$$d\theta_i = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_{ij} \wedge \omega_j$$

$$\theta_{ij} + \theta_{ji} = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n+1.$$

Agora, expressaremos estas novas formas da conexão usando as formas ω_{ij}, já definidas em $M \times (-\epsilon, \epsilon)$. Podemos supor que $\theta_{ij} = \omega_{ij} + b_{ij}dt$, para $0 \leqslant i, j \leqslant n$, e que $\theta_{(n+1)i} = \frac{1}{f} \cdot \omega_{(n+1)i} + b_i dt$. Assim, das equações de estrutura e usando o fato que $Da_i = da_i + \sum a_j\omega_{ji} = \sum a_{ij}\omega_j$ podemos escrever

$$\begin{aligned} d\theta_i &= d(\omega_i + a_i dt) = \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j + \omega_{i(n+1)} \wedge dt + da_i \wedge dt \\ &= \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j + \omega_{i(n+1)} \wedge dt + \sum a_{ij}\omega_j \wedge dt + \sum a_j \omega_{ij} \wedge dt. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d\theta_i &= \sum \theta_{ij} \wedge \theta_j + \theta_{i(n+1)} \wedge \theta_{n+1} \\ &= \sum (\omega_{ij} + b_{ij}dt) \wedge (\omega_j + a_j dt) + \left(\frac{1}{f}\omega_{i(n+1)} - b_i dt\right) \wedge fdt \\ &= \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j + \sum a_j \omega_{ij} \wedge dt + \sum b_{ij} dt \wedge \omega_j + \omega_{i(n+1)} \wedge dt \end{aligned}$$

Comparando as expressões obtidas para $d\theta_i$, concluímos que $b_{ij} = -a_{ij}$. Donde obtemos $\theta_{ij} = \omega_{ij} - a_{ij}dt$. Uma importante consequência deste fato é

$$\omega_{ij} - a_{ij}dt = \theta_{ij} = -\theta_{ji} = \omega_{ij} + a_{ji}dt.$$

Da igualdade acima segue que $a_{ij} + a_{ji} = 0$. Agora observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \theta_{(n+1)i} \wedge \theta_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(-\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\omega_j + b_i dt \right) \wedge (\omega_i + a_i dt) \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\omega_j \wedge \omega_i - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}a_i\omega_j \wedge dt + \sum_{i=1}^{n} b_i dt \wedge \omega_i.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d\theta_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \theta_{(n+1)i} \wedge \theta_i = df \wedge dt = \sum_{i=1}^{n} f_i\theta_i \wedge dt = \sum_{i=1}^{n} f_i\omega_i \wedge dt.$$

Das igualdades acima podemos escrever

$$\sum_{i<j} (h_{ij} - h_{ji})\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{i=1}^{n} \left(f_i + b_i + \sum_{j=1}^{n} h_{ji}a_j \right) \omega_i \wedge dt = 0.$$

Assim, $h_{ij} = h_{ji}$ e $b_i = -f_i - \sum_{j=1}^{n} h_{ji}a_j = -f_i - \sum_{j=1}^{n} h_{ij}a_j$. Substituindo na expressão de $\theta_{(n+1)i}$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\theta_{(n+1)i} &= -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\omega_j + b_i dt \\
&= -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\omega_j - f_i dt - \sum_{j=1}^{n} h_{ij}a_j dt \\
&= -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\omega_j + a_j dt) - f_i dt \\
&= -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\theta_j - f_i dt.
\end{aligned}$$

Observe que os h_{ij} são os coeficientes da segunda forma fundamental da imersão X_t com respeito ao normal N_t. O próximo lema nos dirá que a diferencial covariante de h_{ij} na variedade $M_t = M \times \{t\}$ é dada por:

$$Dh_{ij} = d_{M_t}h_{ij} + \sum h_{ik}\omega_{kj} + \sum h_{kj}\omega_{ki} = \sum h_{ijk}\omega_k.$$

Lema 11. *Se* $\overline{M}$ *possui curvatura seccional constante* c, *então*

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = f\sum_{k=1}^{n} h_{ik}h_{kj} + f_{ij} + cf\delta_{ij} + \psi_{ij}$$

onde

$$\psi_{ij} = \sum h_{ik}a_{kj} + \sum h_{kj}a_{ki} + \sum h_{ijk}a_k.$$

Demonstração: Primeiro observe que

$$d\theta_{(n+1)i} - \sum_{j=1}^{n} \theta_{(n+1)j} \wedge \theta_{ji} = \overline{\Omega}_{(n+1)i} = -c \cdot \theta_{n+1} \wedge \theta_i.$$

Agora, substituindo a expresão $\theta_{(n+1)i} = -\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\theta_j - f_i dt$ obtemos

$$\begin{aligned}
d\theta_{(n+1)i} - \sum \theta_{(n+1)j} \wedge \theta_{ji} &= d\left(-\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\theta_j - f_i dt\right) - \sum_{j=1}^{n}\left\{-\sum_{k=1}^{n} h_{jk}\theta_k - f_j dt\right\} \wedge \theta_{ji} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} dh_{ij} \wedge \theta_j - \sum_{j=1}^{n} h_{ij} d\theta_j - df_i \wedge dt \\
&+ \sum_{j,k=1}^{n} h_{jk}\theta_k \wedge \theta_{ji} + \sum_{j=1}^{n} f_j dt \wedge \theta_{ji}.
\end{aligned}$$

Como $d\theta_j = \sum_{k=1}^{n} \theta_{jk} \wedge \theta_k + \theta_{j(n+1)} \wedge \theta_{n+1}$ segue que

$$\begin{aligned}
d\theta_{(n+1)i} - \sum \theta_{(n+1)j} \wedge \theta_{ji} &= -\sum_{j=1}^{n} dh_{ij} \wedge \theta_j - \sum_{j,k=1}^{n} h_{ij}\theta_{jk} \wedge \theta_k - \sum_{j=1}^{n} h_{ij}\theta_{j(n+1)} \wedge \theta_{n+1} \\
&\quad -df_i \wedge dt + \sum_{j,k=1}^{n} h_{jk}\theta_k \wedge \theta_{ji} + \sum_{j=1}^{n} f_j dt \wedge \theta_{ji} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\left\{dh_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\theta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\theta_{ki}\right\} \wedge \theta_j \\
&\quad -(df_i + \sum_{j=1}^{n} f_j\theta_{ji}) \wedge dt - f\left(\sum_{j,k=1}^{n} h_{ij}h_{jk}\theta_k \wedge dt\right).
\end{aligned}$$

Observe que

$$dh_{ij} = d_{M_t}h_{ij} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}dt \tag{5.1}$$

uma vez que h_{ij} são os coeficientes da segunda forma fundamental de X_t, temos

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{d_{M_t}h_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\omega_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\omega_{ki}\right\} \wedge \omega_j = \sum_{j,k=1}^{n} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j = 0.$$

Como $\theta_{ij} = \omega_{ij} - a_{ij}dt$, segue que

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{d_{M_t}h_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\theta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\theta_{ki}\right\}\wedge w_j = -\sum_{j,k=1}^{n}(h_{ik}a_{kj} + h_{kj}a_{ki})dt\wedge\omega_j$$

Também sabemos que $\theta_j = \omega_j + a_j dt$, assim se

$$C = \sum_{j=1}^{n}\left\{d_{M_t}h_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\theta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\theta_{ki}\right\}\wedge\theta_j$$

então

$$\begin{aligned}
C &= -\sum_{j,k=1}^{n}(h_{ik}a_{kj} + h_{kj}a_{ki})dt\wedge\theta_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\left\{d_{M_t}h_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\theta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\theta_{ki}\right\}\wedge a_j dt \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n}(h_{ik}a_{kj} + h_{kj}a_{ki})dt\wedge\theta_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\left\{d_{M_t}h_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\omega_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\omega_{ki}\right\}\wedge a_j dt \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n}(h_{ik}a_{kj} + h_{kj}a_{ki})dt\wedge\theta_j + \sum_{j,k=1}^{n} h_{ijk}a_j\omega_k\wedge dt \\
&= -\sum_{j,k=1}^{n}(h_{ik}a_{kj} + h_{kj}a_{ki})dt\wedge\theta_j + \sum_{j,k=1}^{n} h_{ijk}a_j\theta_k\wedge dt.
\end{aligned}$$

Também é verdadeiro que

$$df_i = d_{M_t}f_i + \frac{\partial f_i}{\partial t}dt \tag{5.2}$$

e, por definição

$$d_{M_t}f_i + \sum_{j=1}^{n} f_j\theta_{ji} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\theta_j. \tag{5.3}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
d\theta_{(n+1)i} - \sum\theta_{(n+1)j}\wedge\theta_{ji} &= -\sum_{j=1}^{n}\left\{dh_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\theta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\theta_{ki}\right\}\wedge\theta_j \\
&\quad -(df_i + \sum_{j=1}^{n} f_j\theta_{ji})\wedge dt - f\left(\sum_{j,k=1}^{n} h_{ij}h_{jk}\theta_k\wedge dt\right).
\end{aligned}$$

De (5.2) segue que

$$\begin{aligned}
d\theta_{(n+1)i} - \sum\theta_{(n+1)j}\wedge\theta_{ji} &= -\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + d_{M_t}h_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\theta_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\theta_{ki}\right\}\wedge\theta_j \\
&\quad -(df_i + \sum_{j=1}^{n} f_j\theta_{ji})\wedge dt - f\left(\sum_{j,k=1}^{n} h_{ij}h_{jk}\theta_k\wedge dt\right).
\end{aligned}$$

Da expressão obtida para C e de (5.3) segue que

$$\begin{aligned} d\theta_{(n+1)i} - \sum \theta_{(n+1)j} \wedge \theta_{ji} &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} dt \wedge \theta_j + \sum_{j,k=1}^{n} (h_{ik}a_{kj} + h_{kj}a_{ki}) dt \wedge \theta_j \\ &- \sum_{j,k=1}^{n} h_{ijk} a_j \theta_k \wedge dt - f \left(\sum_{j,k=1}^{n} h_{ij} h_{jk} \theta_k \wedge dt \right) \\ &- \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \theta_{ji} + d_{M_t} f_i + \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) \wedge dt. \end{aligned}$$

De (5.4) segue que

$$\begin{aligned} d\theta_{(n+1)i} - \sum \theta_{(n+1)j} \wedge \theta_{ji} &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} dt \wedge \theta_j + \sum_{j,k=1}^{n} (h_{ik}a_{kj} + h_{kj}a_{ki}) dt \wedge \theta_j \\ &- \sum_{j,k=1}^{n} h_{ijk} a_j \theta_k \wedge dt - f \left(\sum_{j,k=1}^{n} h_{ij} h_{jk} \theta_k \wedge dt \right) \\ &- \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \theta_j \wedge dt. \end{aligned}$$

De (5.1) obtemos

$$d\theta_{(n+1)i} - \sum_{j=1}^{n} \theta_{(n+1)j} \wedge \theta_{ji} = \overline{\Omega}_{(n+1)i} = -c\theta_{n+1} \wedge \theta_i = cf\theta_i \wedge dt.$$

Comparando as duas igualdades acima, inferimos que

$$\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} - f \left(\sum_{k=1}^{n} h_{ij} h_{jk} \right) - f_{ij} - \psi_{ij} \right\} \omega_j \wedge dt = cf\theta_i \wedge dt.$$

Portanto,

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = f \sum_{k=1}^{n} h_{ij} h_{jk} + f_{ij} + cf\delta_{ij} + \psi_{ij}.$$

■

Tomando a segunda forma fundamental de forma que ela esteja diagonalizada, temos

$$\psi_{ii} = 2h_{ii}a_{ii} + \sum_{k=1}^{n} h_{iik} a_k = \sum_{k=1}^{n} h_{iik} a_k.$$

Provaremos agora a Proposição 20. Para isto, veja que

$$\frac{\partial S_{r+1}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) \frac{\partial k_i}{\partial t}.$$

Do Lema 11 segue que

$$\begin{aligned} S'_{r+1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_{ii}}{\partial t} S_r(A_i) \\ &= \sum_i S_r(A_i) f_{ii} + f \sum_i S_r(A_i) k_i^2 + cf \sum_i S_r(A_i) + \sum_i S_r(A_i) \psi_{ii}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$L_r(f) = \sum_i \langle (P_r \circ \operatorname{Hess} f(e_i), e_i\rangle = \sum_i S_r(A_i)\langle \operatorname{Hess} f(e_i), e_i\rangle = \sum_i S_r(A_i) f_{ii}. \tag{5.4}$$

Assim

$$S'_{r+1} = L_r(f) + (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f + \sum_{i,k} S_r(A_i)h_{iik}a_k.$$

Observe que

$$DS_{r+1} = \sum_i S_r(A_i)Dk_i = \sum_i S_r(A_i)Dh_{ii} = \sum_{i,k} S_r(A_i)h_{iik}\omega_k,$$

logo

$$D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T} S_{r+1} = D_{\sum a_j e_j} S_{r+1} = \sum_{i,k} S_r(A_i)h_{iik}\omega_k(\sum a_j e_j) = \sum_{i,k} S_r(A_i)h_{iik}a_k.$$

Desta última igualdade segue que

$$S'_{r+1} = L_r(f) + (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f + D_{\frac{\partial X}{\partial t}^T} S_{r+1}.$$

Provaremos agora o Lema 10 para o caso em que $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{H}^{n+1}(-1)$. Vamos considerar o modelo do espaço hiperbólico definido anteriorente.

Tome um referencial ortonormal local $e_0, e_1, \cdots, e_{n+1}$ adaptado a imersão. Ou seja estão definidos numa vizinhança de E^{n+2} e satisfazem $(e_0, e_0) = -1$, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n+1$ e $(e_i, e_0) = 0$ para $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Além disso, quando restritos a M os campos $e_1, \cdots, e_n$ são tangentes, $e_{n+1} = N$ é normal a M e $e_0 = x$. Sejam $\omega_1, \cdots, \omega_n$ as formas duais de $e_1, \cdots, e_n$. As principais equações associadas a este referencial são

$$\begin{aligned}
dx &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i \\
de_i &= \sum_{=0}^{n+1} \omega_{ij} e_j \\
\omega_{ij} &= (de_i, e_j) \\
d\omega_i &= \sum_{i=1}^{n} \omega_j \wedge \omega_{ji} \\
\omega_{n+1,i} &= \sum_{i=1}^{n} h_{ij}\omega_j, \quad \text{com} \quad h_{ij} = hji \\
d\omega_{ij} &- \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = -\sum_{k,l=1}^{n} h_{ik}h_{jl}\omega_k \wedge \omega_l + \omega_i \wedge \omega_j.
\end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que o espaço hiperbólico possui curvatura constante igual a -1 e a quarta igualdade difere de um sinal de menos da expressão obtida nas preliminares. Este fato ocorre pois aqui estamos usando que a segunda forma fundamental é dada por $\overline{\nabla} N$. Neste caso, os h_{ij} são na verdade o oposto daqueles que usamos nas preliminares. Note também que $de_0 = dx$, das igualdades acima segue que $\omega_i = \omega_{0i} = \omega_{i0}$.

Considere um vetor U fixado no espaço de Lorentz e as funções auxiliares

$$g = \langle x, U\rangle \text{ e } f = \langle N, U\rangle.$$

Observe que $dg = \langle dx, U\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, U\rangle \omega_i$, assim $\nabla g = \sum_{i=1}^{n} g_i e_i$ onde $g_i = \langle e_i, U\rangle$. Isto nos diz que g_i são as componentes do gradiente de g. Calcularemos agora a forma hessiana de g, temos

$$\begin{aligned}
Dg_i &= dg_i + \sum_{i=1}^{n} g_j \omega_{ji} \\
&= \langle de_i, U\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, U\rangle \omega_{ji} \\
&= \langle \sum_{j=0}^{n+1} \omega_{ij} e_j, U\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, U\rangle \omega_{ji} \\
&= \langle x, U\rangle \omega_{i0} + \langle N, U\rangle \omega_{in+1} + \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, U\rangle \omega_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, U\rangle \omega_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-\langle N, U\rangle h_{ij} + \langle x, U\rangle \delta_{ij}) \omega_j.
\end{aligned}$$

Donde obtemos

$$g_{ij} = -f h_{ij} + g\delta_{ij}. \tag{5.5}$$

Por outro lado, podemos supor que no ponto $p \in M$ $e_1, \cdots, e_n$ diagonaliza $\overline{\nabla} N$. Daí $h_{ii} = \langle \overline{\nabla} N e_i, e_i\rangle = \lambda_i$ e

$$L_r(g) = \sum_{i}^{n} \langle (P_r \circ \text{Hess}\, g)(e_i), e_i\rangle = \sum_{i}^{n} S_r(A_i) \langle \text{Hess}\, g(e_i), e_i\rangle = \sum_{i}^{n} S_r(A_i) g_{ii}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
L_r(g) &= -f \sum_{i}^{n} S_r(A_i) h_{ii} + g \sum_{i}^{n} S_r(A_i) \\
&= -f \sum_{i}^{n} S_r(A_i) \lambda_i + g(n-r) S_r \\
&= -f(r+1) S_{r+1} + (n-r) g S_r.
\end{aligned}$$

o qual é o resultado desejado. Procederemos de maneira análoga com $f = \langle N, U\rangle$. Observe que

$$\begin{aligned} df &= \langle dN, U\rangle \\ &= \langle e_0 + \omega_{(n+1),0} + \sum_{i=1}^{n} \omega_{(n+1)i} + e_{n+1}\omega_{(n+1)(n+1)}, U\rangle. \end{aligned}$$

Como $\omega_{(n+1)(n+1)} = 0$ e $\omega_{(n+1),0} = \omega_{0,(n+1)} = \omega_{n+1} = 0$, segue que

$$df = \sum_{i=1}^{n} g_i\omega_{(n+1)i} = \sum_{i,j=1}^{n} g_i h_{ij}\omega_j.$$

Portanto, $f_j = \sum_{j=1}^{n} h_{ij} g_j$ são as funções componentes do gradiente de f. Assim

$$\begin{aligned} df_j &= \sum_{i=1}^{n}(g_i dh_{ij} + h_{ij} dg_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{l=1}^{n} h_{ijl}\omega_l - \sum_{l=1}^{n} h_{lj}\omega_{li} - \sum_{l=1}^{n} h_{il}\omega_{lj}\right) g_i + h_{ij}\left(\sum_{s=1}^{n} g_{is}\omega_s - \sum_{s=1}^{n} g_s\omega_{si}\right)\right] \\ &= \sum_{i,l=1}^{n} h_{ijl} g_i\omega_l - \sum_{i,l=1}^{n} h_{lj} g_i\omega_{li} - \sum_{i,l=1}^{n} h_{il} g_i\omega_{lj} + \sum_{i,s=1}^{n} h_{ij} g_{is}\omega_s - \sum_{i,s=1}^{n} h_{ij} g_s\omega_{si}. \end{aligned}$$

Fazendo uso da igualdade

$$Df_j = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\omega_k = df_j + \sum_{k=1}^{n} f_k\omega_{kj} = df_j \sum_{k,i=1}^{n} h_{ik} g_i\omega_{kj}$$

temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\omega_k &= \sum_{i,l=1}^{n} h_{ijl} g_i\omega_l - \sum_{i,l=1}^{n} h_{lj} g_i\omega_{li} - \sum_{i,l=1}^{n} h_{il} g_i\omega_{lj} + \sum_{i,s=1}^{n} h_{ij} g_{is}\omega_s \\ &\quad - \sum_{i,s=1}^{n} h_{ij} g_s\omega_{si} + \sum_{k,i=1}^{n} h_{ik} g_i\omega_{kj}. \end{aligned}$$

Trocando l por i e i por s no segundo somatório e l por k no terceiro somatório obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\omega_k &= \sum_{i,l=1}^{n} h_{ijl} g_i\omega_l - \sum_{s,i=1}^{n} h_{ij} g_s\omega_{is} - \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} g_i\omega_{kj} + \sum_{i,s=1}^{n} h_{ij} g_{is}\omega_s \\ &\quad - \sum_{i,s=1}^{n} h_{ij} g_s\omega_{si} + \sum_{k,i=1}^{n} h_{ik} g_i\omega_{kj}. \end{aligned}$$

Como $\omega_{is} = -\omega_{si}$ para $1 \leqslant i, s \leqslant n$, segue que

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}\omega_k = \sum_{i,l=1}^{n} h_{ijl} g_i\omega_l + \sum_{i,s=1}^{n} h_{ij} g_{is}\omega_s. \tag{5.6}$$

De (5.5) segue que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f_{jk}\omega_k &= \sum_{i,l=1}^{n} h_{ijl}g_i\omega_l + \sum_{i,s=1}^{n} h_{ij}(-fh_{is} + g\delta_{is})\omega_s \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ijk}g_i + \sum_{i=1}^{n} h_{ij}(-fh_{ik} + g\delta_{ik})\right)\omega_k.\end{aligned}$$

Assim os elementos da matriz hessiana de f são dados por

$$f_{jk} = \sum_{i=1}^{n} h_{ijk}g_i - f\sum_{i=1}^{n} h_{ij}h_{ik} + gh_{kk}. \tag{5.7}$$

Sendo

$$DS_{r+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial k_j} Dk_j = \sum_{j=1}^{n} S_r(A_j)Dk_j$$

e usando o fato de que $D_{e_i}k_j = h_{jji}$, temos que para cada i

$$D_{e_i}S_{r+1} = \sum_{j=1}^{n} S_r(A_j)h_{jji}. \tag{5.8}$$

De (5.5) e (5.7) segue que

$$\begin{aligned}L_r(f) &= \sum_{j=1}^{n} S_r(A_j)f_{jj} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} S_r(A_j)h_{jji}g_i - f\sum_{i,j=1}^{n} S_r(A_j){h_{ij}}^2 + g\sum_{j=1}^{n} S_r(A_j)h_{jj}.\end{aligned}$$

Por outro lado, como os h_{ij} são os coeficientes da segunda forma fundamental temos

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{dh_{ij} + \sum_{k=1}^{n} h_{ik}\omega_{kj} + \sum_{k=1}^{n} h_{kj}\omega_{ki}\right\}\wedge\omega_j = \sum_{k<j}(h_{ijk} - h_{ikj})\omega_k\wedge\omega_j = 0.$$

Assim $h_{ijk} = h_{ikj}$ para quaisquer $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$. Observe também $h_{ij} = h_{ji}$ assim

$$Dh_{ij} = \sum_{k=1}^{n} h_{ijk}\omega_k = \sum_{k=1}^{n} h_{jik}\omega_k = Dh_{ji}.$$

Portanto $h_{ijk} = h_{jik}$. Para quaisquer $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$. Destas identidades segue que

$$h_{ijj} = h_{jij} = h_{jji}.$$

Dado um ponto $p \in M$, podemos supor que a segunda forma fundamental está diagonalizada logo $h_{ii} = \lambda_i$ e $h_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Portanto

$$L_r(f) = \sum_{i,j=1}^{n} S_r(A_j)h_{ijj}g_i - f\sum_{i=1}^{n} S_r(A_j){\lambda_i}^2 + g\sum_{j=1}^{n} S_r(A_j)\lambda_j.$$

Donde concluímos que

$$L_r(f) = -(S_1 S_{r+1} + (r+2) S_{r+2}) f + (n-r) S_r g + D_{\sum g_i e_i} S_{r+1},$$

terminando a demostração do lema. A prova para o caso de imersões na esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ é feita de modo análogo.

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, H., do Carmo, M., Colares, A.G. - *Stable Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature*, Math. Z, (213) 117–131, 1993.

[2] Alencar, H., do Carmo, M., Rosenberg, H. - *On the first eigenvalue of the linearized operator of the rth mean curvature of a hypersurface*, Ann. Global Anal. Geom. (11) 387–395, 1993.

[3] Aquino, C. - *Uma caracterização de hipersuperfícies na esfera com curvatura escalar constante*, Dissertação de Mestrado em Matemática, UFC, Fortaleza, 2003.

[4] Barbosa, J.L.M., Colares, A.G. - *Stability of hypersurfaces with constant* r*-mean curvature*, Annals Global Analysis and Geometry, (15) 277–297, 1997.

[5] Barbosa, J.L., do Carmo, M. - *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z., (197) 123–138, 1988.

[6] Chavel, I. - *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc - 1984.

[7] Cheng, S.Y., Yau, S.T. - *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math.Ann, (225) 195–204, 1977.

[8] do Carmo, M. P. - *O Método do Referencial Móvel*, Publicações Matemáticas - IMPA, 2008.

[9] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[10] Gelfand, I.M., Fomin S.V. - *Calculus of Variations*, Ed. Dover, 2000.

[11] Reilly, R. - *Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms*, J. Diff. Geom. (8) 465–477, 1973.

[12] Rosenberg, H - *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*, Bull. Sc. Math, (117) 211–239, 1993.

[13] Santos, P.J. - *Hipersuperfícies Compactas: O Teorema de Alexandrov para Curvatura Média de Ordem Superior*. Dissertação de Mestrado em Matemática, UFPI, Teresina, 2010.