Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre um sistema termoelástico não linear com condição de fronteira não linear

Kelvin Jhonson Ribeiro de Sousa Almeida Silva

Teresina - 2018

Kelvin Jhonson Ribeiro de Sousa Almeida Silva

Dissertação de Mestrado:

Sobre um sistema termoelástico não linear com condição de fronteira não linear

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark
Co-Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S586s Silva, Kelvin Jhonson Ribeiro de Sousa Almeida.
Sobre um sistema termoelástico não linear com condição de fronteira não linear / Kelvin Jhonson Ribeiro de Sousa Almeida. – Teresina, 2018.
79 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark
Co-orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

1. Análise. 2. Equação Diferencial Parcial Elíptica. 3. Sistema Não Linear. 4. Comportamento Assintótico. I. Título.

CDD 515.14

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

À minha familia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS pelo dom da vida, por ter me dado à permissão de chegar até aqui, e por toda a força concedida na concretização desse sonho. Além disso, agradeço a ele por todas as pessoas que cruzaram meu caminho e que estão aqui citadas, todas muitíssimo especiais.

Dentre todas estas pessoas, agradeço em primeiro lugar a quem me ajudou, de alguma maneira, a integrar esse ambiente. Ao meu orientador Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark, meu co-orientador Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark , Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos, Prof. Dr. José Francisco e o Prof. Dr. Alexandro Marinho de Oliveira, por todos os ensinamentos e oportunidades oferecidas em diversos momentos desde que nos conhecemos, ficam aqui, minha imensa gratidão, meu respeito, minha admiração e minha devoção, intransponíveis em palavras.

Agradeço aos membros que compõe a minha banca de defesa Prof. Dr Haroldo Rodrigues Clark, Prof. Dr Marcondes Rodrigues Clark, Prof. Dr Isaias Pereira de Jesus, Prof. Dr Ronald David Ramos Guardia por terem aceitado o convite e pelas críticas construtivas, conselhos e apoio durante a apresentação.

Agradeço a minha mãe Ivanda Ribeiro de Sousa, a minha tia Ivane Maria de Sousa Cruz, a minha avó Mª de Fátima Almeida Silva, ao meu tio Everaldo de Sousa Cruz, simplesmente por terem me feito existir e a cuidar de mim, por tanto amor, por tudo o que sou, por cada oração, por terem me proporcionado educação e amor pelos estudos, e, apesar das inúmeras dificuldades, por sempre me estimularem a continuar. Este trabalho é dedicado com muito amor a vocês.

Agradeço a minha namorada Mirian dos Santos Mendes e sua família, que inúmeras vezes não me deixaram faltar o chão e sempre me motivaram a continuar, servindo como combustível para seguir em frente na realização dos meus sonhos, espero ainda compartilhar com vocês muito mais momentos felizes como este.

Agradeço aos meus amigos, Antônio Luis, Leandro Bittencourt, Rafael Emanuel, Lucas Machado, Antônio Aguiar, José Edilson, Márcio Brito, Josimauro Borges, Cícero, Arilson da Cruz, Edimilson Lopes, Lucas Cassiano, Raul Kazan, Brenda Lois, Cleyton Natanael e a Karla, Renan de Oliveira, Israel Evangelista, Jeferson Nascimento, simplesmente por existirem na minha vida e me aceitarem como eu sou, por compreenderem minhas ausências, por toda a ajuda, companheirismo, compreensão, carinho, conversas e amizade. Valeu mesmo!.

Agradeço a CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro durante todo o mestrado.

"A perfeição é algo que, por mais que seja buscada , nunca será alcançada pelo homem".

Desconhecido

Resumo

Neste trabalho contém um estudo qualitativo associado a um sistema termoelástico não linear com não linearidade local e não local, o qual está submetido à condições de fronteira mista dos tipos: Dirichlet e realimentação não linear, e condições iniciais. Especificamente será mostrada a existência de solução forte global por meio do método de Faedo-Lions-Galerkin, e unicidade pelo método da Energia. Além disso, será estabelecida uma taxa de decaimento exponencial da energia total associada ao sistema.

Palavras-Chave: Sistema termoelástico não linear. Existência e unicidade soluções globais fortes. Realimentação não linear na fronteira. Comportamento assintótico da Energia.

Abstract

In this work contains a qualitative study associated with a non linear thermoelastic system with local and non-local linearities, which is subject to mixed boundary conditions of the types: Dirichlet and non-linear feedback, and initial conditions. Specifically, the existence of a strong global solution will be shown by the Faedo-Lions-Galerkin method, and uniqueness by the Energy one. In addition, an exponential decay rate of the total energy associated with the global strong solutions will be established, too.

Key Words: Nonlinear thermoelastic system. Existence and uniqueness of strong global solutions. Nonlinear feedback on boundary. Asymptotic behavior.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo será deduzido um modelo termoelástico não linear, com não linearidades locais. Este sistema que será encontrado foi obtido expandindo um pouco as ideias de M. Slemrold [19]. As equações que derivam esta formulação surgem em fenômenos físicos estudados na mecânica de meios contínuos, e tem grande importância para a Física-Matemática.

1.1 Uma dedução Física

Considere um corpo tridimensional B homogêneo e isotrópico em um sistema de coordenadas fixado. Seja x_i, $i = 1, 2, 3$ as funções coordenadas em um tempo $t > 0$ de um ponto material de B que possuia coordenadas X^i, $i = 1, 2, 3$ quando B configurava-se sobre uma região homogênea B_0 não deformada com o tempo. O tensor gradiente de deformações $\mathbf{F}$ é dado por

$$F^{ij} = \frac{\partial}{\partial X^j} x_i(X^1, X^2, X^3, t).$$

As leis de equilíbrio para o momento linear e para a energia segundo a mecânica de meios contínuos são dadas respectivamente por

$$\rho_0 \mathbf{x}'' = \mathrm{Div}\, \mathbf{S}^T + \rho_0 \mathbf{b}, \tag{1.1}$$

$$\rho_0 \varepsilon' = \mathbf{tr}(\mathbf{SF}') - \mathrm{Div}\, \mathbf{q} + \rho_0 r, \tag{1.2}$$

onde os simbolos " $'$ " denotam derivadas parciais com relação a t, e

S - Primeiro Tensor de tensão de Piola-Kirchoff,

ε - Energia interna, **q** - fluxo de calor,

$\mathbf{b}$ - força de corpo (Surge a partir da presença de um campo),

r- fonte de calor,

Div - divergente sobre X^j,

ρ_0 - densidade material da configuração B_0,

η - entropia específica,

T - temperatura absoluta,

$\psi \equiv \varepsilon - T\eta$ - energia livre de Helmholtz,

Grad - o gradiente sobre X^j.

A condição para um modelo ser considerado termoelástico é que as funções $\mathbf{S}$, η, ψ e $\mathbf{q}$ dependam implicitamente de $\mathbf{F}$, T, $\mathbf{g} = \text{Grad}\, T$, isto é,

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{F}, T; \mathbf{g}), \quad \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}), \quad \psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}), \quad \eta = \hat{\eta}(\mathbf{F}, T, \mathbf{g}).$$

A desigualdade de Clausius-Duhem expressa a segunda lei da termodinâmica através da relação

$$\frac{d}{dt}\int_U \rho_0 \eta \, dX \geqslant \int_U \rho_0 \frac{r}{T} dX - \int_{\partial U} \frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}{T} dA,$$

para cada subcorpo U de B, onde $\mathbf{n}$ denota o vetor normal à ∂U. A desigualdade de Clausius-Duhem quando restrita à $\hat{\mathbf{S}}$, $\hat{\psi}$ e $\hat{\eta}$ implica a validade das seguintes relações:

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, T); \quad \eta = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial T}(\mathbf{F}, T); \quad \mathbf{S} = \rho_0 \left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}}\right)^T (\mathbf{F}, T); \quad \hat{\mathbf{q}} \cdot \text{Grad}\, T \leqslant 0. \tag{1.3}$$

A partir destas relações pode-se deduzir as equações de evolução para o sistema termoelástico. Inicialmente derivando a igualdade $\varepsilon = \psi + T\eta$, obtém-se

$$\varepsilon' = \psi' + T'\eta + T\eta'. \tag{1.4}$$

Aplicando a regra da cadeia e utilizando relações $(1.3)_2$ e $(1.3)_3$, segue que

$$\psi' = \text{tr}\left\{\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}}\right)^T \mathbf{F}'\right\} + \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial T} T' = \frac{1}{\rho_0}\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{F}') - \eta T'. \tag{1.5}$$

Substituindo (1.5) em (1.4), obtém-se

$$\varepsilon' = \frac{1}{\rho_0}\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{F}') + T\eta'. \tag{1.6}$$

Substituindo (1.6) em (1.2), tem-se

$$\rho_0 T\eta' = -\text{Div}\, \mathbf{q} + \rho_0 r. \tag{1.7}$$

Derivando $\eta = \hat{\eta}(\mathbf{F}, T)$ em relação a t, obtém-se pela regra da cadeia

$$\eta' = \operatorname{tr}\left\{\left(\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial\mathbf{F}}\right)^T \mathbf{F}'\right\} + \frac{\partial\hat{\eta}}{\partial T}T'. \tag{1.8}$$

Utilizando $(1.3)_2$ em (1.8), segue que

$$-\eta' = \operatorname{tr}\left\{\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}\partial T}\right)^T \mathbf{F}'\right\} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial T^2}T'. \tag{1.9}$$

Substituindo $(1.3)_3$ em (1.1), e (1.9) em (1.7), reformulam-se as equações que governam a evolução dos corpos termoelásticos através do sistema abaixo

$$\mathbf{x}'' = \operatorname{Div}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}} + \mathbf{b}, \tag{1.10}$$

$$-\rho_0 T\left[\operatorname{tr}\left\{\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}\partial T}\right)^T \mathbf{F}'\right\} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial T^2}T'\right] = -\operatorname{Div}\mathbf{q} + \rho_0 r. \tag{1.11}$$

O movimento do corpo é dito *longitudinal*, quando as funções coordenadas tiverem a seguinte configuração

$$x^1 = \omega(X^1, t), \quad x^2 = X^2, \quad x^3 = X^3, \quad T = \hat{T}(X^1, t).$$

Veja que o tensor gradiente de deformação é dado por

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial X^1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é, o tensor gradiente de deformação não varia com relação as variáveis espacial e tempotal, exceto na coordenada F^{11} que varia com relação a X^1 e t. Para reescrever as equações (1.10) e (1.11) no caso longitudinal, veja que

$$\operatorname{Div}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}} = \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}}\right)_{ij}\mathbf{e}_i = \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{ij}}\right)\mathbf{e}_i =: \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{ij}}\right). \tag{1.12}$$

Pela regra da cadeia e usando que a única coodenada de $\mathbf{F}$ que varia com relação a alguma variável temporal é F^{11}, tém-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{ij}}\right) &= \sum_{(r,s)}\frac{\partial}{\partial F^{rs}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{ij}}\right)\frac{\partial F^{rs}}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{ij}}\right)\frac{\partial T}{\partial X_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial F^{11}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{ij}}\right)\frac{\partial F^{11}}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{ij}}\right)\frac{\partial T}{\partial X_j}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Como $\mathbf{F}$ e T só dependem de X_1 e t, pode-se reduzir em (1.13) as somas em j para que (1.12) torne-se

$$\text{Div}\,\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}} = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial F^{11}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{i1}}\right)\frac{\partial F^{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{i1}}\right)\frac{\partial T}{\partial X_1}\right]\mathbf{e}_i. \tag{1.14}$$

Já que as coordenadas diferentes de F^{11} são constantes, $\dfrac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{i1}} \equiv 0$ para $i \neq 1$, obtém-se

$$\text{Div}\,\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}} = \left[\frac{\partial}{\partial F^{11}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{11}}\right)\frac{\partial F^{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{11}}\right)\frac{\partial T}{\partial X_1}\right]\mathbf{e}_1. \tag{1.15}$$

Como posição só varia em uma direção, então a força de corpo age sobre B apenas nesta direção, isto é, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1$. Logo (1.10), reescreve-se assim

$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial t^2}\mathbf{e}_1 = \left[\frac{\partial}{\partial F^{11}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{11}}\right)\frac{\partial F^{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{11}}\right)\frac{\partial T}{\partial X_1} + b_1\right]\mathbf{e}_1. \tag{1.16}$$

Se (1.16) é vãlida, então

$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial F^{11}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{11}}\right)\frac{\partial F^{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{ij}}\right)\frac{\partial T}{\partial X_1} + b_1. \tag{1.17}$$

Em relação a identidade (1.11) observa-se que

$$\text{tr}\left\{\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}\partial T}\right)^T F'\right\} = \sum_{(i,j)}\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}\partial T}\right)_{ij}(F')_{ij} \;=\; \sum_{(i,j)}\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial F_{ij}\partial T}\right)\frac{\partial F^{ij}}{\partial t}.$$

Usando que a única coordenada de $\mathbf{F}$ que varia com relação a t é F^{11}, obtém-se

$$\text{tr}\left\{\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\mathbf{F}\partial T}\right)^T F'\right\} = \frac{\partial}{\partial F^{11}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial T}\right)\frac{\partial F^{11}}{\partial t}. \tag{1.18}$$

Como a variação do movimento é longitudinal, o fluxo de calor varia apenas com relação a coordenada X^1, logo

$$\text{Div}\,\mathbf{q} = \frac{\partial q^1}{\partial X^1}. \tag{1.19}$$

Assim, (1.11) reescreve-se para movimentos longitudinais como

$$-\rho_0 T\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial F^{11}\partial T} + \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -\frac{\partial q^1}{\partial X^1} + \rho_0 r.$$

Portanto, as equações que governam os movimentos termoelásticos longitudinais são

$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial F^{11}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{11}}\right)\frac{\partial F^{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial F^{11}}\right)\frac{\partial T}{\partial X_1} + b_1, \tag{1.20}$$

$$-\rho_0 T\left(\frac{\partial}{\partial F^{11}}\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial T}\right)\frac{\partial F^{11}}{\partial t}+\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\frac{\partial q^1}{\partial X^1}+\rho_0 r. \tag{1.21}$$

A partir daqui considera-se $r = b_1 = 0$, e também que q_1 não dependa de F e η, mas apenas de T_{X_1}, isto é consistente pois não contradiz $(1.3)_4$. Considera-se agora que a configuração inicial da posição seja dada por $\omega(X_1, 0) = X_1$, e que a temperatura absoluta inicial seja constante, isto é, $T(X_1, 0) = T_0$. Fazendo

$$u = \omega - X_1,\ \ \theta = T - T_0,$$

e usando que $q_1 = q_1(\theta_x)$, o sistema (1.20)-(1.21) torna-se

$$u_{tt} = u_{xx}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial F^2}(u_x+1,\theta+T_0)+\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial T\partial F}(u_x+1,\theta+T_0)\theta_x, \tag{1.22}$$

$$\rho_0(\theta+T_0)\left(u_{tx}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial F\partial T}(u_x+1,\theta+T_0)+\theta_t\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial T^2}(u_x+1,\theta+T_0)\right)=-(q_1)'(\theta_x)\theta_{xx}. \tag{1.23}$$

Para eliminar o caso singular da equação anterior em que $\theta = -T_0$, considera-se $f(\theta) = \theta+T_0$ para $-\frac{T_0}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{T_0}{2}$. Esta função é estritamente positiva, infinitamente diferenciável e limitada. Assim as equações (1.22)-(1.23) reeescrevem-se da seguinte forma

$$u_{tt} = u_{xx}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial F^2}(u_x+1,\theta+T_0)+\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial T\partial F}(u_x+1,\theta+T_0)\theta_x, \tag{1.24}$$

$$u_{tx}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial F\partial T}(u_x+1,\theta+T_0)+\theta_t\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial T^2}(u_x+1,\theta+T_0)=-\frac{(q_1)'(\theta_x)}{\rho_0 f(\theta)}\theta_{xx}. \tag{1.25}$$

Este ultimo sistema por sua vez é totalmente não linear, pois os coeficientes dependem de u_x e θ. Uma linearização de (1.24)-(1.25) é dada por

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt}(x,t)-a(x,t)u_{xx}(x,t)+b(x,t)\theta_x=0,\\ c(x,t)\theta_t(x,t)+b(x,t)u_{xt}(x,t)-d(x,t)\theta_{xx}(x,t)=0,\end{array}\right. \tag{1.26}$$

O sistema acima tem sido estudado em diferentes situações nas últimas décadas. No caso unidimensional (como em (1.26)) com fronteira fixa cita-se, por exemplo, Hansen [11], Henry, Lopes & Perisinotto [12] e Slemrold [20]. No caso também unidimensional com fronteira dependente do tempo (fronteira móvel) cita-se o trabalho de Caldas, Barreto & Límaco [4] e Rincon, Santos & Límaco [19].

Clark, Jutuca & Milla Miranda [5] investigaram um sistema termoelástico linear com coeficientes variáveis e condições de Dirichlet e realimentação (feedback) sobre a fronteira.

No trabalho [5] usa-se fortemente ideias encontrada no artigo de Milla Miranda & Medeiros [17], no qual é investigado uma equação de ondas com coeficientes variáveis linear e também condições de Dirichlet e realimentação sobre a fronteira.

1.2 O modelo a ser estudado

Uma extensão natural do modelo unidimensional (1.26) à dimensões superiores pode ser dada por

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \alpha\Delta u + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta = 0 \ \text{ em } \ Q; \\ \\ \theta' - M\Delta\theta + (\mathbf{a}\cdot\nabla)u' = 0 \ \text{ em } \ Q, \end{array} \right. \tag{I}$$

onde $\mathbf{a}$ é o vetor constante $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, α, e M são funções temporais reais com valores reais, $(\mathbf{a}\cdot\nabla)$ é o operador

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

Δ é o usual operador de Laplace em $\mathbb{R}^n$ e $Q = \Omega\times]0, T[$, com $T > 0$ arbitrário e Ω é um aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$.

Na equação de difusão $(\text{I})_2$, isto é $\theta' - M(t)\Delta\theta = 0$, quando as medidas da temperatura θ não são feitas localmente (i.é., pontualmente), mas, em média, através do condutor Ω, uma boa aproximação da lei Fourier pode ser dada por $\mathbf{q} = -M(t)\nabla\theta$ onde M é a função

$$M(t) = \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right),$$

i.e., a velocidade de propagação da temperatura depende do calor total sobre Ω. Assim, obtém-se a seguinte equação de difusão não linear com não linearidade não local

$$\theta'(x,t) - \beta\left(\int_\Omega \theta(x,t)dx\right)\Delta\theta(x,t) = 0. \tag{II}$$

Para mais detalhes sobre a equação (II), veja por exemplo Chipot & Lovar [8].

Motivado, pelo sistema (I) e equação (II) considera-se neste trabalho o seguinte sistema não linear termoelástico com não linearidade local e não local:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \mu\Delta u + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta + f(u) = 0 \ \text{ em } \ Q; \\ \\ \theta' - \beta\left(\int_\Omega \theta(x,t)\ dx\right)\Delta\theta + (\mathbf{a}\cdot\nabla)u' = 0 \ \text{ em } \ Q, \end{array} \right. \tag{III}$$

onde f é uma função contínua. A não linearidade local $f(u)$ no caso em que $f(u) = |u|^\rho u$ de $(\text{III})_1$ surge em problemas clássicos de equações de onda, veja por exemplo Lions [13].

O sistema (III) será submetido à condições de fronteira do tipo Dirichlet-Neuman e dados iniciais. As condições sobre os *objetos* do sistema (III) serão definidas precisamente no Capítulo 3.

Nesta dissertação o objetivo é estabelecer:

(a) Existência e unicidade de soluções globais fortes.

(b) Comportamento assintótico da energia total do sistema associado às soluções fortes.

A existência de soluções globais são estabelecidas por meio dos Métodos de Faedo-Galerkin-Lions e de Compacidade, a unicidade de soluções pelo Método da Energia e o comportamento assintótico da energia, por meio da construção de um operador do tipo Lyapunov.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresenta-se todo conteúdo básico suficiente para o entendimento da resolução do problema (III), que será desenvolvida no capítulo seguinte.

2.1 Tópicos de Análise Funcional

2.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 2.1. *(**Convergência Fraca**) Sejam* E *um espaço de Banach e* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* E*. Então* $u_\nu \rightharpoonup u$ *se, e somente se,* $\langle \varphi, u_\nu\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$*, para todo* $\varphi \in E'$*.*

Definição 2.2. *(**Convergência Fraca Estrela**) Sejam* E *um espaço de Banach,* $\varphi \in E'$ *e* $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* E'*. Diz-se* $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ *fraca estrela se, e somente se,* $\langle \varphi_\nu, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$*, para todo* $u \in E$*.*

Proposição 2.3. *Sejam* E *um espaço de Banach e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em E. Então:*

(i) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$ *então* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$*;*

(ii) *Se* $x_n \to x$ *forte então* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente para* $\sigma(E, E')$*;*

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$ *e se* $f_n \to f$ *fortemente em* E' *(isto é,* $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$*) então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$*.*

Demonstração. Brezis ([2], p. 35). □

2.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivo

Definição 2.4. *Diz-se que um espaço métrico* E *é separável se existe um subconjunto* $D \subset E$ *numerável e denso.*

Definição 2.5. *Sejam* E *um espaço de Banach e* $J : E \to E''$ *a injeção canônica definida de modo que* $J(x)(f) = f(x)$, $\forall f \in E'$. *Diz-se que* E *é reflexivo se* $J(E) = E''$.

Quando o espaço E é reflexivo identifica-se implicitamente E e E''.

Teorema 2.6. *(**Banach-Alaoglu-Bourbaki**). Sejam* E *um espaço de Banach e* E' *o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leqslant 1\} \quad \text{é compacto na topologia fraca estrela.}$$

Demonstração. Brezis ([2], p. 42). □

Teorema 2.7. *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* E' *o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leqslant 1\} \quad \text{é metrizável na topología fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se $B_{E'}$ *é metrizável na topología fraca estrela, então* E *é separável.*

Demonstração. Brezis ([2], p.48). □

O primeiro resultado (o corolário) é uma consequência do Teorema 2.6 e Teorema 2.7.

Corolário 2.8. *Sejam* E *um espaço Banach separável e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* E'. *Então existe uma subsequência* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração. Brezis ([2], p. 50). □

Teorema 2.9. *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ *uma sequência limitada. Então existe uma subsequência* $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $f \in E$ *tal que*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração. Evans ([10], p. 639). □

2.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 2.10. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Denomina-se* suporte *de* φ *ao fecho em* Ω *do conjunto dos pontos* x *tais que* $\varphi(x) \neq 0$*. Simbolicamente,*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\,\Omega}.$$

Definição 2.11. *Denota-se por* $C_0^\infty(\Omega)$ *o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em* Ω *com suporte compacto em* Ω*.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que há interesse em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \ \text{ e } \ \operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N};$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

ii) T é continua, isto é, se uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge, em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ, então,

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \ \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$. Equipa-se o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergencia:

Considera-se o espaço de todas as distrbuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sequência $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω. Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribuicional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$. A motivação no conceito de derivada fraca e posteriormente o conceito de derivada distribuicional dada por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes de Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Note-se que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega), \tag{2.1}$$

é linear e continua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então} \lim_{\nu\to\infty} D^\alpha T_\nu = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.2}$$

2.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção serão dadas algumas definições e propriedades elementares dos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 2.12. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leqslant p < \infty$. Define-se*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\, f \textit{ mensurável } \mathsf{e}\ |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right]^{1/p}.$$

Definição 2.13. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, define-se o espaço*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\, f \textit{ mensurável e } \exists\ C \textit{constante tal que } |f(x)| \leqslant C \textit{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C;\ |f(x)| \leqslant C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 2.14. *(Desigualdade de Hölder). Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg|dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Brezis ([2], p. 56). □

Observação 2.15. *É importante mencionar uma consequência muito útil da desigualdade de Hölder: sejam $f_1, f_2, \dots, f_k$ funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \ \textit{ para } \ 1 \leqslant i \leqslant k \ \textit{ com } \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leqslant 1.$$

Então o produto $f = f_1 f_2 f_3 \dots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração. Brezis ([2], p. 57). □

Teorema 2.16. *(Teorema da convergência dominada de Lebesgue). Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em L^1 que satisfaz:*

(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *em q.t.p de* Ω,

(b) *existe uma função $g \in L^1$ tal que, para todo n tem-se $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, em q.t.p de Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Demonstração. Brezis ([2], p. 54). □

Teorema 2.17. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de L^p e $f \in L^p$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p$ tal que*

(a) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *em q.t.p de* Ω,

(b) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ *para todo* k *e em q.t.p de* Ω.

Demonstração. Brezis ([2], p. 58). □

Definição 2.18. *Diz-se que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integravéis é denotado por $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Em símbolos tem-se*

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f|dx < \infty, \quad \textit{para todo compacto } \ K \subset \Omega.$$

As distribuções que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Exemplo 2.19. *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *define-se* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u *é uma distribução escalar sobre* Ω.

De fato, não é dificil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta mostrar que T_u é continua.

Seja uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ, então

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| = |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| &= \left| \int_\Omega u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)dx \right| \\ &\leqslant \int_\Omega |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)|dx \\ &\leqslant \sup|\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|dx \to 0, \end{aligned}$$

pois, $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribução T_u assim definida é dita "gerada pela função localamente integrável u"e, usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identifica-se u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 2.20. *(Du Bois Raymond). Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração. Medeiros, L. A e Milla Miranda, M. ([14], p. 12). □

Observação 2.21. *Outro resultado interessante é que a derivada de uma função* $L^1_{loc}(\Omega)$, *não é em geral uma função de* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidas sob a denominação de *Espaços de Sobolev*.

2.4 Espaços de Sobolev

Como vimos na seção anterior, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$.

2.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Chama-se de multi-índice toda n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α, definimos a ordem $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, e representa-se por D^α o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 2.22. *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O Espaço de Sobolev que denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leqslant m$. Simbolicamente escreve-se:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leqslant m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{1/p},$$

também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup \text{ess}_\Omega |D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um Espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Observação 2.23. *Note que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$. Se $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, vale a identidade*

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) dx = \int_\Gamma uv\nu_i d\Gamma,$$

sendo $\nu_i = \cos(x_i, \nu)$, ν *normal unitária externa a* Γ. *Portanto*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v \nu_i d\Gamma,$$

para todo par de funções $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. *Por densidade, estende-se este resultado para funções* $u, v \in H^1(\Omega)$. *Medeiros, L. A e Milla Miranda, M. ([16], p. 126).*

2.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Observe que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto acontece porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$, é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequências convergentes. Esta observação motiva considerar os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Definição 2.24. *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$, *define-se*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 2.25. *(Desigualdade de Poincaré). Suponha que* Ω *é um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leqslant p < \infty$. *Então existe uma constante* C *(dependendo de* Ω *e* p*) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver Brezis ([3], p. 290). □

Observação 2.26. *Em particular a expressão* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *é uma norma no espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *equivalente a norma* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; *em* $H_0^1(\Omega)$ *tem-se o produto interno*

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, *equivalente a norma* $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração. Brezis ([3], p. 290). □

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos Espaços de Sobolev e por conseguinte na Teoria das EDP's.
Se $1 \leqslant p < \infty$ e o número q é o expoente conjugado de p, isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológido de $H_0^m(\Omega)$. Em outras palavras, um elemento de $H^{-m}(\Omega)$, é um funcional linear limitado sobre $H_0^m(\Omega)$.

Definição 2.27. *Se* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *a norma é definida como sendo*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u\rangle; \textit{para todo}\, u \in H_0^1(\Omega) \ \textit{com}\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 1\}.$$

Através das diversas formas de definir o espaço $H^m(\Omega)$ motiva-se a introdução do espaço $H^s(\Omega)$ para $s > 0$ real e Ω bem regular, o qual é um espaço de Hilbert com uma norma bem definida e seu Dual é denotado por H^{-s}. Para uma exposição mais detalhada de tais espaços vide Medeiros, L. A. [13]. Estes espaços tem relevância significativa para o entendimento do comportamento de determinadas funções sobre a fronteira de Ω através do teorema do traço enunciado a seguir.

Teorema 2.28. *Existe uma aplicação linear e contínua* γ *que parte do espaço* $H^m(\Omega)$ *e chega em* $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$*, com núcleo* $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$*, verificando a seguinte condição:*

$$\gamma(u) = (\gamma_0 u, ..., \gamma_{m-1} u), \quad \forall u \in D(\overline{\Omega}),$$

onde $\gamma_i \varphi = \dfrac{\partial^i \varphi}{\partial \nu^i}$*, para todo* $\varphi \in D(\overline{\Omega})$*, sendo* ν *a direção normal a* Γ *(fronteira de* Ω*). Tal aplicação admite uma inversa à direita contínua.*

Demonstração. Medeiros, L. A. ([13], p. 120). □

É de suma importância que determinadas identidades do cálculo façam sentido dentro de um contexto mais geral, como por exemplo a Identidade de Green

$$\int_\Omega (\nu\Delta u - u\Delta\nu)dx = \int_\Gamma \left(\nu\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \nu}{\partial \nu}\right) d\Gamma.$$

Para tal é necessário que se considere o espaço

$$\mathcal{H}^0 = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Teorema 2.29. $D(\overline{\Omega})$ *é denso em* $\mathcal{H}^0$.

Observação 2.30. *Como* $H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$*,* $\forall s > 0$*, então identificando* $L^2(\Omega)$ *com seu dual, pode-se afirmar que* $L^2(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$*,* $\forall s > 0$*, implicando que* $\gamma_0 u$*,* $\gamma_1 u \in H^{-s}(\Omega)$*,* $\forall s > 0$.

Teorema 2.31. *A aplicação que parte de* $D(\overline{\Omega})$ *e chega em* $H^{-1/2}(\Omega) \times H^{-3/2}(\Omega)$*, tal que*

$$u \longmapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u),$$

admite um prolongamento contínuo a $\mathcal{H}^0$ *e vale a seguinte identidade*

$$(\Delta v, u)_{L^2(\Omega)} - (\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle - \langle \gamma_1 v, \gamma_0 u\rangle,$$

para todo $u \in \mathcal{H}^0$ *e* $v \in H^2(\Omega)$*.*

Observação 2.32. *Observe que no teorema acima* $\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle$ *representa a ação do funcional* $\gamma_1 u \in H^{-3/2}$ *sobre* $\gamma_0 u \in H^{3/2}$*, donde considera-se o seguinte abuso de notação*

$$\int_\Gamma \bar{v}\frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma,$$

embora $\gamma_1 u$ *não pertença de fato a* $L^2(\Omega)$*.*

Proposição 2.33. *Se* $u \in H_\Delta(\Omega) = \mathcal{H}^0 \cap H^1(\Omega)$*, então* $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Omega)$*. Considerando* $H_\Delta(\Omega)$ *com a norma*

$$\|u\|^2_{H_\Delta(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

a aplicação γ_1 *é contínua de* $H_\Delta(\Omega)$ *em* $H^{-1/2}(\Omega)$*.*

Demonstração. Medeiros, L. A; Milla Miranda, M. ([15], p. 122-123). □

Observação 2.34. *A aplicação* γ_1 *como definida na proposição anterior é denominada traço da derivada normal.*

Observação 2.35. *Nos resultados seguintes considera-se o seguinte subespaço de* $H^1(\Omega)$

$$V = \{u \in H^1(\Omega);\ u = 0 \ \ em \ \ \Gamma_0\}.$$

Proposição 2.36. *Em V a norma do gradiente é equivalente a norma* $H^1(\Omega)$*.*

Demonstração. Medeiros, L. A; Milla Miranda, M. ([15], p. 119). □

Proposição 2.37. *Sejam* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $g \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$*, então a solução do problema*

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u = f \ \ em \ \ \Omega; \\ u = 0 \ \ em \ \ \Gamma_0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \ \ em \ \ \Gamma_1, \end{array}\right. \tag{2.3}$$

pertence a $V \cap H_\Delta(\Omega)$ *e*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\left(|f| + \|u\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)}\right).$$

Demonstração. Considere o par $\{0, \overline{g}\} \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ onde

$$u = \begin{vmatrix} 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0; \\ \\ g \ \text{ em } \ \Gamma_1. \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

Da demonstração do Teorema 2.31 e a Proposição 2.33 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C_1 \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \geqslant \|h\|_{H_\Delta(\Omega)}. \tag{2.5}$$

Seja ω a solução de

$$\begin{vmatrix} -\Delta\omega = f - \Delta h \ \text{ em } \ \Omega, \\ \omega = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1. \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

Veja que tem solução pertencente à $V \cap H_\Delta(\Omega)$. Mais ainda, pelo resultado de regularidade Elíptica a solução deste problema pertence a $H^2(\Omega)$ e vale a desigualdade

$$\|\omega\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \overline{C} \left(|f| + |\Delta h|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.7}$$

Portanto, seja $u := \omega + h \in V \cap H_\Delta(\Omega)$ e usando a desigualdade triangular, que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^2(\Omega)}$, as relações (2.7) e (2.5), tem-se

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leqslant \|\omega\|_{H^1(\Omega)} + \|h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leqslant \max\{\overline{C}, 1\} \left(|f|_{L^2(\Omega)} + |\Delta h|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &= \max\{\overline{C}, 1\} \left(|f|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{H_\Delta(\Omega)} \right) \\ &\leqslant \max\{C_1, \overline{C}, 1\} \left(|f|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

□

Corolário 2.38. *Em* $V \cap H_\Delta(\Omega)$ *a norma* $H_\Delta(\Omega)$ *e a norma*

$$u \mapsto \left(|\Delta u|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \right)^{1/2}.$$

são equivalentes.

Demonstração. De fato, pelo que foi demonstrado anteriormente vale a desigualdade abaixo

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_\Delta} = \|u\|_{H^1(\Omega)} + |\Delta u|_{L^2(\Omega)} &\leqslant (C+1)|\Delta u|_{L^2(\Omega)} + C \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \\ &\leqslant \max\{C, C+1\} \left(|\Delta u|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pela desigualdade entre as normas da soma e a norma eucludiana, obtém-se

$$\|u\|_{H_\Delta} \leqslant 2\max\{C, C+1\}\left(|\Delta u|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_1)}\right)^{1/2}. \tag{2.10}$$

Para demonstrar o outro lado da desigualdade veja que pela Proposição 2.33, tem-se as seguintes desigualdades

$$|\Delta u|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H_\Delta} \text{ e } \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \leqslant C\|u\|_{H_\Delta}$$

Elevando ao quadrado, somando, e elevando a 1/2, tem-se

$$\left(|\Delta u|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_1)}\right)^{1/2} = (1+C^2)^{1/2}\|u\|_{H_\Delta}.$$

□

Lema 2.39. *Seja* $u^0 \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, $u^1 \in V$ *satisfazendo*

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + g(\cdot, u^1) = 0 \text{ em } \Gamma_1,$$

onde $g(x,s)$ *é uma função Lipschitz em* $\Gamma_1 \times \mathbb{R}$, *observe que se isto ocorre existe uma constante* $C > 0$ *tal que* $\forall\, p, q \in V$

$$\|g(\cdot, p) - g(\cdot, q)\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \leqslant C\|p - q\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}, \tag{2.11}$$

então para todo $\varepsilon > 0$ *existem funções* u^0_ε *e* u^1_ε *tais que*

$$\|u^0 - u^0_\varepsilon\|_{V\cap H_\Delta(\Omega)} < \varepsilon; \quad \|u^1 - u^1_\varepsilon\|_V < \varepsilon,$$

ainda satisfazendo

$$\frac{\partial u^0_\varepsilon}{\partial \nu} + g(\cdot, u^1_\varepsilon) = 0 \text{ em } \Gamma_1.$$

Demonstração. Veja que $D(\Omega) \subset V \cap H_\Delta(\Omega) \subset V$. Como norma de V e a norma de $H^1_0(\Omega)$ são equivalentes

$$V = \overline{D(\Omega)}^V \subset \overline{V \cap H_\Delta(\Omega)}^V \subset V.$$

Isto implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $u^1_\varepsilon \in V$ tal que

$$\|u^1 - u^1_\varepsilon\|_V < \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\sqrt{C_2}}\right\} \leqslant \varepsilon,$$

onde C_2 a constante que aparecerá em (2.13). Daí, considera-se u_ε^0 solução do problema

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta u_\varepsilon^0 = -\Delta u^0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \\ u_\varepsilon^0 = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0, \\ \\ \dfrac{\partial u_\varepsilon^0}{\partial \nu} = -g(\cdot, u_\varepsilon^1) \ \text{ em } \ \Gamma_1. \end{array}\right. \tag{2.12}$$

pela Proposição 2.37, $u_\varepsilon^0 \in V \cap H_\Delta(\Omega)$. Utilizando em sequência o Corolário 2.38, $(2.12)_1$, $(2.12)_3$, (2.11), o Teorema do Traço, a desigualdade entre as normas de V e a norma de H^1 em V, segue que

$$\begin{aligned} \|u^0 - u_\varepsilon^0\|^2_{V \cap H_\Delta(\Omega)} &= |\Delta u_\varepsilon^0 - \Delta u^0|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u^0}{\partial \nu} - \frac{\partial u_\varepsilon^0}{\partial \nu} \right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \\ &= \left\| g(\cdot, u^1) - g(\cdot, u_\varepsilon^1) \right\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \\ &\leqslant C \left\| u^1 - u_\varepsilon^1 \right\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\ &\leqslant C_1 \left\| u^1 - u_\varepsilon^1 \right\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\leqslant C_2 \left\| u^1 - u_\varepsilon^1 \right\|^2_{V} \leqslant C_2 \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

□

2.5 Espaços $L^p(0, T; X)$

Estende-se as noções de mensurabilidade, integrabilidade, para funções

$$f : [0, T] \longrightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$.

Definição 2.40. ***(i)*** *Uma função* $s : [0, T] \to X$ *é chamada simples se tem a forma*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t) u_i, \ (0 \leqslant t \leqslant T),$$

onde cada E_i *é um subconjunto Lebesgue mensurável de* $[0, T]$ *e* $u_i \in X$*, (i=1,2,...,m).*
(ii) *Uma função* $f : [0, T] \longrightarrow X$ *é fortemente mensurável se existem funções simples* $s_k : [0, T] \to X$ *tais que*

$$s_k(t) \longrightarrow f(t); \ \textit{para q.s } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

(iii) *Uma função* $f : [0, T] \longrightarrow X$ *é fracamente mensurável se, para cada* $u^* \in X^*$ *a aplicação* $t \mapsto \langle u^*, f(t) \rangle$ *é Lebesgue mensurável.*

Definição 2.41. ***(i)*** *Se* $s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)u_i$ *é uma função simples, define-se*

$$\int_0^T s(t)dt=\sum_{i=1}^{m}|E_i|u_i.$$

(ii) *Diz-se que* $f:[0,T]\longrightarrow X$ *é somável se existe uma sequência de* $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de funções simples, tal que*

$$\int_0^T \|s_k(t)-f(t)\|dt\to 0;\ \textit{quando}\ \ k\to\infty.$$

(iii) *Se a função* f *é somável, define-se*

$$\int_0^T f(t)dt=\lim_{k\to\infty}\int_0^T s_k(t)dt.$$

Definição 2.42. *Denota-se por* $L^p(0,T;X)$, *com* $1\leqslant p\leqslant\infty$ *o espaço vetorial das (classes de) funções* $u:(0,T)\longrightarrow X$ *fortemente mensuráveis com valores em* X *e tais que; se* $1\leqslant p<\infty$ *a função* $t\mapsto\|u(t)\|_X^p$ *é integrável à* Lebesgue *em* $(0,T)$*; e se* $p=\infty$ *a função* $t\mapsto\|u(t)\|_X\in L^\infty(0,T)$.

O espaço $L^p(0,T;X)$ é um espaço completo com a norma definida por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p},\ \text{se}\ \ 1\leqslant p<\infty.$$

Se $p=\infty$ norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)}=\sup_{0<t<T}\operatorname{ess}\|u(t)\|_X.$$

Apenas no caso em que $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v,u\rangle_{L^2(0,T;X)}=\int_0^T\langle v(t),u(t)\rangle_X\,dt.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1<p<\infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v,u\rangle_{L^{p'}(0,T;X')\times L^p(0,T;X)}=\int_0^T\langle v(t),u(t)\rangle_{X'\times X}\,dt.$$

No caso $p=1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$.

Definição 2.43. *Denota-se por* $C([0,T];X)$, *com* $T>0$ *o espaço de* Banach *das funções contínuas* $u:[0,T]\longrightarrow X$ *munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C([0,T];X)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_X<\infty.$$

Pode-se citar algumas propriedades importantes do espaço $L^p(0,T;X)$ que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

Observação 2.44. *Considera-se o intervalo aberto* $I\subset\mathbb{R}$ *e um espaço de Banach* X.
(i) *Se* I *é um intervalo limitado e* $p\leqslant q$, *então*

$$L^q(I,X)\hookrightarrow L^p(I,X)\quad e\quad \|f\|_{L^p(I,X)}\leqslant|I|^{\frac{q-p}{pq}}\|f\|_{L^q(I,X)}.$$

(ii) *Se* Y *é um espaço de Banach e se* $A:X\to Y$ *um operador linear e contínua, então para todo* $f\in L^p(I,X)$ *tem-se* $Af\in L^p(I,Y)$ *e*

$$\|Af\|_{L^p(I,Y)}\leqslant\|A\|\|f\|_{L^p(I,X)}.$$

Em particular se $X\hookrightarrow Y$ *e se* $f\in L^p(I,X)$, *então* $f\in L^p(I,Y)$ *(quando toma-se* A *sendo a imersão)*

Demonstração. Cazenave ([7], p. 17). □

Teorema 2.45 (Aubin-Lions)**.** *Sejam* B_0, B, B_1 *espaços de Banach,* B_0 *e* B_1 *reflexivos, a imersão de* B_0 *em* B *é compacta,* B *imerso continuamente em* B_1, $1<p_0,\ p_1<\infty$ *e* W *o espaço*

$$W=\{u\in L^{p_0}(0,T;B_0);\ u'\in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

equipado da norma

$$\|u\|_W=\|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)}+\|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Então W *é um espaço de Banach, e a imersão de* W *em* $L^{p_0}(0,T;B)$ *é compacta.*

Demonstração. Lions ([13], p. 58). □

Observação 2.46. *Uma consequência do Teorema de Aubin-Lions: se* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $L^2(0,T;B_0)$ *e* $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência limitada em* $L^2(0,T;B_1)$ *então* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* W. *Daí, segue-se que existe uma subsequência* $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *tal que* $u_{\nu_k}\longrightarrow u$ *forte em* $L^2(0,T;B)$.

Lema 2.47. *Seja* Q *um subconjunto aberto limitado de* $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_m *e* g *funções de* $L^q(Q)$ *com* $1 < q < \infty$, *satisfazendo*

$$|g_m|_{L^q(Q)} \leqslant C \ \text{ e } \ g_m \to g, \ \text{em q.t.p de } Q.$$

Então

$$g_m \rightharpoonup g, \ \text{em } L^q(Q).$$

Demonstração. Lions ([13], p. 12). □

Lema 2.48. *Sejam* V, H, V' *três espaços de Hilbert, sendo* V' *o dual de* V. *Se uma função* u *pertence ao espaço* $L^2(0,T;V)$ *e seu derivada* u' *pertence ao espaço* $L^2(0,T;V')$, *então* u *é quase sempre igual a uma função contínua de* $[0,T]$ *em* H, *e tem-se a seguinte igualdade no sentido de distribuição escalar em* $(0,T)$

$$\frac{d}{dt}|u|^2 = 2\langle u', u\rangle.$$

A igualdade acima faz sentido desde que as funções

$$t \mapsto |u(t)|^2 \ \text{ e } \ t \mapsto \langle u'(t), u(t)\rangle,$$

sejam ambas integráveis em $[0,T]$.

Demonstração. Temam ([21], p. 261). □

Lema 2.49. *Seja* X *um espaço de Banach,* $f \in L^p(0,T;X)$ *e* $f' \in L^p(0,T;X)$ *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *então*

$$f \in C([0,T];X).$$

(Possivelmente redefinidas sobre um conjunto de medida nula).

Demonstração. Lions ([13], p. 7). □

2.6 Distribuições Vetoriais

Seja um número real $T > 0$ e X um espaço de Banach real com norma $\|.\|$, considera-se as seguintes definições

Definição 2.50. *Uma distribuição vetorial sobre* $(0, T)$ *com valores em* X*, é uma função* $f : \mathcal{D}(0, T) \to X$ *linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre* $(0, T)$ *com valores em* X *e é denotado por*

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); X).$$

Definição 2.51. *Seja* $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$*. A* derivada *de ordem* n *é definida como sendo a distribuição vetorial sobre* $(0, T)$ *com valores em* X *dada por*

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Observação 2.52. *Se a função* f *pertence ao espaço* $L^p(0, T; X)$ *com* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, então define-se uma distribuição ainda denotada por* f*, dada por*

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \ \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Para maiores detalhes vide Lions ([13], p. 7).

2.7 Resultados Importantes

Nesta seção, apresentam-se alguns resultados importantes que serão utilizados no decorrer do trabalho.

2.7.1 Funções Próprias e Decomposição Espectral

Teorema 2.53. *Seja* Ω *um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$*. Então existe uma sequência não decrescente de números reais* $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *com* $\lambda_1 > 0$ *tal que*

$$\lambda_m \to \infty \ \textit{ quando } \ m \to \infty.$$

E uma base Hilbertiana $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *de* $L^2(\Omega)$ *tais que,* $\omega_m \in H_0^1(\Omega)$

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta w_j = \lambda_j w_j & \textit{em } \Omega, \\ w_j = 0 & \textit{em } \Gamma, \end{array} \right.$$

para $j = 1, 2 \ldots$

Diz-se que os números $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *são os autovalores de* $-\Delta$ *(com a condição de Dirichlet) e as funções que formam as sequência* $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *são as funções próprias associadas a tais autovalores.*

Demonstração. Evans ([10], p. 335). □

2.7.2 O Teorema de Carathéodory

Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (x, t) onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, seja $f : D \to \mathbb{R}^n$. Diz-se que f satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando:

- $f(x, t)$ é mensurável em t, para cada x fixo;
- $f(x, t)$ é contínua em x, para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(x, t)| \leqslant m_K(t)$, para todo $(x, t) \in K$.

Definição 2.54. *Uma solução no sentido* estendido *do problema de Cauchy*

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{array} \right.$$

é uma função $\phi(t)$ *absolutamente contínua tal que, para algum* β *real, tenha-se*

i) $(\phi(t), t) \in D$*, para todo,* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*;*

ii) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.*

Considere-se o retângulo

$$R = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\right\},$$

com $a, b > 0$. Então, tem-se os seguintes resultados:

Teorema 2.55 (Carathéodory)**.** *Seja* $f : R \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* R*, então sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leqslant \beta$ $(\beta > 0)$, *existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{array} \right.$$

Demonstração. Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([18], p. 156). □

Corolário 2.56. *Seja* D *aberto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* f *satisfaz as condições de Carathéodory sobre* D*, então o problema*

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0, \end{array} \right.$$

tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$*.*

Demonstração. Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([18], p. 159). □

Teorema 2.57. *Seja* D *aberto limitado conexo em* $\mathbb{R}^{n+1}$*, uma função* f *que satisfaz as duas primeiras condições de Carathéodory sobre* D *e existe uma função integrável* $m(t)$ *tal que* $|f(t,x)| \leqslant m(t)$*, para todo* $(t,x) \in D$*. Seja* φ *uma solução de*

$$x' = f(t,x) \ \textit{ para quase todo } \ t \textit{ em } \ I,$$

sobre o intervalo aberto (a, b) *então*

i) *Existe* $\varphi(a+0), \varphi(b-0)$*;*

ii) *Se* $(b, \varphi(b-0)) \in D$ *então* φ *pode ser prolongada até* $(a, b+\delta]$ *para algun* δ*. O resultado análogo também vale para* a*;*

iii) $\varphi(t)$ *pode ser prolongada até um intervalo* (γ, ω) *tal que* $(\gamma; \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0))$ *pertencem a* ∂D *(fronteira de* D*);*

iv) *Se* f *pode estender-se a* $\overline{D}$ *sem que ele perca suas propriedades então* $\varphi(t)$ *pode ser prolongada até um intervalo* $[\gamma, \omega]$ *tal que* $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$*.*

Demonstração. Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([18], p. 159). □

Corolário 2.58. *(Prolongamento de solução). Sejam* $D = B \times [0, T]$*, com* $0 < T < \infty$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant b\}$*,* $b > 0$ *e a função* f *nas condições do Teorema 2.57. Seja* $\phi(t)$ *uma solução de*

$$\left| \begin{array}{l} x' = f(x,t), \\ x(0) = x_0 \quad e \quad |x_0| \leqslant b. \end{array} \right.$$

Se em qualquer intervalo I *onde* $\phi(t)$ *está definida, se tenha,* $|\phi(t)| \leqslant M$*, para todo* $t \in I$*,* M *independente de* t *e* $M < b$*. Então* ϕ *tem um prolongamento até* $[0, T]$*.*

Demonstração. Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([18], p. 164). □

2.7.3 Lema de Gronwall

Lema 2.59 (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial)**.** *Seja* $\eta(\cdot)$ *uma função não negativa, absolutamente contínua em* $[0, T]$*.*

i) *Se* η *satisfaz para* t *q.s. a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leqslant \psi(t) + \varphi(t)\,\eta(t)\,, \tag{2.14}$$

onde $\varphi(t)$ *e* $\psi(t)$ *são funções não negativas e integráveis em* $[0, T]$*, então para todo* $0 \leqslant t \leqslant T$.

ii) *Em particular, se* $\eta' \leqslant \varphi\eta$ *em* $[0, T]$ *e* $\eta(0) = 0$*, tem-se*

$$\eta \equiv 0 \quad em \quad [0, T]\,.$$

Demonstração. Evans ([10], p. 624). □

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Soluções Fortes

Seja Ω um aberto limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$. Denotando por Γ a fronteira suave de Ω. Suponha que Γ admita uma partição determinada pelos subconjuntos Γ_0, Γ_1 ambos de medida positiva e tais que $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \emptyset$.

Fixando α, β, f e g com valores reais, satisfazendo as seguintes propriedades

$$\begin{array}{ll} (1) & \alpha \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^+), \quad \alpha' \in L^1(\mathbb{R}^+) \text{ e } \alpha(t) \geqslant \alpha_0 > 0; \\ (2) & \beta \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^+) \text{ e } \beta(t) \geqslant \beta_0 > 0; \\ (3) & f \text{ Lipschitz em } \mathbb{R} \text{ com } f(0) = 0 \text{ e } f(s)s \geqslant 0; \\ (4) & g \text{ uma função real Lipschitz definida em } \Gamma_1 \times \mathbb{R} \text{ tal que} \\ & \qquad [g(x,s) - g(x,r)](s-r) \geqslant g_0(s-r)^2 \text{ e } g(x,0) = 0, \\ & \text{onde } g_0 \text{ é uma constante real positiva.} \end{array} \tag{3.1}$$

Neste capítulo mostra-se a existência e unicidade de soluções fortes do sistema não linear acoplado

$$\left| \begin{array}{l} u''(x,t) - \alpha(t)\Delta u(x,t) + f(u(x,t)) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times]0,\infty[, \\ \theta'(x,t) - \beta\left(\int_\Omega \theta(x,t)dx\right)\Delta\theta(x,t) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)u'(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times]0,\infty[, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

submetido as seguintes condições de fronteira

$$\left| \begin{array}{l} u(x,t) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times]0,\infty[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + g(x, u'(x,t)) = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times]0,\infty[, \\ \theta(x,t) = 0 \text{ em } \Gamma \times]0,\infty[, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

e as condições iniciais

$$u(0) = u_0, \;\; u'(0) = u_1, \;\; \theta(0) = \theta_0 \;\text{ em }\; \Omega, \tag{3.4}$$

onde ν denota o vetor unitário cuja direção é normal a Γ_1.

No decorrer do trabalho as notações $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$ e $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ indicarão o produto interno e a norma dos espaços $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ respectivamente, serão também reservadas, a menos de menção explicita, as notações $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ e "$\cdot$" para indicar respectivamente o módulo em $\mathbb{R}$ e o produto interno euclidiano do $\mathbb{R}^n$.

3.1 Existência de Soluções Fortes

Mostra-se nesta seção, a existência de soluções fortes do sistema misto (3.2)-(3.4), as ideias que embasam o denvolvimento da mesma, bem como todo o corpo deste trabalho, são fortemente baseadas em H. Clark [6].

Definição 3.1. *Uma solução global do problema não linear* (3.2)-(3.4) *é um par de funções* $\{u, \theta\}$ *definidas em* $\Omega \times [0, \infty[$*, assumindo valores reais, tais que*

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V \cap H_\Delta(\Omega)), \;\; u' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V), \\ &u'' \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)), \;\; \theta \in H^1_{loc}(0,\infty; H_0^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

satisfazendo

$$\left|\begin{aligned} &u'' - \alpha\Delta u + f(u) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\theta = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ &\theta' - \beta\left(\int_\Omega \theta\, dx\right)\Delta\theta + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)u' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(\,.\,, u') = 0 \;\text{ em }\; L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)), \\ &u(0) = u_0,\; u'(0) = u_1,\; \theta(0) = \theta_0 \;\text{ em }\; \Omega. \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

Teorema 3.2. *Suponha* $u_0 \in V \cap H_\Delta(\Omega),\; u_1 \in V,\; \theta_0 \in H_0^1(\Omega)$ *e*

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + g(\,.\,, u_1) = 0 \;\text{ em }\; \Gamma_1.$$

Então existe única solução global do problema (3.2)-(3.4)*, no sentido da Definição 3.1.*

Demonstração: A demonstração do Teorema 3.2 é baseada nos *Métodos de Faedo-Galerkin-Lions* e de *Compacidade*, a qual é organizada nas seguintes seções:

3.1.1 Formulação Variacional;

3.1.2 Soluções do problema aproximado;

3.1.3 Estimativas "a priori" das soluções aproximadas;

3.1.4 Passagem ao limite das soluções aproximadas;

3.1.5 Verificação dos dados iniciais;

3.1.6 Unicidade das soluções.

3.1.1 Formulação Variacional

Supondo $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$, satisfazendo $(3.2)_1$-(3.3) e $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$, com $\xi_{|\Gamma_0} = 0$, vale a identidade Green abaixo

$$\int_\Omega \xi(x)\Delta u(x,t)\ dx = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}\xi(x)\ d\Gamma - \int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla \xi(x)\ dx. \tag{3.7}$$

Multiplicando a equação $(3.2)_1$ aplicada em t por $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$, tal que $\xi_{|\Gamma_0} = 0$, integrando sobre Ω, e usando (3.7), tem-se

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u(x,t)''\xi(x)dx + \alpha(t)\left(\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\xi(x)dx - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x,t)\xi(x)d\Gamma\right)\\ &+\int_\Omega f(u(x,t))\xi(x)dx + \int_\Omega \xi(x)(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(x,t)dx = 0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Utilizando $(3.3)_2$ em (3.8) obtém-se

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u''(x,t)\xi(x)dx + \alpha(t)\left(\int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla\xi(x)dx + \int_{\Gamma_1} g(x,u'(x,t))\xi(x)d\Gamma\right)\\ &+\int_\Omega f(u(x,t))\xi(x)dx + \int_\Omega \xi(x)(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(x,t)dx = 0.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Do mesmo modo, considerando $\theta \in C^2(\overline{\Omega} \times [0,T])$, satisfazendo $(3.2)_2$ e $\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$, com $\theta_{|\Gamma} = 0$, obtém-se multiplicando $(3.2)_2$, aplicada em t, por λ; integrando sobre Ω e utilizando a identidade de Green, que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \theta(x,t)'\lambda(x)dx + \beta\left(\int_\Omega \theta(x,t)dx\right)\int_\Omega \nabla\theta(x,t)\cdot\nabla\lambda(x)dx\\ &+\int_\Omega \lambda(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'(x,t)dx = 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

O problema de determinar u e θ com uma regularidade conveniente satisfazendo (3.9) e (3.10) no sentido das distribuições para toda $\xi \in V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $\lambda \in H_0^1(\Omega)$ denomina-se *formulação variacional* para o problema (3.2). Esta nova formulação motiva considerar a etapa do problema aproximado como segue.

3.1.2 Soluções Aproximadas do Problema Misto

A partir desta seção, para que a notação não fique sobrecarregada convenciona-se que

$$\int_\Omega f(x,t)dx =: \int_\Omega f(t)dx.$$

Tornando implícito através de "dx"a dependência do integrando com relação a variável x.

Pelo Lema 2.39, existem sequências $(u_m^0)_{m\in\mathbb{N}}$, $(u_m^1)_{m\in\mathbb{N}}$ tais que

$$u_k^0 \;\rightarrow\; u^0 \text{ em } V \cap H_\Delta, \tag{3.11}$$

$$u_k^1 \;\rightarrow\; u^1 \text{ em } V, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u_k^1}{\partial \nu} \;=\; -g(\,.\,, u_k^1). \tag{3.13}$$

Fixando k, obtém-se pelo lema de Zorn uma base Hilbertiana para $V \cap H_\Delta(\Omega)$

$$\omega_1^k, \ldots, \omega_m^k, \ldots$$

onde u_k^0, $u_k^1 \in [\omega_1^k, \omega_2^k]$. Para $H_0^1(\Omega)$ fixa-se a base espectral do operador laplaciano

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \ldots$$

Das bases anteriores considera-se os espaços

$$W_m = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m] \;\text{ e }\; V_k^m = [\omega_1^k, \ldots, \omega_m^k], \tag{3.14}$$

de modo que se $u_{km}(t) \in V_k^m$ e $\theta_m(t) \in W_m$, existem $\{h_{mk1}(t), \ldots, h_{mkm}(t)\}$ e $\{p_{m1}(t), \ldots, p_{mm}(t)\}$ tais que

$$u_{km}(t) \;=\; \sum_{j=1}^m h_{mkj}(t)\omega_j^k, \tag{3.15}$$

$$\theta_m(t) \;=\; \sum_{j=1}^m p_{mj}(t)\sigma_j. \tag{3.16}$$

A partir das formulações variacionais obtidas na seção anterior considera-se para k fixado, o problema aproximado

$$\left|\begin{array}{l}(u''_{km}(t),\xi)+\alpha[(\nabla u_{km}(t),\nabla\xi)+(g(\ .\ ,u'),\xi)_{\Gamma_1}]+(f(u_{km}(t)),\xi)\\ +((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m,\xi)=0,\\ \\ (\theta'_m(t),\lambda)+\beta\Big(\int_\Omega\theta_m(t)\Big)(\nabla\theta_m(t),\nabla\lambda)+((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t),\lambda)=0,\end{array}\right. \tag{3.17}$$

para todo $\xi\in V_k^m$ e $\lambda\in W_m$. As condições iniciais são dadas por

$$\begin{array}{rcl}u_{km}(0)&=&u_k^0,\\ u'_{km}(0)&=&u_k^1,\\ \theta_m(0)&=&\theta_{0m}\to\theta_0 \text{ em } H_0^1(\Omega).\end{array} \tag{3.18}$$

Em termo das bases, utilizando (3.17) e omitindo o índice k para não sobrecarregar anotação, obtém-se

$$\left|\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^m h''_{mj}(t)(\omega_j,\omega_i)+\alpha(t)\left[\sum_{j=1}^m h_{mj}(t)(\nabla\omega_j,\nabla\omega_i)+(g\left(\sum_{j=1}^m h_{mj}(t)\omega_j\right),\omega_i)_{\Gamma_1}\right]\\ \displaystyle +(f\left(\sum_{j=1}^m h_{mj}(t)\right),\omega_i)+\sum_{j=1}^m p_{mj}(t)((\mathbf{a}\cdot\nabla)\sigma_j,\omega_i)=0,\\ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^m p'_{mj}(t)(\sigma_j,\sigma_i)+\beta\left(\int_\Omega\sum_{j=1}^m p_{mj}(t)\sigma_j dx\right)\sum_{j=1}^m p_{mj}(t)(\nabla\sigma_j,\nabla\sigma_i)\\ \displaystyle +\sum_{j=1}^m h'_{mj}((\mathbf{a}\cdot\nabla)\omega_j,\sigma_i)=0.\end{array}\right. \tag{3.19}$$

Reescrevendo o sistema em sua formulação matricial, denotando "$\cdot$" o produto matricial, obtém-se

$$\left|\begin{array}{l}V\cdot H(t)''+\alpha(A\cdot H(t))+G(H'(t))+F(H(t))+\overline{A}\cdot P(t)=0,\\ W\cdot P'(t)+\varphi(P(t))B\cdot P(t)+D\cdot H'(t)=0,\end{array}\right. \tag{3.20}$$

onde $H(t)=(h_{m1}(t),\dots,h_{mm}(t))_{V\cap H_\Delta}$, $P(t)=(p_{m1}(t),\dots,p_{mm}(t))_{H_0^1}$, $A_{ij}=(\nabla\omega_j,\nabla\omega_i)$, $W_{ij}=(\sigma_j,\sigma_i)$, $V_{ij}=(\omega_j,\omega_i)$, $D_{ij}=(\mathbf{a}\cdot\nabla\omega_j,\sigma_i)$, $\overline{A}_{ij}=((\mathbf{a}\cdot\nabla)\sigma_j,\omega_i)$, $B_{ij}=(\nabla\sigma_j,\nabla\sigma_i)$, $F(H)=((f(H),\omega_1),\dots,(f(H),\omega_m))$, $G(H')=((g(H'),\omega_1)_{\Gamma_1},\dots,(g(H'),\omega_m)_{\Gamma_1})$ e

$$\varphi(P(t)) = \beta\left(\int_\Omega \sum_j p_{mj}(t)\omega_j dx\right) = \beta(\langle P(t), \mathbf{w}\rangle),$$

sendo $\mathbf{w} := (\int_\Omega \omega_1, \dots \int_\Omega \omega_m)$.

Considerando $X(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ H(t) \\ H'(t) \end{pmatrix}$, tem-se $X'(t) = \begin{pmatrix} P'(t) \\ H'(t) \\ H''(t) \end{pmatrix}$. Por (3.20)

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} -\varphi(P)W^{-1}BP - W^{-1}DH' \\ H \\ -\alpha(t)V^{-1}AH - \alpha(t)V^{-1}G(H') - V^{-1}F(H) - V^{-1}\overline{A}P \end{pmatrix} \qquad (3.21) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W^{-1}D \\ 0 & I & 0 \\ -V^{-1}\overline{A} & 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -W^{-1}\varphi(P)B \\ 0 \\ -\alpha(t)V^{-1}A - \alpha(t)V^{-1}G(H') - V^{-1}F(H) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto o sistema (3.21) é equivalente a EDO

$$\begin{aligned} Y' &= \Phi(Y, t) \qquad (3.22) \\ Y(0) &= ((\theta_0)_{H_0^1}, (u_k^0)_{V\cap H_\Delta}, (u_k^1)_{V\cap H_\Delta}) \end{aligned}$$

onde a notação $(v)_W$ significa o vetor m-dimensional escrito na base tomada em W e $\Phi : \mathbb{R}^{3m} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3m}$ é dada por

$$\begin{aligned} \Phi(Y, t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W^{-1}D \\ 0 & I & 0 \\ -V^{-1}\overline{A} & 0 & 0 \end{pmatrix} Y \qquad (3.23) \\ &+ \begin{pmatrix} -W^{-1}\varphi(P_1(Y))B \\ 0 \\ -\alpha(t)V^{-1}A - \alpha(t)V^{-1}G(P_3(Y)) - V^{-1}F(P_2(Y)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sendo $P_1(y_1, \dots, y_{3m}) = (y_1, \dots, y_m)$,$P_2(y_1, \dots, y_{3m}) = (y_{m+1}, \dots, y_{2m})$, $P_3(y_{2m+1}, \dots, y_{3m}) = (y_1, \dots, y_{3m})$. Observe que

1. Para Y_0 fixado, $\Phi(Y_0, t)$, é integrável em $\mathbb{R}$;

2. Pata t_0 fixado $\Phi(Y, t_0)$, é uma função contínua pois o produto interno, P_1, P_2, P_3, f e g são funções contínuas;

3. Para cada $\overline{K} \subset \mathbb{R}^{3m} \times \mathbb{R}$ compacto, pela continuidade do produto interno e das funções P_1, P_2, P_3, f e g, existem constantes C' e C'' que dependem de $\overline{K}$ tais que

$$|\Phi(Y,t)| \leqslant C'' + \alpha(t)C'.$$

Como $\alpha \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}_+)$, no intervalo $[0,T]$ e Ω é limitado o Teorema 2.55 garante a existência de uma solução $X(t)$ da equação (3.22) em um intervalo $[0,t_m]$, com $t_m < T$. A Estimativa I abaixo, garante a existência de uma extensão da solução em todo o intervalo $[0,T]$ graças ao Corolário 2.58.

3.1.3 Estimativa "a priori"das Soluções Aproximadas

Na seção anterior mostrou-se a existência de pares de funções $\{u_m(t),\ \theta_m(t)\}$ soluções do problema aproximado (3.17) em $[0,t_m]$. Este intervalo será estendido ao intervalo $[0,T]$ onde $T > 0$ é arbitrário, utilizando a primeira estimativa estabelecida a seguir.

Estimativa I. Tomando $\xi = 2u'_m(t)$ e $\lambda = 2\theta_m(t)$ em $(3.17)_1$ e $(3.17)_2$ respectivamente, resulta

$$\left|\begin{array}{l} 2(u''_m(t),u'_m(t)) + 2\alpha(t)\Big((\nabla u_m(t),u'_m(t)) + (g(u'_m(t)),u'_m(t))_{\Gamma_1}\Big) + 2(f(u_m(t)),u'_m(t)) \\ +2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t),u'_m(t)) = 0, \\ 2(\theta'_m(t),\theta_m(t)) + 2\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)dx\Big)\Big(\nabla\theta_m(t),\nabla\theta_m(t)\Big) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t),\theta_m(t)) = 0. \end{array}\right. \tag{3.24}$$

Como $w_j \in H^1_0(\Omega)$, para $j = 1,2,3,\ldots,m$, então da identidade Gauss tem-se

$$\int_\Omega \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}(t)\theta_m(t)dx = -\int_\Omega u'_m(x)\frac{\partial\theta_m}{\partial x_i}(t)dx,$$

para $i = 1,2,3,\ldots,n$. Note que

$$\begin{aligned} 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t),\theta_m(t)) = 2\int_\Omega (\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t)\theta_m(t)dx &= 2\sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}(t)\theta_m(t)dx \\ &= -2\sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i\frac{\partial\theta_m}{\partial x_i}(t)u'_m(t)dx \\ &= -2\int_\Omega (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t)u'_m(t)dx \\ &= -2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t),u'_m(t)), \end{aligned}$$

logo,

$$2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t),\theta_m(t)) + 2(u'_m(t),(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t)) = 0. \tag{3.25}$$

Por (3.25) e as identidades seguintes, válidas pelo Lema 2.48,

$$2(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2,$$

$$2(\theta'_m(t), \theta_m(t)) = \frac{d}{dt}|\theta_m(t)|^2,$$

$$\alpha'(t)(\nabla u_m(t), \nabla u_m(t)) + 2\alpha(t)(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = \frac{d}{dt}\left\{\alpha(t)|\nabla u_m(t)|^2\right\},$$

$$2(f(u_m(t)), u'_m(t)) = 2\int_\Omega f(u_m(t))u'_m(t)dx = 2\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \mathcal{F}(u_m(t))dx\right\},$$

onde $\mathcal{F}(\lambda) = \int_0^\lambda f(\zeta)d\zeta$, vale a igualdade abaixo para a soma de $(3.24)_1$ com $(3.24)_2$

$$\frac{d}{dt}E(t)+2\alpha(g(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1}+2\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)|\nabla\theta_m(t)|^2 = \alpha'(t)|\nabla u_m(t)|^2, \quad (3.26)$$

onde

$$E(t) = |u'_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla u_m(t)|^2 + 2\int_\Omega \mathcal{F}(u_m(t))dx. \quad (3.27)$$

Por $(3.1)_{(1),(2),(4)}$, obtém-se

$$2\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)|\nabla\theta_m(t)|^2 \geqslant 2\beta_0|\nabla\theta_m(t)|^2, \quad (3.28)$$

$$2\alpha(t)(g(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1} \geqslant 2\alpha_0 g_0|u'_m(t)|^2_{\Gamma_1}. \quad (3.29)$$

Utilizando as estimativas (3.28), (3.29) em (3.26), e observando que $1 \leqslant \dfrac{\alpha(t)}{\alpha_0}$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) + 2\alpha_0 g_0|u'_m(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\beta_0|\nabla\theta_m(t)|^2 &\leqslant \alpha'(t)|\nabla u_m(t)|^2\\ &\leqslant |\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}|\nabla u_m(t)|^2\\ &\leqslant |\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}|\nabla u_m(t)|^2\\ &\leqslant \frac{|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}}}{\alpha_0}E(t), \end{aligned}\quad (3.30)$$

para cada $t \in [0, t_m]$. Integrando (3.30) de 0 a $t \in (0, t_m)$, tem-se

$$E(t) + 2\int_0^t \alpha_0 g_0|u'_m(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\beta_0\int_0^t |\nabla\theta_m(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha_0}\int_0^t |\alpha'(s)|_{\mathbb{R}}E(s) + E(0). \quad (3.31)$$

Observe que

$$\theta_{0m} \to \theta_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \Rightarrow \theta_{0m} \to \theta_0,\ \nabla\theta_{0m} \to \nabla\theta_0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad (3.32)$$

$$u_k^0 \to u^0 \text{ em } V \cap H_\Delta(\Omega) \Rightarrow \nabla u_k^0 \to \nabla u^0 \text{ em } L^2(\Omega), \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} u_k^1 \to u^1 \text{ em } V &\Rightarrow \nabla u_k^1 \to \nabla u^1 \text{ em } L^2(\Omega)\\ &\Rightarrow u_k^1 \to u^1 \text{ em } H^1(\Omega)\\ &\Rightarrow u_k^1 \to u^1 \text{ em } L^2(\Omega). \end{aligned}\quad (3.34)$$

Por $(3.1)_{(3)}$, $f(0)=0$ e $|f(\xi)| \leqslant C|\xi|$, para algum $C>0$. Portanto

$$\int_\Omega \mathcal{F}(u_k^0(x))dx \leqslant \int_\Omega \int_0^{u_k^0(x)} f(s)dsdx \leqslant C \int_\Omega \int_0^{u_k^0(x)} |s|_{\mathbb{R}} dsdx. \tag{3.35}$$

Como

$$\int_0^{u_k^0(x)} |s|_{\mathbb{R}} ds = \max\left\{\frac{u_k^0(x)^2}{2}, \frac{-u_k^0(x)^2}{2}\right\} \leqslant \frac{|u_k^0(x)|_{\mathbb{R}}^2}{2},$$

estima-se novamente (3.35) utilizando a desigualdade de Poincaré como segue

$$\int_\Omega \mathcal{F}(u_k^0(x))dx \leqslant \int_\Omega \int_0^{u_k^0(x)} f(s)dsdx \leqslant \frac{C}{2}\int_\Omega |u_k^0(x)|_{\mathbb{R}}^2 dx \leqslant \frac{C}{2}|u_k^0|_V^2 \leqslant \overline{C}, \tag{3.36}$$

onde $\overline{C}$ é uma constante que não depende de k, m. Das convergências (3.32)-(3.34) e a desigualdade em (3.36), obtém-se

$$\begin{aligned} E(0) &= |u_k'(0)|^2 + |\theta_m(0)|^2 + \alpha(0)|\nabla u_{km}(0)|^2 + 2\int_\Omega \mathcal{F}(u_{km}(0))dx \\ &= |u_m^1(0)|^2 + |\theta_{0m}|^2 + \alpha(0)|\nabla u_k^0|^2 + 2\int_\Omega \mathcal{F}(u_k^0(x))dx \leqslant \overline{C}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Logo de (3.31) e (3.37), segue

$$E(t) + 2\int_0^t \alpha_0 g_0 |u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2\beta_0 \int_0^t |\nabla\theta_m(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha_0}\int_0^t |\alpha'(s)|_{\mathbb{R}} E(s) + \overline{C}. \tag{3.38}$$

Aplicando o Lema de Gronwall a desigualdade (3.38) e lembrando que $\alpha' \in L^1(\mathbb{R}^+)$, por $(3.1)_{(1)}$, segue que

$$E(t) + 2\int_0^t \alpha_0 g_0 |u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2\beta_0 \int_0^t |\nabla\theta_m(t)|^2 \leqslant \overline{C} e^{(1/\alpha_0)\int_0^t |\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} ds} \leqslant \overline{\overline{C}},$$

onde observa-se que $\overline{C}$ é uma constante que não depende de k, m e T.

Estimativa II. Como φ é continuamente diferenciável as funções $h_{jm}(t)$ e $p_{jm}(t)$, para $j = 1, 2, 3, \ldots, m$, são de classe $C^2([0,T])$ e $C^1([0,T])$ respectivamente, de modo que derivando $(3.17)_1$ e $(3.17)_2$ em relação a t e observando que α é derivável obtém-se

$$\left|\begin{aligned} &(u_m'''(t),\xi) + \alpha'(t)\big((\nabla u_m(t),\nabla\xi) + (g(u_m'(t)),\xi)\big)_{\Gamma_1} + \alpha(t)(\nabla u_m'(t),\nabla\xi), \\ &+\alpha(t)\big(g'(u_m'(t))u_m''(t),\xi\big)_{\Gamma_1} + (f'(u_m(t))u_m'(t),\lambda) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m'(t),\xi) = 0, \\ &\\ &(\theta_m''(t),\lambda) + \beta'\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)\Big(\int_\Omega \theta_m'(t)\Big)(\nabla\theta_m(t),\nabla\lambda) + \beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)(\nabla\theta_m'(t),\nabla\lambda) \\ &+((\mathbf{a}\cdot\nabla)u_m''(t),\lambda) = 0. \end{aligned}\right. \tag{3.39}$$

Tomando $\xi = 2u''_m(t)$ e $\lambda = 2\theta'_m(t)$, resulta

$$\left|\begin{array}{l} 2(u'''_m(t), u''_m(t)) + 2\alpha'(t)\big((\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + (g(u'_m(t)), u''_m(t))_{\Gamma_1}\big) + \\ +2\alpha(t)(\nabla u'_m(t), \nabla u''_m(t)) + 2\alpha(t)\big(g'(u'_m(t))u''_m(t), u''_m(t)\big)_{\Gamma_1} + \\ 2(f'(u_m(t))u'_m(t), u''_m(t)) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t), u''_m(t)) = 0, \\ \\ 2(\theta''_m(t), \theta'_m(t)) + 2\beta'\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)\Big(\int_\Omega \theta'_m(t)\Big)(\nabla\theta_m(t), \nabla\theta'_m(t)) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u''_m(t), \theta'_m(t)) \\ +2\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)(\nabla\theta'_m(t), \nabla\theta'_m(t)) = 0. \end{array}\right. \tag{3.40}$$

Além disto, novamente utilizando que $\omega_j \in H^1_0(\Omega)$, para todo j=1,2,...,m, tem-se pelo Lema de Gauss

$$\int_\Omega \frac{\partial\theta'_m}{\partial x_i}(t)u''_m(t)dx = -\int_\Omega \theta'_m(t)\frac{\partial u''_m}{\partial x_i}(t)dx,$$

para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Como

$$\begin{aligned} 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t), u''_m(t)) = 2\int_\Omega (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t)u''_m(t)dx &= 2\sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \frac{\partial\theta'_m}{\partial x_i}(t)u''_m(t)dx \\ &= -2\sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \frac{\partial u''_m}{\partial x_i}(t)\theta'_m(t)dx \\ &= -2\int_\Omega (\mathbf{a}\cdot\nabla)u''_m(t)\theta'_m(t)dx \\ &= -2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u''_m(t), \theta'(t)), \end{aligned}$$

então

$$2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t), u''_m(t)) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u''_m(t), \theta'(t)) = 0. \tag{3.41}$$

Pelo Lema 2.48 e a regra do produto, segue que

$$\begin{aligned} &2(u'''_m(t), u''_m(t)) = \frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2, \\ &2(\theta''_m(t), \theta'_m(t)) = \frac{d}{dt}|\theta'_m(t)|^2, \\ &\alpha'(t)|\nabla u'_m(t)|^2 + 2\alpha(t)(\nabla u'_m(t), \nabla u''_m(t)) = \frac{d}{dt}\Big\{\alpha(t)|\nabla u'_m(t)|^2\Big\}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Somando as equações $(3.40)_1$ e $(3.40)_2$, e utilizando $(3.42)_{1,2,3}$,obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_1(t) &+ 2\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)|\nabla\theta'_m(t)|^2 + \alpha(t)(g(u'_m(t)), u''_m(t))_{\Gamma_1} = \\ &- 2\alpha'(t)\big((\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + (g(u'_m(t)), u''_m(t))_{\Gamma_1}\big) \\ &+ \alpha'(t)|\nabla u'_m(t)|^2 - 2(f'(u_m(t))u'_m(t), u''_m(t)) \\ &- 2\beta'\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)\Big(\int_\Omega \theta'_m(t)\Big)(\nabla\theta_m(t), \nabla\theta'_m(t)), \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde

$$E_1(t) = |u''_m(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla u'_m(t)|^2 + |\theta'_m(t)|^2.$$

Por $(3.1)_{(1),(2),(4)}$ seguem as desigualdades abaixo

$$2\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)dx\Big)|\nabla\theta'_m(t)| \;\geqslant\; 2\beta_0|\nabla\theta'_m(t)|^2, \tag{3.44}$$

$$2\alpha(t)(g'(u'_m(t))u''_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} \;\geqslant\; 2\alpha_0 g_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1}. \tag{3.45}$$

Daí, utilizando as estimativas (3.44) e (3.45) em (3.43), resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_1(t) &+ 2\beta_0|\nabla\theta'_m(t)|^2 + 2\alpha_0 g_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant \\ &- 2\alpha'(t)\big((\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + (g(u'_m(t)), u''_m(t))_{\Gamma_1}\big) \\ &+ \alpha'(t)|\nabla u'_m(t)|^2 - 2(f'(u_m(t))u'_m(t), u''_m(t)) \\ &- 2\beta'\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)\Big(\int_\Omega \theta'_m(t)\Big)(\nabla\theta_m(t), \nabla\theta'_m(t)).\end{aligned} \tag{3.46}$$

f sendo lipschitiziana, ela é derivável e vale $|f'(\xi)|_{\mathbb{R}} \leqslant C$ q.t.p em $\mathbb{R}$. Utilizando $(3.1)_{(1)}$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e que $1 \leqslant \dfrac{\alpha(t)}{\alpha_0}$, tem-se

$$\begin{aligned}2\alpha'(t)|\nabla u'_m(t)|^2 &- 2(f'(u_m(t))u'_m(t), u''_m(t)) \leqslant C_T\alpha(t)|\nabla u'_m(t)|^2 + 2|f'(u_m(t))||u'_m(t)| \\ &\leqslant C_T\alpha(t)|\nabla u'_m(t)|^2 + |f'(u_m(t))|^2 + |u'_m(t)|^2 \leqslant C^2 + C_T E_1(t),\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde C_T daqui em diante denotará constantes que dependem de $T > 0$.

Utilizando que $|\beta'(\xi)| \leqslant C$, tem-se

$$\begin{aligned}2\beta'\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)\Big(\int_\Omega \theta'_m(t)\Big)(\nabla\theta_m(t), \nabla\theta'_m(t)) &\leqslant 2C_T|\theta'_m(t)|_{L^1(\Omega)}|\nabla\theta_m(t)||\nabla\theta'_m(t)| \\ &\leqslant \frac{2C_T}{\sqrt{\beta_0}}\sqrt{\beta_0}|\theta'_m(t)||\nabla\theta_m(t)||\nabla\theta'_m(t)| \\ &\leqslant \frac{C_T^2}{\beta_0}|\nabla\theta_m(t)|^2E_1(t) + \beta_0|\nabla\theta'_m(t)|^2.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Portanto, obtém-se de (3.47), (3.48) e (3.46) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_1(t) &+2 \;\; \beta_0|\nabla\theta'_m(t)|^2 + 2\alpha_0 g_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant \\ &- 2\alpha'(t)\big((\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + (g(u'_m(t)), u''_m(t))_{\Gamma_1}\big) \\ &+ C + C_T E_1 + C_T|\nabla\theta_m(t)|^2E_1(t).\end{aligned} \tag{3.49}$$

Tomando $\xi = \dfrac{-\alpha(t)'}{\alpha(t)} u''_m(t)$ em $(3.17)_1$, obtém-se

$$\begin{aligned}
- \quad & 2\alpha'(t)\Big[(\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) + (g(u'_m(t), u''_m(t)))_{\Gamma_1}\Big] = 2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}|u''_m(t)|^2 + \\
& 2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}(f(u_m(t)), u''_m(t)) + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t), u''_m(t)).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Por $(3.1)_{(1),\,(3)}$ $\alpha'(t) \leqslant C_T$ e $|f(\xi)|_{\mathbb{R}} \leqslant C|\xi|_{\mathbb{R}}$. Logo, pelas desigualdade de Cauchy-Schwarz, Young, e a estimativa I, estima-se o termo à esquerda da igualdade em (3.50) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& 2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}|u''_m(t)|^2 + 2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}(f(u_m(t)), u''_m(t)) + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t), u''_m(t)) \leqslant \\
& C_T|u_m(t)|^2 + C_T|\nabla\theta_m(t)|^2 + C_T|u''_m(t)|^2 \leqslant C_T + C_T|\nabla\theta_m(t)|^2 + C_T E_1(t).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Utilizando (3.50) e (3.51) em (3.49), segue que

$$\frac{d}{dt}E_1(t) + \beta_0|\nabla\theta'_m(t)|^2 + 2\alpha_0 g_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant C_T + C_T|\nabla\theta(t)|^2 E_1(t) + C_T E_1(t). \tag{3.52}$$

Por outro lado tomando $t = 0$ e $\xi = u''_m(0)$ em $(3.17)_1$

$$\begin{aligned}
& (u''_m(0), u''_m(0)) + \alpha(0)(\nabla u_m(0), \nabla u''_m(0)) + (g(u'_m(0)), u''_m(0))_{\Gamma_1} \\
& + (f(u_m(0)), u''_m(0)) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(0), u''_m(0)) = 0.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Utilizando que a base de $H_\Delta \cap V$ tem a regularidade suficiente para o uso da identidade de Green resulta que

$$\begin{aligned}
& (u''_m(0), u''_m(0)) - \alpha(0)(\Delta u_m(0), u''_m(0)) + \\
& (f(u_m(0)), u''_m(0)) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(0), u''_m(0)) = 0.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Como $|f(\xi)| \leqslant C|\xi|_{\mathbb{R}}$, tem-se pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|u''_m(0)|^2 \leqslant \alpha(0)|\Delta u_m(0)||u''_m(0)| + C|u''_m(0)| + C|\theta_m(0)||u''_m(0)| \leqslant \overline{C}|\theta_m(0)|^2 + \frac{1}{6}|u''_m(0)|^2.$$

Fazendo uso das convergências obtidas de (3.32) à (3.34) na desigualdade anterior, obtemos

$$|u''_m(0)| \leqslant C, \tag{3.55}$$

onde C é uma constante que não depende de m e k. Analogamente fazendo $t = 0$ e $\lambda = \theta'(0)$ em $(3.17)_2$, obtém-se

$$(\theta'_m(0), \theta'_m(0)) + \beta\Big(\int_\Omega \theta_m(0)\Big)(\nabla\theta_m(0), \nabla\theta'_m(0)) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(0), \theta'_m(0)) = 0. \tag{3.56}$$

Como a base espectral em $H_0^1(\Omega)$ possui regularidade suficiente para uso da identidade de Green, tem-se

$$\begin{aligned}|\theta_m'(0)|^2 &= -\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(0)\Big)(\nabla\theta_m(0),\nabla\theta_m'(0)) - ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u_{km}'(0),\theta_m'(0))\\ &\leqslant \Big|\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(0)\Big)\Big||(\Delta\theta_m(0),\theta_m'(0))| + |((\mathbf{a}\cdot\nabla)u_m^1(0),\theta_m'(0))|.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Visto que Ω é limitado, $L^2(\Omega)\hookrightarrow L^1(\Omega)$, logo

$$|\theta_m(0)|_1 \leqslant C_\Omega|\theta_m(0)|_2.$$

Da continuidade de β e (3.37), estima-se (3.57) como segue

$$|\theta_m'(0)|^2 \leqslant C_\Omega|(\Delta\theta_m(0),\theta_m'(0))| + |((\mathbf{a}\cdot\nabla)u_m^1(0),\theta_m'(0))|. \tag{3.58}$$

Sabe-se que $(\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é a base espectral e valem as convergências em (3.32) e (3.34). Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade de Young, tem-se

$$|\theta_m'(0)|^2 \leqslant C + \frac{|\theta_m'(0)|^2}{2}, \tag{3.59}$$

onde C é uma constante que não depende de m e k. Subtraindo em ambos os lados da desigualdade $\dfrac{|\theta_m'(0)|^2}{2}$, obtém-se

$$|\theta_m'(0)|^2 \leqslant 2C. \tag{3.60}$$

Integrando (3.52) de 0 a t, e usando o Lema de Gronwall existe uma constante C(T) que depende de T tal que

$$E_1(t) + 2\alpha_0 g_0\int_0^t |u''(s)|_{\Gamma_1}^2 ds + \beta_0\int_0^t |\nabla\theta_m'(s)|^2 ds \leqslant C(T),$$

onde $0 < T$ pode ser fixado arbitráriamente.

3.1.4 Passagem ao Limite

Nesta seção, toma-se o limite quando m e k vão para o infinito na equações aproximadas do problema. Encontrou-se na seção enterior as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}&E(t) + 2\alpha_0 g_0\int_0^t |u_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + 2\beta_0\int_0^t |\nabla\theta_m(t)|^2 \leqslant C,\\ &E(t) = |u_m'(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla u_m(t)|^2 + 2\int_\Omega \mathcal{F}(u_m(t))dx,\\ &E_1(t) + 2\alpha_0 g_0\int_0^t |u''(s)|_{\Gamma_1}^2 ds + \beta_0\int_0^t |\nabla\theta_m'(s)|^2 ds \leqslant C_T,\ \forall t\in(0,T),\\ &E_1(t) = |u_m''(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla u_m'(t)|^2 + |\theta_m'(t)|^2.\end{aligned} \tag{3.61}$$

De (3.61), seguem as implicações

$$\begin{aligned}
&\alpha(t)|\nabla u_m(t)|^2 \leqslant C \Longrightarrow (u_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V),\\
&\alpha(t)|\nabla u'_m(t)|^2 \leqslant C_T \Longrightarrow (u'_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V),\\
&|u''_m(t)|^2 \leqslant C_T \Longrightarrow (u''_{km}) \text{ é limitado em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)),\\
&\int_0^t |\nabla\theta_m(t)|^2 ds + \int_0^t |\nabla\theta'_m(s)|^2 ds \leqslant C + C_T \Longrightarrow)\theta_m)\text{é limitado em } H^1_{loc}(0,\infty;H^1_0(\Omega)),\\
&\int_0^t |u'_m(t)|^2_{\Gamma_1} ds + \int_0^t |u''_m(t)|^2_{\Gamma_1} ds \Longrightarrow (u'_{km}) \text{ é limitado em } H^1_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Verificar-se-à a existência de uma função u_k de modo que pode-se extrair subsequências satisfazendo

$$\begin{aligned}
&u_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} u_k \ \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V),\\
&u'_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_k \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V),\\
&u''_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} u''_k \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)),\\
&u'_{km} \rightharpoonup u'_k \text{ em } H^1_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

De fato, fixado k arbitrariamente, para o tempo variando no intervalo $[0,1]$ considere a função $u_k^{(1)}:\Omega\times]0,1[\to\mathbb{R}$, $\Phi_k^{(1)}:\Omega\times]0,1[\to\mathbb{R}$, $\chi_k^{(1)}:\Omega\times]0,1[\to\mathbb{R}$ e $\Upsilon_k^{(1)}:\Omega\times]0,1[\to\mathbb{R}$ para o qual existe pelo Teorema de *Banach-Alaoglu-Bourbaki* (Teorema 2.9) uma subsequência no índice m tal que

$$\begin{aligned}
&(u_{km}^{(1)}) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)}) \ \text{ em } L^\infty(0,1;V),\\
&(u_{km}^{(1)})' \overset{*}{\rightharpoonup} \Phi_k^{(1)} \text{ em } L^\infty(0,1;V),\\
&(u_{km}^{(1)})'' \overset{*}{\rightharpoonup} \chi_k^{(1)} \text{ em } L^\infty(0,1;L^2(\Omega)),\\
&(u_{km}^{(1)})' \rightharpoonup \Upsilon_k^{(1)} \text{ em } H^1(0,1;L^2(\Gamma_1)),
\end{aligned} \tag{3.64}$$

sendo esta última apenas convergência fraca, devido a reflexibilidade de $H^1(0,1;L^2(\Gamma_1))$.

Já que $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, então

$$(L^2(\Omega))' \hookrightarrow V'.$$

Assim,

$$L^2(0,1;(L^2(\Omega))') \hookrightarrow L^2(0,1;V').$$

Como $L^2(0,1) \hookrightarrow L^1(0,1)$, tem-se

$$L^\infty(0,1;V) = \Big(L^1(0,1;V')\Big)' \hookrightarrow \Big(L^2\left(0,1;(L^2(\Omega))'\right)\Big)'.$$

Portanto, segue de $(3.64)_1$ que

$$(u_{km}^{(1)}) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)}) \text{ em } \Big(L^2\left(0,1;(L^2(\Omega))'\right)\Big)'.$$

Isto quer dizer que

$$\int_0^1\int_\Omega u_{km}^{(1)}(x,t)\varphi(x,t)dxdt \to \int_0^1\int_\Omega u_k^{(1)}(x,t)\varphi(x,t)dxdt, \quad \forall\varphi\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

em particular para $\varphi = -\dfrac{\partial\xi}{\partial t}$, onde $\xi\in D(\Omega\times]0,1[)$, tem-se

$$(u_{km}^{(1)})' \to (u_k^{(1)})' \text{ em } D'(\Omega\times]0,1[),$$

tendo em vista que neste caso, a derivada no sentido clássico (Dini), coincide com a derivada no sentido distribucional acima. Analogamente para $((u_{km}^{(1)})')_m$ tomando $\varphi = \xi\in D(\Omega\times]0,1[)$ obtém-se

$$(u_{km}^{(1)})' \to \Phi_k^{(1)} \text{ em } D'(\Omega\times]0,1[),$$

isto é, $\Phi_k^{(1)} = (u_k^{(1)})'$. Da mesma forma

$$\begin{aligned} &(u_{km}^{(1)}) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)}) \text{ em } L^\infty(0,1;V),\\ &(u_{km}^{(1)})' \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)})' \text{ em } L^\infty(0,1;V),\\ &(u_{km}^{(1)})'' \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)})'' \text{ em } L^\infty(0,1;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Por fim, como $H^1(0,1)\hookrightarrow L^2(0,1)$, segue que

$$H^1(0,1;L^2(\Gamma_1))\hookrightarrow L^2(0,1;L^2(\Gamma_1)),$$

de forma análoga ao que foi feito anteriormente, $(u_{km}^{(1)})' \to \Upsilon_k^{(1)}$ em $D'(\Gamma_1\times]0,1[)$. Por $(3.65)_2$, tem-se pelo teorema do traço que

$$(u_{km}^{(1)})' \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)})' \text{ em } L^\infty(0,1;L^2(\Gamma_1)),$$

o que implica $(u_{km}^{(1)})' \rightharpoonup (u_k^{(1)})'$ em $D'(\Gamma_1\times]0,1[)$. Pela unicidade do limite $\Upsilon_k^{(1)} = (u_k^{(1)})'$. Em suma

$$\begin{aligned} &(u_{km}^{(1)}) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)}) \text{ em } L^\infty(0,1;V),\\ &(u_{km}^{(1)})' \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)})' \text{ em } L^\infty(0,1;V),\\ &(u_{km}^{(1)})'' \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)})'' \text{ em } L^\infty(0,1;L^2(\Omega))\\ &(u_{km}^{(1)})' \rightharpoonup (u_k^{(1)})' \text{ em } H^1(0,1;L^2(\Gamma_1)). \end{aligned} \tag{3.66}$$

Assim, indutivamente no intervalo $[0, l]$, para todo $l \geqslant 2$ existe uma subsequência $u_{km}^{(l)}$ de $u_{km}^{(l-1)}$ e uma função $u_k^{(l)} : \Omega \times]0, l[\to \mathbb{R}$, onde $u_k^{(l)} = u_k^{(l-1)}$ em $\Omega \times]0, l-1[$, pois neste intervalo estas funções são soluções de um mesmo problema de valor inicial, de modo que $u_k^{(l)}$ converge como em (3.68) em $\Omega \times]0, l[$.

Define-se agora $u_k : \Omega \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$, onde $u_k(x) = u_k^l(x)$, $x \in \Omega \times]0, l[$ para algum $l > 0$. Da forma com que u_k^l foi definido u_k está bem definida, agora será mostrado que $u_{km}^{(m)} \overset{*}{\rightharpoonup} u_k$ em $L^\infty_{loc}(0, \infty; V)$, para as outras convergências basta seguir um raciocínio análogo. Para mostrar que $u_{km}^{(m)} \overset{*}{\rightharpoonup} u_k$ em $L^\infty_{loc}(0, \infty; V)$, deve-se mostrar que para todo $K \subset (0, \infty)$ compacto

$$u_{km}^{(m)} \overset{*}{\rightharpoonup} u_k \text{ em } L^\infty(K; V),$$

de fato, existe um natural L para o qual $K \subset (0, L)$, nosso problema agora resume-se em mostrar que a convergência de u_k ocorre em $(0, L)$. Pela construção de cada $u_{km}^{(l)}$, tem-se

$$u_{km}^{(L)} \overset{*}{\rightharpoonup} u_k^{(L)} \text{ em } L^\infty(0, L; V),$$

isto quer dizer que

$$u_{km}^{(L)}(\omega) \to u_k^{(L)}(\omega) \text{ para todo } \omega \in L^1(0, L; V'),$$

isto é,

$$|u_{km}^{(L)}(\omega) - u_k^{(L)}(\omega)| \to 0 \text{ em } L^1(0, L; V').$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\omega \in L^1(0, L; V)$

$$|u_{km}^{(L)}(\omega) - u_k^{(L)}(\omega)| \leqslant \epsilon \text{ sempre que } m \geqslant n_0. \tag{3.67}$$

Como $u_k = u_k^{(L)}$ em $\Omega \times]0, L[$, observando que se $m \geqslant n_1 = \max\{L, n_0\}$,

$$u_{km}^{(m)} = u_{km}^{(L)} \text{ em } \Omega \times]0, L[.$$

(3.67) implica que para todo $\omega \in L^1(0, L; V)$

$$|u_{km}^{(m)}(\omega) - u_k(\omega)| \leqslant \epsilon \text{ sempre que } m \geqslant n_1.$$

Logo, como queria-se demonstrar

$$u_{km}^{(m)} \overset{*}{\rightharpoonup} u_k \text{ em } L^\infty(0, L; V).$$

Procedendo de forma análoga para as derivadas obtém-se

$$\begin{aligned}
&(u_{km}^{(1)}) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)}) \ \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V),\\
&(u_{km}^{(1)})' \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)})' \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V),\\
&(u_{km}^{(1)})'' \overset{*}{\rightharpoonup} (u_k^{(1)})'' \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)),\\
&(u_{km}^{(1)})' \rightharpoonup (u_k^{(1)})' \text{ em } H^1_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)).
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Já que as constantes que limitam as Estimativas I e II não dependem de m e k, u_k é limitada em cada um dos espaços em (3.68), portanto, o mesmo processo que foi feito anteriormente, agora para o índice k, garante a existência de funções u e θ em cada um dos respectivos espaços tais que

$$\begin{aligned}
&u_{km} \rightharpoonup u \text{ em } L^2_{loc}(0,\infty;V),\\
&u'_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;V),\\
&u''_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)),\\
&\theta_m \rightharpoonup \theta \ \text{ em } H^1_{loc}(0,\infty;H^1_0(\Omega)),\\
&u'_{km} \rightharpoonup u' \text{ em } H^1_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)),
\end{aligned} \tag{3.69}$$

onde usa-se a imersão de L^2 em L^1 para garantir a convergência apenas fraca em $L^2_{loc}(0,\infty;V)$ de forma análoga a de $L^\infty_{loc}(0,\infty;V)$, a conta é a mesma, porém, ja fica registrado a veracidade da convergência fraca estrela em $L^\infty_{loc}(0,\infty;V)$ de u_{km}. As convergências acima são suficientes para a passagem ao limite nos termos lineares do sistema.

Multiplicando as equações aproximadas por $\psi \in D(0,\infty)$ e integrando, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (u''_{km}(t),\xi)\psi(t)dt + \int_0^\infty (\nabla u_{km}(t),\nabla\xi)\alpha\psi(t)dt + \int_0^\infty (g(\ .\ ,u'_{km}),\xi))_{\Gamma_1}\alpha\psi(t)dt\\
&\int_0^\infty (f(u_{km}(t)),\xi)\psi(t)dt + \int_0^\infty ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t),\xi)\psi(t)dt = 0, \quad \forall\xi\in V_m^k,\\
&\int_0^\infty (\theta'_m(t),\lambda)\psi(t)dt + \int_0^\infty \beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)(\nabla\theta_m(t),\nabla\lambda)\psi(t)dt +\\
&\int_0^\infty ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t),\lambda)\psi(t)dt = 0, \quad \forall\lambda\in W_m.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Limite do termo $\displaystyle\int_0^\infty (u''_{km}(t),\xi)\psi(t)dt$:

De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $T > 0$ obtém-se de $(3.69)_3$

$$\int_0^T (u''_{km}(t), \tau(t))_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)'} dt \to \int_0^T (u''_k(t), \tau(t))_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)'} dt, \quad \forall \tau \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.71}$$

Visto que $\psi \in D(0,T)$ para algum $T > 0$. Como $V^k_{m-1} \subset V^k_m \subset L^2(\Omega)$, (3.71) é valida para $\xi \in V^k_j$ com $j \geqslant m$. Fazendo $\tau = \xi\psi$ tem-se

$$\int_0^\infty (u''_{km}(t), \xi)\psi dt \to \int_0^\infty (u''_k(t), \xi)\psi dt, \quad \forall \xi \in V^k_j, j \geqslant m. \tag{3.72}$$

Analogamente por $(3.69)_4$ obtém-se

$$\int_0^\infty (\theta'_m(t), \lambda)\psi dt \to \int_0^\infty (\theta'(t), \lambda)\psi dt, \quad \forall \lambda \in W_j, j \geqslant m. \tag{3.73}$$

Limite do termo $\displaystyle\int_0^\infty ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t), \lambda)\psi(t)dt :$

De $(3.61)_3$ a sequência $((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Então pelo Corolário 2.8 existe uma subsequência denotada por $((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t))_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi^{(k)} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

esta convergência significa

$$\langle (\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}, \nu \rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\times L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to \langle \chi^{(k)}, \nu \rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\times L^1(0,T;L^2(\Omega))},$$

isto é

$$\int_0^T \langle (\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t), \nu(t) \rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} dt \to \int_0^T \langle \chi^{(k)}(t), \nu(t) \rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} dt.$$

Assim, pelo teorema da Representação de Riesz, tem-se

$$\int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t), \nu(t)) dt \to \int_0^T (\chi^{(k)}(t), \nu(t)) dt, \tag{3.74}$$

para todo $\nu \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. A seguir, mostra-se que $\chi^{(k)} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)u_k$. De fato, de (3.61) as sequências $(u'_{km})_{m\in\mathbb{N}}$, $(u''_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $L^2(0,T;V)$ e $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente. Então lembrando que $V \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, tem-se pelo Teorema de Aubin-Lions existe uma subsequência $(u'_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u'_{km} \to u'_k \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.75}$$

Dado $\nu \in L^2(Q)$ define-se uma distribuição T_ν dada por

$$\langle T_\nu, \phi \rangle = \int_Q \nu(x,t)\phi(x,t)dxdt, \quad \text{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(Q),$$

e sendo $\mathcal{D}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ de (3.75) tem-se

$$\langle T_{u'_{km}}, \phi \rangle = \int_Q u'_{km}\phi dxdt \to \int_Q u'_k \phi dxdt = \langle T_{u'_k}, \phi \rangle \quad \text{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(Q),$$

portanto, $T_{u_{km}} \to T_{u_k}$ e pela continuidade da derivação em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta

$$T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}} \to T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_k} \text{ em } \mathcal{D}'(Q).$$

Assim de (3.74) e pela unicidade do limite tem-se $T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_k} = T_{\chi^{(k)}}$. Então, pelo teorema de Du Bois Raymond $\chi^{(k)} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_k$ em quase todo ponto de Q. Portanto

$$\int_0^T (\,(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t), \xi\,)\psi(t)dt \to \int_0^T (\,(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_k(t), \xi\,)\psi(t)dt, \quad \forall \xi \in L^2(\Omega) \tag{3.76}$$

E assim,

$$\int_0^\infty (\,(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t), \xi\,)\psi(t)dt \to \int_0^\infty (\,(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_k(t), \xi\,)\psi(t)dt, \quad \forall \xi \in L^2(\Omega). \tag{3.77}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (\,(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t), \lambda\,)\psi(t)dt \to \int_0^\infty (\,(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), \lambda\,)\psi(t)dt, \quad \forall \lambda \in L^2(\Omega), \\ &\int_0^\infty (\,\nabla u_{km}(t), \nabla\lambda\,)\psi(t)dt \to \int_0^\infty (\,\nabla u_k, \nabla\lambda\,)\psi(t)dt, \quad \forall \lambda \in V_j^k, j \geqslant m. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Observe $(3.78)_2$ é suficiente para

$$\int_0^\infty \alpha(t)(\,\nabla u_{km}(t), \nabla\lambda\,)\psi(t)dt \to \int_0^\infty \alpha(t)(\,\nabla u_k, \nabla\lambda\,)\psi(t)dt, \quad \forall \lambda \in V_j^k, j \geqslant m, \tag{3.79}$$

tendo em vista que $\alpha(t) \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^+)$ e a desigualdade de Cauchy-Swchartz

Limite do termo $\displaystyle\int_0^\infty (f(u_{km}(t)), \xi)\psi(t)dt$ **:**

Por (3.62), utilizando novamente o teorema de Aubin-Lions

$$u_{km} \to u_k \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.80}$$

$$\theta_m \to \theta \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.81}$$

$$u'_{km} \to u'_k \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{3.82}$$

Isto é equivalente à

$$\begin{aligned} u_{km} &\to u_k \text{ forte em } L^2(Q), \\ \theta_m &\to \theta \text{ forte em } L^2(Q), \\ u'_{km} &\to u'_k \text{ forte em } L^2(\Gamma_1 \times]0,T[). \end{aligned}$$

Portanto, pode-se extrair subsequências ainda denotadas segundo o índice m tais que

$$u_{km} \to u_k \text{ q.t.p em } Q, \tag{3.83}$$

$$\theta_m \to \theta \text{ q.t.p em } Q, \tag{3.84}$$

$$u'_{km} \to u'_k \text{ q.t.p em } \Gamma_1 \times]0,T[. \tag{3.85}$$

Utilizando a continuidade de f e (3.83) tem-se

$$f(u_{km}) \to f(u_k) \text{ em } Q. \tag{3.86}$$

A convergência de (3.80) implica que (u_{km}) é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, como f é contínua, obtém-se também que $(f(u_{km}))$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ portanto pelo lema de Lions

$$f(u_{km}) \rightharpoonup f(u_k) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou ainda,

$$\int_0^T (f(u_{km}(t)), \phi(t))dt \to \int_0^T (f(u_k(t)), \phi(t))dt \ \ \forall \phi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.87}$$

Esta ultima convergência implica que

$$\int_0^\infty (f(u_{km}(t)), \xi)\psi(t)dt \to \int_0^\infty (f(u_k(t)), \xi)\psi(t)dt \ \ \forall \xi \in L^2(\Omega). \tag{3.88}$$

Limite do termo $\int_0^\infty \beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)(\nabla\theta_m(t), \nabla\lambda)\psi(t)dt$:

Recordando que a base tomada em $H_0^1(\Omega)$ é a base espectral para o operador laplaciano, $\theta_m(t) \in H^2 \cap H_0^1$ pode-se tomar $\lambda = -\Delta\theta(t)$ em $(3.17)_2$. Fazendo isto, obtém-se

$$-(\theta'_m(t), \Delta\theta_m(t)) - 2\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)(\nabla\theta_m(t), \nabla(\Delta\theta_m(t))) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t), \Delta\theta_m(t)) = 0. \tag{3.89}$$

Pelo teorema de Gauss

$$(\nabla\theta'_m(t),\nabla\theta_m(t))+\beta\Big(\int_\Omega\theta_m(t)\Big)(\Delta\theta_m(t),\Delta\theta_m(t)))+((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t),\Delta\theta_m(t))=0. \tag{3.90}$$

Observando que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\theta_m(t)|^2 &= (\nabla\theta'_m(t),\nabla\theta_m(t))\\ \beta_0 &\leqslant \beta(t),\end{aligned}$$

tem-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\theta_m(t)|^2+\beta_0|\Delta\theta_m(t)|^2+((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_{km}(t),\Delta\theta_m(t))\leqslant 0.$$

Multiplicando por 2 e utilizando a desigualdade de Cauchy-Swhartz seguida da Desigualdade de Young obtém-se

$$\frac{d}{dt}|\nabla\theta_m(t)|^2+2\beta_0|\Delta\theta_m(t)|^2\leqslant C|\nabla u'_{km}(t)|^2+\beta_0|\Delta\theta_m(t)|^2. \tag{3.91}$$

Integrando (3.91) de 0 a T e fazendo uso da estimativa I tem-se

$$|\nabla\theta_m(t)|^2+\int_0^T|\Delta\theta_m(t)|^2dt\leqslant C. \tag{3.92}$$

Agora, observe que pela desigualdade de Cauchy-Swchartz

$$|(\nabla\theta_m(t),\nabla\lambda)|_{\mathbb{R}}\leqslant\frac{1}{2}|\nabla\theta_m(t)|^2+\frac{1}{2}|\nabla\lambda|^2\leqslant C, \tag{3.93}$$

para todo $\lambda\in W_m$. Como $L^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ então $\left|\int_\Omega\theta_m(t)\right|_{\mathbb{R}}\leqslant C|\theta_m(t)|\leqslant C$, pela continuidade de β e $(3.83)_2$, obtém-se pelo teorema da convergência dominada que

$$\left|\beta\Big(\int_\Omega\theta_m(t)\Big)-\beta\Big(\int_\Omega\theta(t)\Big)\right|_{\mathbb{R}}\to 0. \tag{3.94}$$

em virtude da desigualdade de Cauchy-Swchartz

$$\begin{aligned}\left|\beta(\int_\Omega\theta(t))\right|_{\mathbb{R}} &\leqslant C, &(3.95)\\ |([\nabla\theta_m(t)-\nabla\theta(t)],\nabla\lambda)|_{\mathbb{R}} &\leqslant C|\nabla\theta_m(t)-\nabla\theta(t)|. &(3.96)\end{aligned}$$

Por fim, observando a veracidade da igualdade abaixo

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big(\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)\nabla\theta_m(t) - \beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)\nabla\theta(t), \nabla\lambda\Big)dt \\ = \int_0^T \Big[\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big) - \beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)\Big](\nabla\theta_m(t), \nabla\lambda)dt \\ + \int_0^T \Big(\beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)[\nabla\theta_m(t) - \nabla\theta(t)], \nabla\lambda\Big)dt.\end{aligned} \tag{3.97}$$

Utiliza-se (3.93), (3.94), (3.95) e (3.96) em (3.97), obtém-se $\forall v \in W_j, j \geqslant m$ que

$$\Big|\int_0^T \Big(\beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)\nabla\theta_m(t) - \beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)\nabla\theta(t), \nabla\lambda\Big)dt\Big|_{\mathbb{R}} \to 0,$$

isto é,

$$\int_0^\infty \beta\Big(\int_\Omega \theta_m(t)\Big)\Big(\nabla\theta_m(t), \nabla\lambda\Big)\psi(t)dt \to \int_0^\infty \beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)\Big(\nabla\theta(t), \nabla\lambda\Big)\psi(t)dt, \tag{3.98}$$

para todo $\lambda \in W_j, j \geqslant m$.

Limite do termo $\displaystyle\int_0^\infty (g(\cdot, u'_{km}), \xi)_{\Gamma_1}\psi(t)dt$ **:**

Agora, pelo teorema do traço, a convergência em $(3.68)_2$ implica que

$$u'_{km} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_k \text{ em } L^\infty(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1)).$$

Logo,

$$u'_{km} \rightharpoonup u'_k \text{ em } L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1)).$$

Portanto, (u'_{km}) é limitada em $L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1))$. $(3.68)_5$ implica

$$u''_{km} \rightharpoonup u''_k \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Dai, também encontra-se que (u''_{km}) é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$. Como $H^{1/2}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ o teorema de Aubin-Lions implica que

$$u'_{km} \to u'_k \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Pela continuidade de g, obtém-se

$$g(\cdot, u'_{km}) \to g(\cdot, u'_k) \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Como a convergência forte implica a convergência fraca, tem-se

$$\int_0^T (g(\cdot, u'_{km}), \phi)_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (g(\cdot, u_k), \phi)_{\Gamma_1} dt, \quad \forall \phi \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Em particular

$$\int_0^\infty (g(\cdot, u'_{km}), \xi)_{\Gamma_1} \psi(t) dt \to \int_0^\infty (g(\cdot, u_k), \xi)_{\Gamma_1} \psi(t) dt, \quad \forall \xi \in V_j^k, j \geqslant m. \tag{3.99}$$

Passando o limite em (3.70), utilizando (3.72), (3.73), $(3.78)_{1,2}$, (3.77), (3.79), (3.88), (3.98) e (3.99) obtém-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (u''_k(t), \xi)\psi(t)dt + \int_0^\infty (\nabla u_k(t), \nabla \xi)\alpha(t)\psi(t)dt + \int_0^\infty (g(\ .\ , u'_k), \xi))_{\Gamma_1} \alpha(t)\psi(t)dt \\
&\int_0^\infty (f(u_k(t)), \xi)\psi(t)dt + \int_0^\infty ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), \xi)\psi(t)dt = 0, \quad \forall \xi \in V_j^k, j \geqslant m, \\
&\int_0^\infty (\theta'(t), \lambda)\psi(t)dt + \int_0^\infty \beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)(\nabla\theta(t), \nabla\lambda)\psi(t)dt + \\
&\int_0^\infty ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_k(t), \lambda)\psi(t)dt = 0, \quad \forall \lambda \in W_j, j \geqslant m.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Já que $\{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$ e $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots\}$ é base Hilbertiana para $V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ respectivamente, tem-se a validade de (3.100) para todo $\xi \in V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $\lambda \in H_0^1(\Omega)$. Analogamente, tomando o limite em k obtém-se

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (u''(t), \xi)\psi(t)dt + \int_0^\infty (\nabla u(t), \nabla \xi)\alpha(t)\psi(t)dt + \int_0^\infty (g(\ .\ , u'), \xi))_{\Gamma_1} \alpha(t)\psi(t)dt \\
&\int_0^\infty (f(u(t)), \xi)\psi(t)dt + \int_0^\infty ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), \xi)\psi(t)dt = 0, \quad \forall \xi \in V \cap H_\Delta^2(\Omega), \\
&\int_0^\infty (\theta'(t), \lambda)\psi(t)dt + \int_0^\infty \beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)(\nabla\theta(t), \nabla\lambda)\psi(t)dt + \\
&\int_0^\infty ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'(t), \lambda)\psi(t)dt = 0, \quad \forall \lambda \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Tomando em particular $\xi \in D(\Omega) \subset V$ em $(3.101)_1$, segue que

$$u'' - \alpha\Delta u + f(u) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta = 0 \text{ em } L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)). \tag{3.102}$$

Já que f é contínua tem-se da igualdade acima que $\Delta(\alpha u) \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$ de $(3.69)_1$ tem-se $\alpha u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V)$. Como $V \subset H^1(\Omega)$ tem-se pelo Teorema 2.33 que

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^\infty_{loc}(0,\infty; H^{-1/2}(\Gamma_1)).$$

Ainda pelo Teorema 2.33, multiplicando (3.102) por $\xi\psi$ com $\xi \in V$ e $\psi \in D(0,\infty)$ e integrando de 0 a ∞, obtém-se

$$\int_0^\infty (u''_k(t),\xi)\psi(t) + \int_0^\infty (\nabla u_k(t), \nabla\xi)\alpha(t)\psi(t) - \int_0^\infty \left\langle \alpha\frac{\partial u}{\partial \nu}, \xi\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_1)} \psi(t) +$$

$$\int_0^\infty (f(u_k(t)),\xi)\psi(t) + \int_0^\infty ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t),\xi)\psi(t) = 0.$$

Por $(3.101)_1$, tem-se

$$\int_0^\infty \left\langle \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(\cdot,u')\right), \xi\right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{1/2}(\Gamma_1)} \psi(t)dt = 0, \quad \forall\psi \in D(0,T),$$

implicando que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(\cdot,u') = 0 \ \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty). \tag{3.103}$$

3.1.5 Verificação dos dados iniciais

Nesta seção, verifica-se as condições iniciais. Inicialmente mostra-se que

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Observe que faz sentido avaliar u nos extremos de cada intervalo (0,T) uma vez que $u \in L^\infty(0,T;V)$ e $u' \in L^\infty(0,T;V)$ implica que $u \in C([0,T],V)$

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \qquad \text{em } L^\infty(0,T;V),$$

$$u'_k \overset{*}{\rightharpoonup} u' \qquad \text{em } L^\infty(0,T;V),$$

resulta

$$\int_0^T (u_k(t),\overline{v}(t))dt \to \int_0^T (u(t),\overline{v}(t))dt;$$

$$\int_0^T (u'_k(t),\overline{v}(t))dt \to \int_0^T (u'(t),\overline{v}(t))dt,$$

vale para todo $\overline{v} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Em particular, se $\overline{v}(x,t) = v(x)\phi(t)$ com $\phi \in C^1([0,T])$, $\phi(T) = 0$ e $\phi(0) = 1$ então

$$\int_0^T (u_k(t),v)\phi'(t)dt \to \int_0^T (u(t),v)\phi'(t)dt,$$

$$\int_0^T (u_k'(t), v)\phi(t)dt \to \int_0^T (u'(t), v)\phi(t)dt,$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Somando as duas equações acima

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\{(u_k(t), v)\phi(t)\}dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\{(u(t), v)\phi(t)\}dt,$$

assim

$$(u_k(T), v)\phi(T) - (u_k(0), v)\phi(0) \to (u(T), v)\phi(T) - (u(0), v)\phi(0),$$

logo

$$(u_k(0), v) \to (u(0), v) \text{ para todo } v \in L^2(\Omega). \tag{3.104}$$

Como do sistema aproximado formulou-se que $u_{km}(0) = u_k^0$, obtém-se

$$u_k(0) = u_k^0 \to u_0 \text{ em } V \cap H_\Delta(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Desde que toda convergência forte implica a convergência fraca, tem-se

$$(u_k(0), v) \to (u_0, v) \text{ para todo } v \in L^2(\Omega). \tag{3.105}$$

Das convergências em (3.104) e (3.105) obtém-se

$$(u_0 - u(0), v) = 0 \text{ para todo } v \in L^2(\Omega),$$

portanto,

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ em } \Omega.$$

Analogamente obtém-se

$$\theta(x, 0) = \theta_0 \text{ em } \Omega.$$

Para finalizar, deve-se mostrar que

$$u'(x, 0) = u_1(x).$$

Seja $\varphi \in C^1([0, T])$ a função tal que $\varphi(T) = 0$ e $\varphi(0) = 1$. Assim como foi obtido (3.76) obtém-se

$$\int_0^T (u_k''(t), \xi)\varphi(t) + \int_0^T (\nabla u_k(t), \nabla\xi)\alpha\varphi(t) + \int_0^T (g(\,.\,, u_k'), \xi))_{\Gamma_1}\alpha\varphi(t) +$$
$$\int_0^T (f(u_k(t)), \xi)\psi(t) + \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), \xi)\varphi(t) = 0,$$

para todo $\xi \in V \cap H_\Delta(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Integrando por partes a primeira integral da equação precedente e usando a definição de φ encontra-se

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\{(u_k'(t), v)\}\varphi(t) = -(u_k'(0), v) - \int_0^T (u_k'(t), v)\varphi'(t).$$

Assim

$$\begin{aligned}(u_k'(0), v) - \int_0^T (u_k'(t), v)\varphi'(t) \quad &+ \quad \int_0^T (\nabla u_k(t), \nabla\xi)\alpha\varphi(t) + \int_0^T (g(\ .\ , u_k'), \xi))_{\Gamma_1}\alpha\varphi(t) + \\ \int_0^T (f(u_k(t)), \xi)\psi(t) \quad &+ \quad \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), \xi)\varphi(t) = 0,\end{aligned} \tag{3.106}$$

Por (3.33)

$$u_k'(0) \longrightarrow u_1 \ \text{ em } \ V.$$

Tomando o limite $k \to \infty$ em (3.106), tem-se

$$\begin{aligned}(u_1, v) - \int_0^T (u'(t), v)\varphi'(t) \quad &+ \quad \int_0^T (\nabla u(t), \nabla\xi)\alpha\varphi(t) + \int_0^T (g(\ .\ , u'), \xi))_{\Gamma_1}\alpha\varphi(t) + \\ \int_0^T (f(u(t)), \xi)\psi(t) \quad &+ \quad \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), \xi)\varphi(t) = 0,\end{aligned}$$

Novamente integrando por partes o primeiro termo integral, obtém-se

$$\begin{aligned}&(u_1, v) + (u'(0), v) + \int_0^T (u''(t), \xi)\varphi(t) + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla\xi)\alpha\varphi(t) + \\ &\int_0^T (g(\ .\ , u'), \xi))_{\Gamma_1}\alpha\varphi(t) + \int_0^T (f(u(t)), \xi)\psi(t) + \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), \xi)\varphi(t) = 0,\end{aligned}$$

como ja foi obtido

$$u'' - \alpha\Delta u + f(u) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta = 0 \ \text{ em } \ L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Portanto, a soma das parcelas que possuem integral resultam em zero, implicando

$$u'(x, 0) = u_1(x) \text{ em } \Omega.$$

logo, as condições iniciais do problema são satisfeitas.

3.1.6 Unicidade das Soluções Fortes

Esta sessão dedica-se a mostrar que são únicas as soluções do problema (3.2), o método utilizado é denominado método da energia. Inicialmente supõe-se que além do par $\{u, \theta\}$

exista um par $\{v, \varphi\}$ que verifique (3.2)-(3.3), tomando a diferença entre as respectivas condições que $\{u, \theta\}$ e $\{v, \varphi\}$ satisfazem e denotando $\omega = u - v$ e $\psi = \theta - \varphi$, obtém-se

$$\begin{aligned}&(\omega''(t), \xi) + \alpha(t)\big((\nabla\omega, \nabla\xi) + ([g(u'(t) - g(v'(t))], \xi)_{\Gamma_1}\big) + \\ &(f(u(t)), \xi) - (f(v(t)), \xi) + (\mathbf{a}\cdot\nabla\psi(t), \xi) = 0,\end{aligned} \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned}&(\psi(t), \lambda) + \beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)(\nabla\varphi, \nabla\lambda) - \beta\Big(\int_\Omega \varphi(t)\Big)(\nabla\varphi, \nabla\lambda) + \\ &((\mathbf{a}\cdot\nabla)\omega'(t), \lambda) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\omega(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ &\psi(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma \times (0,\infty), \\ &\omega(x,0) = 0, \ \omega'(x,0) = 0, \ \psi(x,0) = 0; \ \text{ em } \ \Omega,\end{aligned} \tag{3.108}$$

para todo $\xi \in V$ e $\lambda \in H_0^1(\Omega)$. Fazendo $\xi = 2\omega'(t)$ e $\lambda = 2\psi(t)$

$$\begin{aligned}&2(\omega''(t), \omega'(t)) + 2\alpha(t)\big((\nabla\omega, \nabla\omega'(t)) + 2([g(u'(t) - g(v'(t))], \omega'(t))_{\Gamma_1}\big) + \\ &2(f(u(t)), \omega'(t)) - 2(f(v(t)), \omega'(t)) + 2(\mathbf{a}\cdot\nabla\psi(t), \omega'(t)) = 0;\end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}&2(\psi(t), \psi(t)) + 2\beta\Big(\int_\Omega \theta(t)\Big)(\nabla\varphi, \nabla\psi(t)) - 2\beta\Big(\int_\Omega \varphi(t)\Big)(\nabla\varphi, \nabla\psi(t)) + \\ &2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\omega'(t), \psi(t)) = 0,\end{aligned} \tag{3.110}$$

como valem as identidades

$$\begin{aligned}&2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\psi(t), \omega'(t)) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\omega'(t), \psi(t)) = 0, \\ &2(\omega'(t), \omega(t)) = \frac{d}{dt}|\omega'(t)|^2, \\ &2(\nabla\omega'(t), \nabla\omega(t)) = \frac{d}{dt}|\nabla\omega(t)|^2, \\ &2(\psi'(t), \psi(t)) = \frac{d}{dt}|\psi(t)|^2,\end{aligned}$$

somando (3.109) e (3.110) resulta

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(|\omega'(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla\omega(t)|^2 + |\psi(t)|^2) + \alpha(t)([g(u'(t)) - g(v'(t))], u'(t) - v'(t))_{\Gamma_1} - \\ &\alpha'(t)|\nabla\omega'(t)|^2 + 2(f(u(t)) - f(v(t)), \omega'(t)) + 2\beta(\int_\Omega \theta(t))(\nabla\psi(t), \nabla\psi(t)) + \\ &2[\beta(\int_\Omega \varphi(t)) - \beta(\int_\Omega \theta(t))](\nabla\varphi(t), \nabla\psi(t)) = 0.\end{aligned} \tag{3.111}$$

De (3.1), valem as seguintes desigualdades

$$\alpha(t)(g(u'(t)) - g(v'(t)), u'(t) - v'(t))_{\Gamma_1} \geqslant g_0\alpha_0\|\omega'(t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}, \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned} |-2(f(u(t)) - f(v(t)), \omega'(t))| &\leqslant 2|(f(u(t)) - f(v(t))|.|\omega'(t)| \\ &\leqslant 2C_0|\omega(t)|.|\omega'(t)| \\ &\leqslant 2C_0(|\omega(t)|^2 + |\omega'(t)|^2), \end{aligned}$$

$$2\beta(\int_\Omega \theta(t))|\nabla\psi(t)|^2 \geqslant 2\beta_0|\nabla\psi(t)|^2, \tag{3.113}$$

$$|2[\beta(\int_\Omega \varphi(t)) - \beta(\int_\Omega \theta(t))](\nabla\varphi(t), \nabla\psi(t))| \leqslant C\|\psi(t)\|_{L^1}|\nabla\varphi(t)|.|\nabla\psi(t)|^2 \tag{3.114}$$

Em (3.114) observando que $\phi \in L^\infty_{loc}(0,\infty; V \cap H_\Delta(\Omega))$ obtém-se pela desigualdade de Young

$$\begin{aligned} |2[\beta(\int_\Omega \varphi(t)) - \beta(\int_\Omega \theta(t))](\nabla\varphi(t), \nabla\psi(t))| &\leqslant C\|\psi(t)\|_{L^1(\Omega)}|\nabla\varphi(t)|.|\nabla\psi(t)|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{\beta_0}|\psi(t)|^2 + \beta_0|\nabla\psi(t)|^2. \end{aligned} \tag{3.115}$$

Ajustando essas desigualdades (3.112)-(3.115) à (3.111), obtém-se a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt}(|\omega'(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla\omega(t)|^2 + |\psi(t)|^2) + \beta_0|\nabla\psi(t)|^2 \leqslant \\ |\omega'(t)|^2 + (C + |\alpha'(t)|)|\nabla\omega(t)|^2 + \frac{C}{4\beta_0}|\psi(t)|^2.$$

Donde segue, fazendo $E(t) = |\omega'(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla\omega(t)|^2 + |\psi(t)|^2$, que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leqslant \max\Big\{C + C_T, 1, \Big(\frac{C}{4\beta_0} - \beta_0\Big)\Big\}E(t).$$

Pelo Lemma de Grownwall, utilizando (3.108), obtém-se $E(t) = 0$, isto implica que $u = v$ e $\theta = \varphi$.

Capítulo 4

Estabilidade Assintótica da Energia

O objetivo desta seção é provar que sob determinadas hipóteses sobre a função g a energia total associada ao sistema (3.2) decai exponencialmente. O raciocínio desenvolvido para demonstração deste resultado foi baseado nos trabalhos de (Komornik, V., ZuaZua, E. [22]).

Fixado um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ seja $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $m(x) = x - x_0$, considera-se $\Gamma_0 = \{x \in \Gamma\ ;\ \nu(x) \cdot m(x) \leqslant 0\}$, $\Gamma_1 = \{x \in \Gamma\ ;\ \nu(x) \cdot m(x) > 0\}$, e g tal que

$$g(x, s) = [\nu(x) \cdot m(x)] g_1(s), \forall x \in \Gamma_1;$$

$$[g_1(s) - g_1(r)](s - r) \geqslant g_0 (s - r)^2, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}; \tag{4.1}$$

$$|g(s)| \leqslant C|s|, \ \forall s \in \mathbb{R},$$

onde g_1 é uma função real contínua e g_0 é uma constante real. Considera-se ainda a existência de ξ e ε tal que

$$(n - (1/2 + \delta)) f(s) s \geqslant (2n + \xi) \mathcal{F}(s), \text{ onde } \delta \in (1/2, 1), \tag{4.2}$$

$$|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} \leqslant \alpha_0 \varepsilon, \ \forall t > 0, \text{ onde } \varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{\omega}, \frac{\beta_0}{\kappa_1 + 1/(2\lambda_1)}, \frac{g_0}{\kappa_2} \right\}, \tag{4.3}$$

onde $\omega := \dfrac{2\sqrt{R} + (n - 1/2)C}{2\sqrt{\alpha_0}}$, $1/\lambda_1 = C > 0$ é a constante da desigualdade de Poincaré e κ_1, κ_2 são dados respestivamente pelas expressões em (4.29) e (4.30).

Teorema 4.1. *Supondo válidas as condições (4.1)-(4.3), existem constantes* ε_1, ε_2 *tais que*

$$E(t) \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E(0) e^{-(\varepsilon/\varepsilon_2)t}, \quad \forall t \geqslant 0,$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}\Big\{|u'(t)|^2 + \alpha(t)|\nabla u(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + 2\int_\Omega \mathcal{F}(u(t))dx\Big\}.$$

Demonstração. Seja

$$E_\varepsilon := E(t) + \varepsilon\rho(t), \tag{4.4}$$

$$\rho(t) := 2(u'(t), (m\cdot\nabla)u(t)) + (n-1/2)(u'(t), u(t)). \tag{4.5}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \rho'(t) &= 2\alpha(t)(\Delta u(t), (m\cdot\nabla)u(t)) - 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), (m\cdot\nabla)u(t)) \\ &-2(f(u(t)), (m\cdot\nabla)u(t)) + 2(u'(t), (m\cdot\nabla)u'(t)) \\ &+(n-1/2)\alpha(t)(\Delta u(t), u(t)) - (n-1/2)((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), u(t)) \\ &-(n-1/2)(f(u(t)), u(t)) + (n-1/2)|u'(t)|^2 =: I_1 + ... + I_8. \end{aligned} \tag{4.6}$$

agora estima-se cada um dos termos $I_j,\ j = 1, ..., 8$.

Estimativa do termo $I_1 = 2\alpha(t)(\Delta u(t), (m\cdot\nabla)u(t))$.

Utiliza-se a seguir a desigualdade demonstrada em (Komornik, V., ZuaZua, E. [22], p. 41), semelhante a identidade de Rellich

$$(\Delta u(t), (m\cdot\nabla)u(t)) \leqslant (n-2)|\nabla u|^2 - \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u d\Gamma, \tag{4.7}$$

para todo $u \in V\cap H^2(\Omega) \subset V\cap H_\Delta(\Omega)$. Como $\nu(x)\cdot m(x) > 0$ em Γ_1, segue que

$$\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla u|^2 = \int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2 + \int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2 \geqslant \int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2.$$

Multiplicando por -1, obtém-se

$$-\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma \leqslant -\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma_0 = -\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma_0. \tag{4.8}$$

Utilizando agora que em Γ_0, $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial\nu}\nu$ (pois $u\big|_{\Gamma_0} = 0$), obtém-se

$$\begin{aligned} 2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma &= 2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma + 2\int_{\Gamma_0}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma & (4.9) \\ &= 2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma + 2\int_{\Gamma_0}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2(m\cdot\nu)\, d\Gamma. & (4.10) \end{aligned}$$

Somando $-\int_{\Gamma_0}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2(m\cdot\nu)\, d\Gamma$ em ambos os lados da equação e utilizando que a parcela $\int_{\Gamma_0}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2(m\cdot\nu)\, d\Gamma$ é negativa, segue que

$$2\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u\, d\Gamma - \int_{\Gamma_0}\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)^2(m\cdot\nu)\, d\Gamma \leqslant 2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla)u. \tag{4.11}$$

Já que $g(x,s) = (m(x)\cdot\nu(x))g_1(s)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + g(\cdot, u') = 0$ e $|g_1(s)| \leqslant |s|$, tem-se

$$
\begin{aligned}
2\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(m\cdot\nabla)u \; d\Gamma - \int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 (m\cdot\nu)\; d\Gamma &\leqslant -2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)g_1(u')(m\cdot\nabla)u\; d\Gamma \\
&\leqslant -2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u'(m\cdot\nabla)u\; d\Gamma. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Para continuar estimando considera-se $R =: \sup_{x\in\overline{\Omega}}\{\sum_{j\leqslant n}|m_i(x)|_{\mathbb{R}}\}$ e observa-se que pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, a desigualdade de Young e a desigualdade triangular tem-se

$$
\begin{aligned}
|2u'(m\cdot\nabla)u|_{\mathbb{R}} &= 2|u'|_{\mathbb{R}}|(m\cdot\nabla)u|_{\mathbb{R}} \\
&\leqslant R^2|u'|^2_{\mathbb{R}} + \frac{|(m\cdot\nabla)u|^2_{\mathbb{R}}}{R^2} \\
&= R^2|u'|^2_{\mathbb{R}} + \frac{1}{R^2}\left|\sum_{j\leqslant n}\frac{\partial u}{\partial x_i}m_i\right|^2_{\mathbb{R}} \\
&\leqslant R^2|u'|^2_{\mathbb{R}} + \frac{1}{R^2}\left(\sum_{j\leqslant n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}m_i\right|_{\mathbb{R}}\right)^2 \\
&\leqslant R^2|u'|^2_{\mathbb{R}} + \frac{1}{R^2}\left[\left(\sum_{j\leqslant n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2_{\mathbb{R}}\right)^{1/2}\left(\sum_{j\leqslant n}|m_i|_{\mathbb{R}}\right)\right]^2 \\
&\leqslant R^2|u'|^2_{\mathbb{R}} + (\nabla u\cdot\nabla u). \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Substituindo a estimativa (4.13) em (4.12), e utilizando que $2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(\nabla u\cdot\nabla u)\; d\Gamma$ é positivo, segue que

$$
\begin{aligned}
2\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(m\cdot\nabla)u \; d\Gamma - \int_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 (m\cdot\nu)\; d\Gamma &\leqslant -2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)R^2|u'|^2_{\mathbb{R}}\; d\Gamma \\
&- 2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(\nabla u\cdot\nabla u)\; d\Gamma \\
&\leqslant -2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)R^2|u'|^2_{\mathbb{R}}\; d\Gamma \\
&\leqslant 2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)R^2|u'|^2_{\mathbb{R}}\; d\Gamma. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Utilizando (4.14) em (4.7) e multiplicando tudo por $2\alpha(t) > 0$, obtém-se

$$
I_1 \leqslant \alpha(t)(n-2)|\nabla u|^2 - \alpha(t)2R^2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2_{\mathbb{R}}\; d\Gamma. \qquad (4.15)
$$

Estimativa do termo $I_2 = -2((a\cdot\nabla)\theta(t), (m\cdot\nabla)u(t))$.

Por Cauchy-Schwartz, a desigualdade de Young, que $1 \leqslant (\alpha(t)/\alpha_0)^{1/2}$, e o raciocínio análogo ao feito em (4.13) para o integrando em $|(m\cdot\nabla)u(t)|$ obtém-se

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant |I_2|_{\mathbb{R}} &= 2|((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta,(m\cdot\nabla)u)|_{\mathbb{R}} \\
&\leqslant \frac{\sigma_1^2}{\alpha_0}|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta|^2 + \frac{\alpha(t)}{\sigma_1^2}|(m\cdot\nabla)u|^2 \\
&= \frac{\sigma_1^2}{\alpha_0}\int_\Omega |(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta|_{\mathbb{R}}^2\,dx + \frac{\alpha(t)}{\sigma_1^2}\int_\Omega |(m\cdot\nabla)u|_{\mathbb{R}}^2\,dx \\
&\leqslant \frac{\sigma_1^2}{\alpha_0}\left(\sum_{i\leqslant n}|a_i|^2\right)|\nabla\theta|^2 + \frac{\alpha(t)}{\sigma_1^2}R^2|\nabla u|^2 \\
&= \frac{\sigma_1^2}{\alpha_0}\|\mathbf{a}\|^2|\nabla\theta|^2 + \frac{\alpha(t)}{\sigma_1^2}R^2|\nabla u|^2,
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

onde $\|\mathbf{a}\|^2 = \left(\sum_{i\leqslant n}|a_i|^2\right)$.

Estimativa do termo $I_3 = -2(f(u(t)),(m\cdot\nabla)u(t))$.

Já que

$$
f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^u f(s)\,ds\right) = \frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial x_i},
$$

$\mathcal{F}(0)=0$, e $u\big|_{\Gamma_0}=0$, segue pelo teorema de Gauss-Green que

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -2\int_\Omega f(u)(m\cdot\nabla u)\,dx \\
&= -2\int_\Omega \sum_{j\leqslant n} m_j f(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx \\
&= -2\int_\Omega \sum_{j\leqslant n} m_j \frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial x_j}\,dx \\
&= -2\int_\Omega m\cdot\nabla\mathcal{F}(u)\,dx \\
&= 2\int_\Omega \mathrm{Div}(m)\mathcal{F}(u)\,dx - 2\int_\Gamma \mathcal{F}(u)(m\cdot\nu)\,d\Gamma \\
&= 2n\int_\Omega \mathcal{F}(u)\,dx - 2\int_{\Gamma_1}\mathcal{F}(u)(m\cdot\nu)\,d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Já que $f(s)>0$ para $s>0$ pois $f(s)s\geqslant 0$, e sobre $(m\cdot\nu)\big|_{\Gamma_1}\geqslant 0$ segue que

$$
2\int_{\Gamma_1}\mathcal{F}(u)(m\cdot\nu)\,d\Gamma > 0 \tag{4.18}
$$

(4.18) em (4.17) implica que

$$
I_3 \leqslant 2n\int_\Omega \mathcal{F}(u)\,dx. \tag{4.19}
$$

Estimativa do termo $I_4 = 2(u'(t), (m \cdot \nabla)u'(t))$.

Veja que pelo teorema da Gauss-Green, usando que $(m \cdot \nu)\big|_{\Gamma_0} \leqslant 0$ e que $1 \leqslant \dfrac{\alpha(t)}{\alpha_0}$

$$\begin{aligned}
I_4 &= 2\int_\Omega \left(\sum_{j\leqslant n} m_j(x)u'(t)\frac{\partial u'(t)}{\partial x_j}\right)\,dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{j\leqslant n} m_j(x)\frac{\partial |u'(t)|^2_{\mathbb{R}}}{\partial x_j}\right)\,dx \\
&= \int_\Omega m \cdot \nabla |u'(t)|^2_{\mathbb{R}}\,dx \\
&= \int_\Gamma |u'(t)|^2_{\mathbb{R}}(m\cdot\nu)\,d\Gamma - \int_\Omega |u'(t)|^2_{\mathbb{R}}\mathrm{Div}(m)\,dx \\
&\leqslant -n|u'(x)|^2 + \int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'(x)|^2_{\mathbb{R}}\,d\Gamma \\
&\leqslant -n|u'(t)|^2 + \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'(x)|^2_{\mathbb{R}}\,d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Estimativa do termo $I_5 = (n - 1/2)\alpha(t)(\Delta u(t), u(t))$.

Novamente usando que $(m \cdot \nu)\big|_{\Gamma_0} \leqslant 0$, que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + g(\cdot, u') = 0$, (4.1) e o Teorema de Green-Gauss obtém-se

$$\begin{aligned}
(n-1/2)\alpha(t)\int_\Omega u\Delta u\,dx &= (n-1/2)\alpha(t)\left[\int_\Gamma (u\nabla u\cdot\nu)\,d\Gamma - \int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla u)\,dx\right] \\
&= (n-1/2)\alpha(t)\left[\int_\Gamma u(m\cdot\nu)g_1(u')\,d\Gamma - |\nabla u|^2\right] \\
&\leqslant (n-1/2)\alpha(t)\left[\int_{\Gamma_1} u(m\cdot\nu)g_1(u')\,d\Gamma - |\nabla u|^2\right] \\
&\leqslant (n-1/2)\alpha(t)\left[\int_{\Gamma_1} |u|_{\mathbb{R}}|(m\cdot\nu)|_{\mathbb{R}}|u'|_{\mathbb{R}}\,d\Gamma - |\nabla u|^2\right].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Antes de prosseguir com as estimativas, é importante estimar superiormente $\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)u^2$, para tal, veja que o Teorema do Traço e a equivalência entre as normas de V e $H_1(\Omega)$ determinam a existência de constantes $\Theta > 0$ e $\Theta_0 > 0$, de modo que seja verdadeira a seguinte cadeia de desigualdades

$$\int_\Gamma u^2\,d\Gamma \leqslant \Theta\|u\|_{H^1} \leqslant \Theta_0\Theta|\nabla u| = \Theta_1|\nabla u|^2,$$

onde $\Theta_0\Theta =: \Theta_1$, desta ultima desigualdade, obtém-se

$$\int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)u^2\, d\Gamma \leqslant \Theta_1 \left(\sup_{x\in\overline{\Omega}}\{(m(x)\cdot\nu(x))\}\right) |\nabla u|^2 = \Theta_2|\nabla u|^2, \tag{4.22}$$

onde $\Theta_2 =: \Theta_1 \left(\sup_{x\in\overline{\Omega}}\{(m(x)\cdot\nu(x))\}\right)$. Feito isto, usa-se a desigualdade de Young e (4.22) para concluir que

$$\begin{aligned}
\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}|u|_{\mathbb{R}}|(m\cdot\nu)|_{\mathbb{R}}|u'|_{\mathbb{R}}\,d\Gamma &= \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\left(n-\frac{1}{2}\right)|u|_{\mathbb{R}}\sqrt{(m\cdot\nu)}\sqrt{(m\cdot\nu)}|u'|_{\mathbb{R}}\,d\Gamma\\
&= \frac{\alpha(t)\sigma_2^2(n-1/2)^2}{2}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2\,d\Gamma\\
&+ \frac{\alpha(t)}{2\sigma_2^2}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u|^2\,d\Gamma\\
&\leqslant \frac{\alpha(t)\sigma_2^2(n-1/2)^2}{2}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2\,d\Gamma\\
&+ \frac{\alpha(t)}{2\sigma_2^2}\Theta_2|\nabla u|^2.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Usando a estimativa (4.23) em (4.21), segue que

$$I_5 \leqslant -\alpha(t)\left(n-\frac{1}{2}+\frac{\alpha(t)}{2\sigma_2^2}\Theta_2\right)|\nabla u|^2 + \frac{\alpha(t)\sigma_2^2(n-1/2)^2}{2}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2\,d\Gamma. \tag{4.24}$$

Estimativa do termo $I_6 = -(n-1/2)((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), u(t))$.

Integrando por partes usando que $1 \leqslant (\alpha(t)/\alpha_0)^{1/2}$, a desigualdade Young e a desigualdade de Poincaré tem-se

$$
\begin{aligned}
I_6 &= -(n-1/2)\int_\Omega \left(\sum_{j\leqslant n} a_j \frac{\partial\theta(t)}{\partial x_j} u(t)\right) dx \\
&= -(n-1/2)\sum_{j\leqslant n}\int_\Omega a_j \frac{\partial\theta(t)}{\partial x_j} u(t)\ dx \\
&\leqslant \sum_{j\leqslant n}\int_\Omega (n-1/2) a_j \frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\theta(t)\ dx \\
&\leqslant \sum_{j\leqslant n}\int_\Omega \left(\frac{\sigma_3^2(n-1/2)^2|a_j|_{\mathbb{R}}^2|\theta(t)|_{\mathbb{R}}^2}{2\alpha_0} + \left|\frac{\partial u(t)}{\partial x_j}\right|_{\mathbb{R}}^2 \frac{\alpha(t)}{2\sigma_3^2}\right) dx \\
&\leqslant \sum_{j\leqslant n} \frac{\sigma_3^2(n-1/2)^2|a_j|_{\mathbb{R}}^2}{2\alpha_0}|\theta(t)|^2 + \frac{\alpha(t)}{2\sigma_3^2}|\nabla u|^2 \\
&\leqslant n\frac{\sigma_3^2(n-1/2)^2}{2\alpha_0}|\nabla\theta(t)|^2\left(\sum_{j\leqslant n}|a_j|^2\right) + \frac{\alpha(t)}{2\sigma_3^2}|\nabla u|^2 \\
&= \Theta_3 n\frac{\sigma_3^2(n-1/2)^2}{2\alpha_0}|\nabla\theta(t)|^2\|\mathbf{a}\|^2 + \frac{\alpha(t)}{2\sigma_3^2}|\nabla u|^2, \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

onde Θ_3 é a constante que satisfaz $|\theta|^2 \leqslant \Theta_3|\nabla\theta|^2$.

Estimativa do termo $I_7 = -(n-1/2)(f(u(t)), u(t))$.

Por (4.2), segue que $-(n-1/2)sf(s) \leqslant -\mathcal{F}(s)$, daí

$$
I_7 = \int_\Omega -(n-1/2)f(u(t))u(t)\ dx \leqslant -(2n+\xi)\int_\Omega \mathcal{F}(u(t))dx. \qquad (4.26)
$$

Voltando a $\rho'(t)$, obtém-se de $(4.15), (4.16), (4.19), (4.20), (4.24), (4.25)$ e (4.26), segue que

$$
\begin{aligned}
\rho'(t) &\leqslant \alpha(t)\left(n-2+\frac{R^2}{\sigma_1^2}-n+\frac{1}{2}-\frac{\Theta_2}{2\sigma_2^2}+\frac{\Theta_3}{2\sigma_3^2}\right)|\nabla u(t)|^2 \\
&+ \left(\frac{\sigma_1^2}{\alpha_0}\|\mathbf{a}\|^2 + n\frac{\sigma_3^2(n-1/2)^2\|\mathbf{a}\|^2}{2\alpha_0}\right)|\nabla\theta(t)|^2 \\
&+ (-n+n-1/2)|u'(t)|^2 \\
&+ (2n-2n-\xi)\int_\Omega \mathcal{F}(u(t))\ dx \\
&+ \alpha(t)\left(2R^2+\frac{\sigma_2^2(n-1/2)^2}{2}+\frac{1}{\alpha_0}\right)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'(t)|_{\mathbb{R}}^2\ d\Gamma. \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

Tomando $\sigma_2^2 = \Theta_2$, $\sigma_3^2 = \Theta_3$ e $\sigma_1^2 = 2R^2$ e desenvolvendo os termos entre parênteses obtém-se

$$\begin{aligned}\rho'(t) &\leqslant -\alpha(t)|\nabla u(t)|^2+\kappa_1|\nabla\theta(t)|^2-\frac{1}{2}|u'(t)|^2-\xi\int_\Omega \mathcal{F}(u(t))\,dx\\&+\alpha(t)\kappa_2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'(t)|^2_{\mathbb{R}},\end{aligned}\tag{4.28}$$

onde

$$\kappa_1 := \frac{\|a\|^2}{\alpha_0}\left(2R^2+n\frac{(n-1/2)^2\Theta_3}{2}\right),\tag{4.29}$$

$$\kappa_2 := 2R^2+\frac{(n-1/2)^2\Theta_2}{2}.\tag{4.30}$$

De (3.26), junto de (3.28), (4.1) e (4.3) obtém-se

$$E'(t)+g_0\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'(t)|^2_{\mathbb{R}}\,d\Gamma+\beta_0|\nabla\theta(t)|^2\leqslant\frac{\varepsilon\alpha(t)}{2}|\nabla u(t)|^2.\tag{4.31}$$

Multiplicando (4.28) por

$$\varepsilon=\min\left\{\frac{1}{\omega},\frac{\beta_0}{\kappa_1+1/(2\lambda_1)},\frac{g_0}{\kappa_2}\right\}>0,\tag{4.32}$$

somando à (4.31), e agregando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned}E'_\varepsilon(t)\leqslant &-\varepsilon\frac{1}{2}|u'(t)|^2-\varepsilon\frac{\alpha(t)}{2}|\nabla u(t)|^2-[\beta_0-\varepsilon\kappa_1]|\nabla\theta(t)|^2\\&-\varepsilon\xi\int_\Omega\mathcal{F}(u(t))\,dx-\alpha_0[g_0-\epsilon\kappa_2]\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'(t)|^2_{\mathbb{R}}\,d\Gamma.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Veja agora, que

$$\varepsilon\leqslant\frac{\beta_0}{\kappa_1+1/(2\lambda_1)}\ \Rightarrow\ \varepsilon\kappa_1+\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}\leqslant\beta_0\ \Rightarrow\ \beta_0-\varepsilon\kappa_1\geqslant\frac{\varepsilon}{2\lambda_1},$$

esta ultima desigualdade implica que

$$-[\beta_0-\varepsilon\kappa_1]|\nabla\theta(t)|^2\leqslant-\frac{\varepsilon}{2\lambda_1}|\nabla\theta(t)|^2\leqslant-\frac{\varepsilon}{2}|\theta(t)|^2.\tag{4.34}$$

Visto que a constante λ_1 é tomada de modo que $\lambda_1|\theta(t)|^2\leqslant|\nabla\theta(t)|^2$, $\forall\theta(t)\in H^1_0(\Omega)$. Da mesma forma

$$\varepsilon\leqslant\frac{g_0}{\kappa_2}\ \Rightarrow\ \varepsilon\kappa_2\leqslant g_0\ \Rightarrow\ g_0-\varepsilon\kappa_2\geqslant 0,$$

o que por sua vez implica que

$$\alpha_0[g_0-\epsilon\kappa_2]\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'(t)|^2_{\mathbb{R}}\,d\Gamma\geqslant 0.\tag{4.35}$$

Outra informação interessante é que para $s \neq 0$

$$s\mathcal{F}'(s) = sf(s) \geqslant 0, \tag{4.36}$$

a desigualdade (4.36) implica que para $s < 0$, $\mathcal{F}$ é não-crescente, como $\mathcal{F}(0) = 0$, obtém-se $\mathcal{F}(s) \geqslant 0$ para todo $s < 0$, por outro lado tem-se que $\mathcal{F}$ é não-decrescente para $s > 0$, como $\mathcal{F}(0) = 0$, encontra-se que $F(s) \geqslant 0$ para todo $s > 0$. Em todo caso

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) \in \mathbb{R}^+,$$

que por si, produz que

$$\int_\Omega \mathcal{F}(u(t))\, dx \geqslant 0. \tag{4.37}$$

Portanto usando as estimativas (4.34), (4.35), (4.37) e que $-\xi \leqslant 0 \leqslant 1$, em (4.33), obtém-se

$$\begin{aligned} E'_\varepsilon(t) \leqslant & - \varepsilon\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - \varepsilon\frac{\alpha(t)}{2}|\nabla u(t)|^2 - \frac{\varepsilon}{2}|\theta(t)|^2 \\ & - \varepsilon\int_\Omega \mathcal{F}(u(t))\, dx = -\varepsilon E(t). \end{aligned} \tag{4.38}$$

Como $1 \leqslant (\alpha(t)/\alpha_0)^{1/2}$, da desigualdade Young e da desigualdade de Poincaré verifica-se que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}|E_\varepsilon(t) - E(t)| = |\rho(t)| & \leqslant 2|u'(t)||(m\cdot\nabla u(t)| + (n - 1/2)|u'(t)||u(t)| \\ & \leqslant 2|u'(t)||\nabla u(t)|\sqrt{R} + (n-1/2)|u'(t)|C|\nabla u(t)| \\ & \leqslant \frac{2\sqrt{R} + (n-1/2)C}{2\sqrt{\alpha_0}} 2\sqrt{\alpha(t)}|u'(t)||\nabla u(t)| \qquad (4.39) \\ & \leqslant \frac{2\sqrt{R} + (n-1/2)C}{2\sqrt{\alpha_0}} E(t) \leqslant \omega E(t). \qquad (4.40) \end{aligned}$$

Observando que por (4.32), $(1 - \omega\varepsilon) > 0$ e denotando

$$\varepsilon_1 := (1 - \omega\varepsilon); \quad \varepsilon_2 := (1 + \omega\varepsilon).$$

A desigualdade (4.39), implica que

$$\varepsilon_1 E(t) \leqslant E_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_2 E(t). \tag{4.41}$$

Multiplicando a desigualdade a direita de $E_\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_2 E(t)$ por ε_2^{-1}, em seguida por $-\varepsilon$ obtém-se

$$-\varepsilon E(t) \leqslant -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} E_\varepsilon(t).$$

Esta ultima desigualdade junto de (4.38), permitem a seguinte caideia de implicações

$$\mathtt{E}'_{\varepsilon}(\mathtt{t}) \leqslant -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\mathtt{E}_{\varepsilon}(\mathtt{t}) \Rightarrow \left(\mathtt{E}_{\varepsilon}(\mathtt{t})e^{\mathtt{t}\varepsilon/\varepsilon_2}\right)' \leqslant 0 \Rightarrow \mathtt{E}_{\varepsilon}(\mathtt{t}) \leqslant \mathtt{E}_{\varepsilon}(0)e^{-\mathtt{t}\varepsilon/\varepsilon_2}. \tag{4.42}$$

Finalmente, (4.42) e (4.41), implica que

$$\mathtt{E}(\mathtt{t}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1}\mathtt{E}_{\varepsilon}(\mathtt{t}) \leqslant \frac{\mathtt{E}_{\varepsilon}(0)}{\varepsilon_1}e^{-\mathtt{t}\varepsilon/\varepsilon_2} \leqslant \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\mathtt{E}(0)e^{-\mathtt{t}\varepsilon/\varepsilon_2}.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press (1975).

[2] Brezis, H., *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial (1980).

[3] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and partial Differential Equations*, Rutgers University, March (2010).

[4] Caldas, C. S. Q., Barreto, R. K., & Límaco, J., *Linear thermoelastic system in noncylindrical domains*, Funkcialaj Ekvacioj, v. 42, n.1, (1999), p. 115-127.

[5] Clark, H. R., Jutuca, L. P. S. G. & Milla Miranda, M., *On a Mixed Problem for a Linear Coupled System with Variable Coefficients*, Eletronic Journal of Differential Equations, Vol. 1998, no. 04, (1988), p. 1-20.

[6] Clark, H. R., Clark, M. R., Louredo, A. T., Oliveira, A. M., *A nonlinear thermoelastic system with nonlinear boundary conditions*, J. Evol. Eq. 15 (2015), 895-911.

[7] Cazenave, T., *An introduction to nonlinear Schrodinger equations*, Textos de Metodos Matematicos numero 26, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (1996).

[8] Chipot, M., Lovar, B., *On the Asymptotic Behaviour of Some Nonlocal Problems,* Positivity 3, (1999), p. 65?81.

[9] Coddington, E. A., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations.* Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., Bombay - New Delhi, (1972).

[10] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, (1993).

[11] Hansen, W. S., *Exponential energy decay in linear thermoelastic rod* , Journal of Math. Analysis and Applications, 167(1992), p. 429-442.

[12] Henry, D., Lopes, O., Perisinotto, A., *Linear thermoelasticity: asymptotic stability and essential spectrum*, Nonlinear Analysis, Theory & Applications, vol. 21, 1(1993), p. 65-75.

[13] Lions, J. L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[14] Medeiros, L. A., Milla Miransa, M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (1999).

[15] Medeiros, L. A., Milla Miranda, M., *Introdução às Equações Diferenciais Parciais Não Lineares*, Instituto de Matemática-UFRJ, (1997).

[16] Medeiros, L. A., Milla Miranda, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (2011).

[17] Milla Miranda, M., Medeiros, L. A., *On a Boundary Value Problem for Wave Equations: Existence, Uniqueness-Asymptotic Behavior*, Revista de Matemáticas Aplicadas, Univerdidade de Chile, 17(1996), p. 47-73.

[18] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais,* Textos de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática-UFRJ, número 9, (1975).

[19] Rincon, M. A., Santos, B. S. & Límaco, J, - *Numerical Method, Existence and Uniqueness for Thermoelasticity System with Moving Boundary*, Computational & Applied Mathematics, Rio de Janeiro - Brasil, v. 24, n.3, (2005), p. 439-460.

[20] Slemrod, M., *Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smoth solutions in one-dimensional nonlinear termoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., 76 (1981), p. 97-133.

[21] Temam, R., *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, Vol. 2. North-Holland, Amsterdam, (1997).

[22] V. Kormornik, E. ZuaZua., *A direct method for boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Pure et Appl.,69 (1990), 33-54.