Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Nota

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática
Teresina 29/05/2019

Nome:______________________________ CPF: ____________________

1. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos, mostre que
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdot \ldots \cdot (1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$
Conclua que $(1+a)^n \geq 1 + na$, para todo a positivo e n natural.

2. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série divergente, com $a_n > 0$, e seja s_n a soma dos seus n primeiros termos. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ é divergente.

3. Sejam C compacto e A aberto. Mostre que o conjunto $B = C - A := \{a \in \mathbb{R} |\ a \in C \text{ e } a \notin A\}$ é compacto.

4. Suponha que o círculo $C = \{(x,y) : x^2 + (y-b)^2 = 1\}$, onde $b > 0$, é tangente à parábola $P = \{(x,y) : y = x^2\}$. Determine b.

5. Determine os valores de $c \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $\ln x = c \cdot x^2$ tem exatamente uma solução.

6. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}.$$
Calcule o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$.

7. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Um ponto crítico x_0, de f, diz-se não-degenerado se $f''(x_0) \neq 0$. Mostre que o conjunto dos pontos críticos não-degenerados de f é enumerável.

8. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Defina partição de um intervalo $[a,b]$, refinamento, soma superior, soma inferior e Integral de Reimann. Use essas definições para mostrar que quando se refina uma partição P, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

9. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, ponha $m = \frac{a+b}{2}$ e prove que
$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx.$$

10. Se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, mostre que f é integrável e $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

Bom Trabalho!