UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Controlabilidade Exata para uma Equação de Schrödinger Linear em um Domínio com Fronteira Variável

Thassio Luan Alves Rodrigues

Teresina - 2019

Thassio Luan Alves Rodrigues

Dissertação de Mestrado:

Controlabilidade Exata para uma Equação de Schrödinger Linear em um Domínio com Fronteira Variável

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus.

Teresina - 2019

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Controlabilidade Exata para uma Equação de Schrödinger Linear em um Domínio com Fronteira Variável

Thassio Luan Alves Rodrigues

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 29 de Julho de 2019.

Banca Examinadora:

Isaías Pereira de Jesus
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus (UFPI) - Presidente

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark (UFPI)

Gilcenio Rodrigues de S. Neto
Prof. Dr. Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto (UFPE)

Pitágoras Pinheiro de Carvalho
Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho (UESPI)

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

R696c Rodrigues, Thassio Luan Alves.
Controlabilidade exata para uma equação de Schrödinger linear em um domínio com fronteira variável / Thassio Luan Alves Rodrigues. – Teresina, 2019.
108 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Isaias Pereira de Jesus

1. Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Equação de Schrödinger. I. Título.

CDD 515.353

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

À minha mãe Maria do Socorro, à minha namorada Julianna e a todos os meus parentes e amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois ele fez o mundo e tudo o que nele existe.

À minha mãe, que é minha guerreira, minha conselheira e inspiração.

À minha tia Conceição, que muito me ajudou desde a graduação.

À todos os outros meus familiares que me apoiaram nessa caminhada.

À minha namorada Julianna, uma mulher linda e maravilhosa que Deus pôs na minha vida.

Ao meu orientador professor Isaías Pereira de Jesus, por ter me recebido de braços abertos e ter dedicado boa parte do seu tempo a minha orientação.

Aos professores Marcondes Rodrigues Clark, Pitágoras Pinheiro de Carvalho e Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto por aceitarem a participar da banca examinadora.

Aos professores de graduação e pós-graduação que tive na UESPI e UFPI. Por meio de incentivos e cursos motivadores fui capaz de avançar e cumprir meus objetivos. Em especial, aos professores Afonso Norberto, Pedro Jr., Pitágoras Carvalho, José Arimatéia, Felipe Marreiros, Aldenor Campos, Newton Luis.

Aos meus amigos que conquistei ao longo dessa caminhada, entre eles: Marcelo Ferreira, Christopher Queiroz, Francisco Santos, Thalisson Lopes, Silvestre Roney, Danillo Batista, Leonardo Silva, Dieme Pereira, Francimar de Brito, Felipe Cavalcante, Raimundo Bruno, Igor Fontenele, Pedro Paulo e Pedro Rodrigues.

À Capes pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta, meus sinceros agradecimentos.

Bendito seja o senhor, a minha rocha, que treina as minhas mãos para a batalha e os meus dedos para a guerra.
(Salmos 144.1).

Resumo

O objetivo desse trabalho é estudarmos a controlabilidade exata para uma equação de Schrödinger linear em um domínio com fronteira variável via Método da Unicidade Hilbertiana (HUM). Além disso, apresentaremos a existência, unicidade e regularidade de soluções para o problema proposto.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger, Método da Unicidade Hilbertiana, Controlabilidade Exata.

Abstract

The purpose of this work is to study the exact controllability for a linear Schrödinger equation in a domain with variable boundary via Hilbert Uniqueness Method (HUM). Moreover, we present the existence, uniqueness and regularity of solutions to the proposed problem.

Keywords: Schrödinger Equation, Hilbert Uniqueness Method, Exact Controllability.

Conteúdo

Notações e Simbologias

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto.

- Ω denota um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$;
- Γ denota a fronteira de Ω suficientemente regular;
- ν denota o vetor normal exterior a Γ;
- $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $T > 0$ denota o cilindro do $\mathbb{R}^{n+1}$;
- $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$ denota a fronteira lateral do cilindro Q;
- $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$;
- $|\cdot|$ denota a norma em $L^2(\Omega)$;
- $((\cdot,\cdot))$ denota o produto interno em $H_0^1(\Omega)$;
- $||\cdot||$ denota a norma em $H_0^1(\Omega)$;
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ quando não especificado, denota diferentes pares de dualidades;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano da função u;
- q.s. - quase sempre;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota a imersão compacta;
- C quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária;
- $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$;
- $\rightarrow$ denota convergência forte;

- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca;
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota convergência fraca estrela;
- X^* denota o dual topológico de X;
- X^{**} denota o bidual topológico de X;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y.

Introdução

Em meados de 1925, um físico austríaco chamado Erwin Schrödinger (1887-1961) formulou uma equação diferencial parcial de segunda ordem, cuja solução é a função de onda, que descreve como o estado quântico de um sistema físico muda com o tempo. Esta função de onda é uma expressão matemática que modela o comportamento ondulatório de uma partícula.

Tal estudo nos permite compararmos a relevância da segunda lei de Newton ($F = ma$) na mecânica clássica com a equação de Schrödinger na mecânica quântica. A primeira, relaciona através de uma equação diferencial, força e posição de uma partícula. A segunda descreve o comportamento de uma onda associada a uma partícula qualquer.

A partir da equação de Schrödinger, podemos obter soluções ondulatórias que nos fornecem informações fundamentais sobre o comportamento de uma partícula.

Um sistema de controle é uma equação de evolução (EDO OU EDP) que depende de um parâmetro u, descrito pela expressão:

$$y' = f(t, y, u), \tag{1}$$

onde $t \in [0, T]$ representa a variável temporal, $y : [0, T] \to X$ é a função estado e $u : [0, T] \to Y$ é um controle. Nesse modelo, X e Y são espaços de funções adequados, $T > 0$ é um valor real fixado e y' representa a derivada de y em relação ao tempo t.

Em seguida, destacamos algumas das principais definições de controlabilidade presentes na literatura.

Definição 0.1 ***(Controlabilidade exata)*** *Sejam $T > 0$ e $y_0, y_1 \in X$ dois estados do sistema* (1). *Dizemos que tal sistema é exatamente controlável se existe $u : [0, T] \to Y$*

tal que

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(y,u) \ \text{em} \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1. \end{array} \right.$$

Definição 0.2 ***(Controlabilidade aproximada)*** *Sejam $T > 0$ um número real e y_0, y_1 dois possíveis estados do sistema (1). Dizemos que tal sistema é aproximadamente controlável se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir $u_\epsilon : [0,T] \to Y$ tal que*

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(y,u_\epsilon) \ \text{em} \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad \|y(T) - y_1\| \leq \epsilon. \end{array} \right.$$

Definição 0.3 ***(Controlabilidade nula)*** *Sejam $T > 0$ um número real dado e $y_0 \in X$ um estado arbitrário do sistema (1). Dizemos que tal sistema é nulamente controlável se existe $u : [0,T] \to Y$ tal que*

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(y,u) \ \text{em} \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = 0. \end{array} \right.$$

Definição 0.4 ***(Controlabilidade exata às trajetórias)*** *Sejam $T > 0$ um número real dado, $y_0 \in X$ um estado e $\overline{y}$ uma trajetória (isto é, uma solução arbitrária do sistema (1) sem controle). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável às trajetórias se existe $u : [0,T] \to Y$ tal que*

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(y,u) \ \text{em} \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = \overline{y}(T). \end{array} \right.$$

É bem sabido que, em problemas lineares, as definições de controle nulo e exato às trajetórias são equivalentes.

Nesse trabalho, baseado em [14, 15], utilizaremos o Método da Unicidade Hilbertiana (HUM) idealizado por J. -L. Lions (1928-2001) para provarmos a controlabilidade exata para uma equação linear de Schrödinger em um domínio não cilíndrico, ou seja, um domínio cuja fronteira varia com o tempo, associado a um controle não nulo localizado na fronteira lateral e condição inicial em um espaço de Sobolev apropriado. Faremos uso do conceito de solução fraca do problema não homogêneo e da solução definida por transposição ou solução ultra fraca para assegurarmos a boa definição de um operador apropriado nas condições do Teorema de Lax - Milgran, o que nos garantirá o controle exato do problema.

Por meio de uma mudança de variável, será possível tranformarmos o problema definido em um domínio não cilíndrico em um problema equivalente, mas com domínio cilíndrico, cujas seções não dependem do tempo t. A existência e a unicidade de soluções do problema em estudo serão estabelecidas pelo método de Faedo-Galerkin e resultados de compacidade.

Em comparação com a vasta literatura sobre problemas de controlabilidade em domínios cilíndricos, existe uma pequena quantidade de trabalhos em domínios não cilíndricos. Para alguns resultados nessa direção, podemos citar [1, 2, 14, 15, 19, 20] e mais recentemente [4, 6, 8, 21].

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma: no capítulo 1 apresentamos os resultados preliminares, essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho. No capítulo 2 resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções são estudados. Finalmente, no capítulo 3 apresentamos resultados sobre controle exato para equação de Schrödinger linear.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados necessários para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos abordados no capítulo posterior.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1 ***(Convergência Fraca)*** *Sejam E um espaço de Banach e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_n \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_n\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $\varphi \in E^*$.*

Definição 1.2 ***(Convergência Fraca Estrela)*** *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E^*$ e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E^*. Dizemos que $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ se, e somente se, $\langle \varphi_n, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $u \in E^*$.*

Proposição 1.1 *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então:*

(i) *Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$, então $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E^*$;*

(ii) *Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$;*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$ e se $f_n \to f$ em E^* (isto é, $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$), então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([9]). $\square$

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 1.3 *Dizemos que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.*

Definição 1.4 *Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E^{**}. Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E^{**}$.*

Quando o espaço E é reflexivo identificamos implicitamente E e E^{**} (com ajuda do isomorfismo J).

Teorema 1.1 ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)****. Seja E um espaço de Banach. Então o conjunto*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\} \quad \textit{é compacto na topologia fraca estrela.}$$

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([9]). □

Teorema 1.2 *Seja E um espaço de Banach separável. Então o conjunto*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\} \quad \textit{é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se B_{E^*} é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([9]). □

Corolário 1.1 *Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E^*. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([9]). □

Teorema 1.3 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([9]). □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 1.5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Denomina-se* suporte *de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente,*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\,\Omega}.$$

Definição 1.6 *Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω com suporte compacto em Ω.*

Definição 1.7 *Chamaremos multi-índice a toda n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α, definimos a ordem $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$,*

Definição 1.8 *Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

i) *Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que*

$$supp\,(\varphi) \subset K \quad e \quad supp\,(\varphi_n) \subset K, \quad \forall\; n \in \mathbb{N}$$

ii) *$D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.*

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

ii) T é continua, isto é, se uma sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}(\Omega)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então,
$$T(\varphi_n) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{C}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$. Equipa-se o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergencia:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, dizemos que a sequência $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T, quando a sucessão $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{C}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial complexo, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω. Com o intuito de tratarmos de espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribuicional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definimos a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Notemos que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.1}$$

é linear e continua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(\Omega) \ \text{ então} \lim_{n\to\infty} D^\alpha T_n = D^\alpha T \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.2}$$

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, serão dadas algumas definições e propriedades elementares dos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 1.9 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $1 \le p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}; f \textit{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \le p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}.$$

No caso particular $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do seguinte produto escalar:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Definição 1.10 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}; f \text{ mensurável e } \exists\, C \text{constante tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : \ |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 1.4 *(**Desigualdade de Young**) Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Proposição 1.2 *(**Desigualdade de Young com** ε) Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $\varepsilon > 0$. Então,*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \quad \forall a, b \geq 0,$$

onde $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}} q^{-1}$. No caso particular quando $p = q = 2$, a desigualdade reduz-se a

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Demonstração: Ver Evans ([5]). □

Teorema 1.5 *(**Desigualdade de Hölder**) Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Teorema 1.6 ***(Teorema do Traço)*** *A aplicação linear*

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u) = \Big(u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma, ..., \frac{\partial^{m-1}}{\partial \nu^{m-1}}\Big|_\Gamma \Big)$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *em* $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$*, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de* $W^{m,p}(\Omega)$ *em* $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$*.*

Demonstração: Ver Evans ([5]). □

Lema 1.3.1 *Se* $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$*, então*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad \textit{sobre} \quad \Gamma$$

e

$$|\nabla \phi|^2 = \Big(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\Big)^2.$$

Demonstração: Ver Medeiros ([13]). □

Definição 1.11 *Dizemos que uma função* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *é localmente integrável em* Ω*, quando* f *é integrável à Lebesgue em todo compacto* $K \subset \Omega$*. O espaço das funções localmente integravéis é denotado por* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$*. Em símbolos temos que*

$$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f| dx < \infty, \quad \textit{para todo compacto} \quad K \subset \Omega.$$

Lema 1.3.2 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω*.*

Demonstração: Ver Medeiros e Milla Miranda ([16]). □

1.4 Espaços de Sobolev

Como vimos na seção anterior, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$.

1.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Dado um multi-índice α, representamos por D^α o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.12 *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev que denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{1/p}.$$

Também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_\Omega \text{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas, respectivamente, por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Agora apresentaremos algumas desigualdades de Sobolev que nos ajudarão a alcançar objetivo proposto.

Teorema 1.7 *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira limitada Γ e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

$$\text{Se } \; n > pm, \; \text{ então } \; W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \; \text{ onde } q \in \Big[1, \tfrac{np}{n-mp}\Big],$$

$$\text{Se } \; n = pm, \; \text{ então } \; W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \; \text{ para todo } \; q \in [1, +\infty),$$

$$\text{Se } \; n = 1 \; \text{ e } \; m \geq 1, \; \text{ então } \; W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega),$$

sendo todas estas injeções contínuas. Além disso, se $p > n$ tem-se para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x - y|^{\alpha} \ q.s. \ x, y \in \Omega,$$

onde $\alpha = 1 - (N/p)$ e C dependa apenas do Ω, p e n. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Teorema 1.8 (Rellich–Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira Γ regular. Então:*

Se $n > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, para todo $q \in \left[1, \frac{2n}{n-2m}\right)$,

Se $n = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, +\infty)$,

Se $pm > n$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/p) \leq k + 1$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo n).

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Teorema 1.9 *(**Gauss-Green**) Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\displaystyle\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} u\nu^i d\Gamma \ (i = 1, 2, ..., n)$.*

Demonstração: Ver Evans ([5]). □

Teorema 1.10 *(**Fórmula de Green**) Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^1 e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\int_{\Omega} \nabla u \ \nabla v \ dx = -\int_{\Omega} u \ \Delta v \ dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} \ u \ d\Gamma.$$

Demonstração: Ver Evans ([5]). □

Teorema 1.11 *(**Representação de Riesz**) Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)^*$. Então existe um único $u \in L^q$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso, vale

$$||u||_{L^q} = ||\varphi||_{(L^p)^*}.$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Definição 1.13 *Dizemos que uma forma bilinear $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é coerciva se existe $\beta > 0$ tal que*

$$a(u,u) \geq \beta ||u||^2, \quad \forall u \in H.$$

Teorema 1.12 *(***Lax - Milgram***) Seja H um espaço de Hilbert e $B(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H^*$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(u,v) = (u,v) \quad \forall v \in H,$$

onde $(.,.)$ denota o produto interno em H.

Demonstração: Ver Brezis([3]). □

1.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Observemos que, embora o espaço vetorial das funções testes $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, em geral, ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto acontece porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior" que a norma de $L^p(\Omega)$ e é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequências convergentes. Isto motiva a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como segue:

Definição 1.14 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Definimos*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.13 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Observação 1.1 *Em particular, a expressão* $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *é uma norma no espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, equivalente a norma* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$*. Em* $H_0^1(\Omega)$ *denotamos o produto interno*

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$*, equivalente à norma* $\|u\|_{H^1(\Omega)}$*.*

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Teorema 1.14 ***(Agmon-Douglis-Nirenberg)*** *Suponhamos* Ω *um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *limitado de classe* C^2 *com fronteira* Γ *limitada. Seja* $1 < p < \infty$*. Então para toda* $f \in L^p(\Omega)$*, existe uma única solução* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *da equação*

$$-\Delta u + u = f \quad em \quad \Omega.$$

Além disso,se Ω *é de classe* C^{m+2} *e se* $f \in W^{m,p}(\Omega)$ *(para* $m \geq 1$*), então*

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad e \quad \|u\|_{W^{m+2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular, os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham um papel fundamental na Teoria dos Espaços de Sobolev e por conseguinte na Teoria das EDP's. Se $1 \leq p < \infty$ e o número q é o expoente conjugado de p, isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$. Em outras palavras, se f pertence a $H^{-m}(\Omega)$ então f é um funcional linear limitado sobre $H_0^m(\Omega)$.

Observação 1.2 *Em particular, as imersões do Teorema* 1.7 *são válidas para o espaço* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *com um subconjunto arbitrário aberto* Ω *de* $\mathbb{R}^n$*. Analogamente, as imersões do Teorema* 1.8 *são válidas para* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *com um subconjunto arbitrário* Ω *aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$*.*

Definição 1.15 *Se* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *a norma é definida como sendo*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u\rangle; \textit{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ com } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

1.5 Os Espaços $L^p(0,T;X)$

Nesta seção, estenderemos as noções de mensurabilidade e integrabilidade para funções

$$f : [0,T] \longrightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$.

Definição 1.16 *Denota-se por $L^p(0,T;X)$, com $1 \leq p \leq \infty$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis com valores em X e tais que se $1 \leq p < \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à* Lesbegue *em $(0,T)$ e se $p = \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$.*

O espaço $L^p(0,T;X)$ é um espaço completo com a norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty.$$

Se $p = \infty$ a norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} \text{ess} \|u(t)\|_X = inf\{C > 0 : ||u(t)||_X \leq C \;\; q.s \;\text{ em }\; \Omega\}.$$

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v, u \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_X \, dt.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, temos

$$\left[L^p(0,T;X)\right]' \approx L^{p'}(0,T,X').$$

A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v, u \rangle_{L^{p'}(0,T;X') \times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X' \times X} \, dt.$$

No caso $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$, ou seja,

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^\infty(0,T,X').$$

Definição 1.17 *Denota-se por* $C([0,T];X)$, *com* $T>0$ *o espaço de* Banach *das funções contínuas* $u:[0,T]\longrightarrow X$ *munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C([0,T];X)}=\max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_X<\infty.$$

Proposição 1.3 *Sejam* V, H, V^* *três espaços de Hilbert, sendo* V^* *o dual de* V. *Se uma função* u *pertence ao espaço* $L^2(0,T;V)$ *e sua derivada* u' *pertence ao espaço* $L^2(0,T;V^*)$, *então* u *é quase sempre igual a uma função contínua de* $[0,T]$ *em* H, *e temos a seguinte igualdade no sentido da distribuição escalar em* $(0,T)$

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2=2\langle u'(t),u(t)\rangle.$$

A igualdade acima faz sentido desde que as funções

$$t\to|u(t)|^2\quad e\quad t\to\langle u'(t),u(t)\rangle$$

são ambas integráveis em $[0,T]$.

Demonstração: Ver Temam ([22]).

1.6 Distribuições Vetoriais

Seja um número real $T>0$ e X um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$

Definição 1.18 *Uma distribuição vetorial sobre* $(0,T)$ *com valores em* X, *é uma função* $f:\mathcal{D}(0,T)\to X$ *linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre* $(0,T)$ *com valores em* X *e é denotado por*

$$\mathcal{D}'(0,T;X)=\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X).$$

Definição 1.19 *Seja* $f\in\mathcal{D}'(0,T;X)$. *A* derivada *de ordem* n *é definida como sendo a distribuição vetorial sobre* $(0,T)$ *com valores em* X *dada por*

$$\left\langle\frac{d^nf}{dt^n},\varphi\right\rangle=(-1)^n\left\langle f,\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right\rangle,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Observação 1.3 *Se a função f pertence ao espaço $L^p(0,T;X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então define uma distribuição que denotamos pela mesma função f e é dada por*

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{D}\,(0,T)\,,$$

com valores integráveis em X.

Demonstração: Ver Lions ([11]). □

1.7 Resultados Importantes

Nesta seção, apresentamos alguns resultados importantes que serão utilizados na obtenção dos objetivos desejados.

1.7.1 Funções Próprias e Decomposição Espectral

Teorema 1.15 ***(Funções Próprias e Decomposição Espectral)*** *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ. Então existe uma sequência de números reais $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$, com $\lambda_m \to \infty$ quando $m \to \infty$. Além disso, existe uma base Hilbertiana $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$, com $w_j \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta w_j = \lambda_j w_j, \\ \\ w_j = 0 \quad em \quad \Gamma, \end{array} \right.$$

para $j = 1, 2, \ldots$.
Dizemos que os números (λ_m) são os autovalores de $-\Delta$ (com a condição de Dirichlet) e que as funções $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ são as funções próprias associadas.

Demonstração: Ver Evans ([5]). □

1.7.2 O Teorema de Carathéodory

Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (x,t) onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando:

- $f(x,t)$ é mensurável em t para cada x fixo;
- $f(x,t)$ é contínua em x para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(x,t)| \leq m_K(t)$ para todo $(x,t) \in K$.

Definição 1.20 *Uma solução no sentido* estendido *do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

é uma função $\phi(t)$ absolutamente contínua tal que para algum β real vale

i) $(\phi(t),t) \in D$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$;

ii) $\phi'(t) = f(t,\phi(t))$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, *exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.*

Consideremos o retângulo

$$R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\right\},$$

com $a, b > 0$. Então, valem os seguintes resultados:

Teorema 1.16 (Carathéodory) *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$ existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

Demonstração: Ver Medeiros e Rivera ([18]). □

Corolário 1.2 *Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D. Então o problema*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.

Demonstração: Ver Medeiros e Rivera ([18]). □

Teorema 1.17 *Sejam D um subconjunto aberto limitado e conexo em $\mathbb{R}^{n+1}$, f uma função que satisfaz as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e suponhamos que exista uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m(t)$ para todo $(t,x) \in D$. Seja φ uma solução de*

$$x' = f(t,x) \ \text{ para quase todo } \ t \text{ em } \ I,$$

sobre o intervalo aberto (a,b). Então

i) *existe $\varphi(a+0), \varphi(b-0)$;*

ii) *se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b+\delta]$ para algun δ. Resultado análogo para a;*

iii) *$\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0))$ pertencem a ∂D (∂D fronteira de D);*

iv) *se f pode estender-se a $\overline{D}$ sem que ele perca suas propriedades então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.*

Demonstração: Ver Medeiros e Rivera ([18]). □

Corolário 1.3 ***(Prolongamento de Solução)*** *Sejam $D = B \times [0,T]$, com $0 < T < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e a função f nas condições do Teorema 1.17. Seja $\phi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(0) = x_0 \quad e \quad |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\phi(t)$ está definida tem-se $|\phi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então ϕ tem um prolongamento até $[0,T]$.

Demonstração: Ver Medeiros e Rivera ([18]). □

1.7.3 Desigualdade de Gronwall

Lema 1.7.1 *(**Gronwall**) Sejam $m \in L^1(0,T;R)$, $m \geq 0$ q.s em $(0,T)$, $a \geq 0$ constante real e $g \in L^\infty(0,T)$, $g \geq 0$ em $(0,T)$ tal que*

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq 2a^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)ds \quad \forall t \in (0,T).$$

Então,

$$g(t) \leq 2\left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \quad em\ (0,T).$$

Demonstração: Ver Medeiros ([13]). □

1.7.4 Uma Aplicação do Teorema de Hahn - Banach

Teorema 1.18 *Seja E um espaço vetorial normado. Para todo $x \in E$, vale*

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle| = \max_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle|.$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

1.7.5 O Teorema da Unicidade de Holmgren

Definição 1.21 *Um operador diferencial de ordem m num aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear*

$$u \longmapsto Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, a_\alpha$ são funções reais definidas em Ω. A parte principal (ou forma característica) de P é definida como sendo o polinômio

$$P_m(\xi) = P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}...\xi_n^{\alpha_n}.$$

Um vetor não nulo $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ define uma direção em $\mathbb{R}^n$. Toda raiz não nula da parte principal é chamada direção característica. Se os coeficientes da parte principal do operador P são constantes, então as direções características não dependem do ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.22 *Uma superfície* $\varphi(x) = \varphi(x_0)$*, onde* $\varphi \in C^1(\Omega)$ *e* $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$*, é chamada superfície característica em* x_0 *com respeito ao operador* P *se*

$$P_m(\nabla\varphi(x_0)) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)(\nabla\varphi(x_0))^\alpha = 0.$$

A superfície é chamada característica em relação ao operador P *se é característica em todos os seus pontos.*

Teorema 1.19 ***(Teorema da Unicidade de Holmgren)*** *Sejam* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *conjuntos abertos e convexos do* $\mathbb{R}^n$ *e* $P(D)$ *um operador diferencial com coeficientes constantes tal que todo plano característico* Π *com respeito a* $P(D)$ *que satisfaz* $\Pi \cap \Omega_2 \neq \varnothing$ *também satisfaz* $\Pi \cap \Omega_1 \neq \varnothing$*. Então, para a solução* $u \in D'(\Omega_2)$ *da equação* $P(D)u = 0$ *tal que* $u = 0$ *em* Ω_1 *também satisfaz* $u = 0$ *em* Ω_2*.*

Demonstração: Ver Hörmander ([7]). $\square$

Capítulo 2

Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Neste capítulo estudaremos a existência, unicidade e regularidade de soluções para um problema misto associado a equação de Schrödinger linear.

2.1 Formulação do Problema

Consideremos Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, com fronteira regular Γ e $k : [0,\infty) \mapsto (0,\infty)$ uma função diferenciável. Para $T > 0$, seja $\{\Omega_t\}_{t\in[0,T]}$ uma família de subconjuntos abertos e limitados do $\mathbb{R}^n$, com fronteira regular representada por Γ_t, definido como segue:

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x = k(t)y,\ y \in \Omega\}, \quad 0 \leq t \leq T < \infty. \tag{2.1}$$

Denotemos por $\widehat{Q}$ o domínio não cilíndrico do $\mathbb{R}^{n+1}$ como sendo

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0<t<T} \{\Omega_t \times \{t\}\},$$

com fronteira lateral regular dada por

$$\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0<t<T} \{\Gamma_t \times \{t\}\}.$$

Seja $y^0 \in \mathbb{R}^n$ e representamos por $m(y)$ a função vetorial $m(y) = y - y^0$ e por $\nu(y)$ o vetor normal unitário exterior ao ponto $y \in \Gamma$. Com isso, introduzimos os conjuntos:

$$\Gamma(y^0) = \{y \in \Gamma; m(y)\cdot\nu(y) \geq 0\} \ \ e \ \ \Sigma(y^0) = \Gamma(y^0)\times]0,T[.$$

Com isso, definimos os conjuntos correspondentes:

$$\Gamma_t(y^0) = \{x \in \Gamma_t;\ x = k(t)y,\ y \in \Gamma(y^0)\} \ \ e \ \ \widehat{\Sigma}(y^0) = \bigcup_{0<t<T} \{\Gamma_t(y^0) \times \{t\}\}.$$

Seja

$$M = \sup\{|y|; y \in \Omega\},$$

onde $|y|$ é o comprimento do vetor $y \in \mathbb{R}^n$. Suponhamos que

(H1) $k \in W^{2,\infty}_{loc}(0,\infty);\ k(t) \geq k_0 > 0 \quad \text{em} \quad [0,\infty)$;

(H2) $|y||k'(t)| \leq \dfrac{1}{Mk(t)} \quad \text{para} \quad 0 < t < T.$

O objetivo principal desse trabalho é obtermos a controlabilidade exata para o seguinte problema misto:

$$\left|\begin{array}{l} u' - i\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \widehat{Q}, \\ \\ u(x,t) = \begin{cases} g & \text{sobre} \quad \widehat{\Sigma}(y^0), \\ \\ 0 & \text{sobre} \quad \widehat{\Sigma}\backslash\widehat{\Sigma}(y^0), \end{cases} \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \text{em} \ \ \Omega_0, \end{array}\right. \tag{2.2}$$

onde $i = \sqrt{-1}$ representa a unidade imaginária.

Observação 2.1 *Tendo em conta que o sistema* (2.2) *pode ser controlado na fronteira, é razoável tentarmos resolver o problema quando o controle atua somente sobre uma parte desta. Dessa forma, consideraremos o caso em que o controle atua unicamente sobre o subconjunto* $\widehat{\Sigma}(y^0)$ *de* $\widehat{\Sigma}$. *Portanto trata-se de um problema de controlabilidade exata na fronteira com controle localizado.*

Sendo assim, podemos formular a controlabilidade exata para o problema (2.2) como segue:

Problema: Dado $T > 0$ suficientemente grande, encontrar um espaço de Hilbert H, tal que para cada dado inicial $u^0(x) \in H$, existe um controle $g \in L^2(\widehat{\Sigma}(y^0))$, tal que a solução $u = u(x,t)$ de (2.2) satisfaz a condição final

$$u(x,T,g) = 0 \ \text{em} \quad \Omega_T. \tag{2.3}$$

A metodologia (cf. Lions [10]) consiste em transformar o sistema (2.2) em um problema equivalente no cilindro Q pelo difeomorfismo

$$\tau : \widehat{Q} \to Q, \tag{2.4}$$

definido por $\tau(x,t) = (y,t)$, com $y = \dfrac{x}{k(t)}$.

A inversa

$$\tau^{-1} : Q \to \widehat{Q}, \tag{2.5}$$

é definida por $\tau^{-1}(y,t) = (x,t)$, com $x = k(t)y$.

Usando o difeomorfismo (2.4), observando que $x = k(t)y$ e denotando por

$$u(x,t) = (u \circ \tau^{-1})(y,t) = w(y,t),$$

temos as seguintes identidades

$$\left| \begin{array}{l} \nabla u(x,t) = \dfrac{1}{k(t)} \nabla w(y,t), \\[2mm] \Delta u(x,t) = \dfrac{1}{k^2(t)} \Delta w(y,t), \\[2mm] u'(x,t) = w'(y,t) - \dfrac{k'(t)}{k(t)} y_j \dfrac{\partial w}{\partial y_j}(y,t). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Com efeito, inicialmente notemos que como

$$y = \frac{x}{k(t)},$$

então para $1 \leq j \leq n$, resulta que

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_j} = \frac{1}{k(t)}, \tag{2.7}$$

e

$$\frac{\partial y_j}{\partial t} = -\frac{k'(t)}{k(t)} y_j. \tag{2.8}$$

Portanto, de (2.7), temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x_j}(y,t) = \frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_j} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_j} = \frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_j} = \frac{1}{k(t)}\frac{\partial w}{\partial y_j},$$

isto é,

$$\nabla u(x,t) = \frac{1}{k(t)} \nabla w(y,t),$$

e assim segue $(2.6)_1$.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{k(t)}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{k(t)}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{k(t)}\frac{\partial y_j}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}\right)\\ &= \frac{1}{k(t)}\frac{1}{k(t)}\frac{\partial^2 w}{\partial y_j^2} = \frac{1}{k^2(t)}\frac{\partial^2 w}{\partial y_j^2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta u(x,t) = \frac{1}{k^2(t)}\Delta w(y,t),$$

e assim segue $(2.6)_2$.

Finalmente, de (2.8), resulta que

$$u'(x,t) = w'(y,t) = \frac{\partial w}{\partial t}(y,t) = \frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} = w'(y,t) - \frac{k'(t)}{k(t)}y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}(y,t),$$

isto é,

$$u'(x,t) = w'(y,t) - \frac{k'(t)}{k(t)}y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}(y,t),$$

donde segue $(2.6)_3$.

Usando (2.6), o problema (2.2) é transformado no seguinte problema equivalente definido no cilindro Q:

$$\left|\begin{array}{l} w'(y,t) - \dfrac{i}{k^2(t)}\Delta w(y,t) - \dfrac{k'(t)}{k(t)}y_j\dfrac{\partial w}{\partial y_j}(y,t) = 0 \quad \text{em} \quad Q,\\ w(y,t) = \begin{cases} v & \text{sobre} \quad \Sigma(y^0),\\ 0 & \text{sobre} \quad \Sigma\backslash\Sigma(y^0),\end{cases}\\ w(y,0) = w^0(y) \quad \text{em} \quad \Omega,\end{array}\right. \tag{2.9}$$

onde $\Sigma(y^0)$ é a parte de Σ que será definida posteriormente.

Com estas considerações, podemos enunciar o principal resultado do nosso trabalho

Teorema 2.1 *Sejam Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω_t definido como em (2.1) e, suponhamos que as hipóteses $(H1)$ e $(H2)$ sejam válidas. Se $T > 0$, então para cada $u^0 \in H^{-1}(\Omega_t)$, existe um controle $g \in L^2(\widehat{\Sigma}(y^0))$ tal que a solução $u = u(x,t)$ do problema (2.2), satisfaz a condição*

$$u(x,T,g) = 0 \quad \forall x \in \Omega_t. \tag{2.10}$$

2.2 Solução Fraca

Nesta seção provaremos a existência, unicidade e regularidade da solução para o problema de valor de fronteira

$$\left| \begin{array}{l} w' - \dfrac{i}{k^2}\Delta w - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla w - \dfrac{nk'}{k} w = f \ \text{ em } \ Q, \\[2ex] w = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\[2ex] w(0) = w^0 \ \text{ em } \ \Omega, \end{array} \right. \tag{2.11}$$

onde

$$w^0 \in H_0^1(\Omega) \ \ e \ \ f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.12}$$

Mas precisamente, o seguinte resultado é válido:

Teorema 2.2 (Solução Fraca) *Dados w^0 e f satisfazendo* (2.12)*, existe uma única função $w : Q \to \mathbb{C}$, chamada solução fraca de* (2.11)*, satisfazendo:*

1. $w \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$,
2. $w' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$,
3. $-\displaystyle\int_0^T (w,\psi')\,dt + i\int_0^T \frac{1}{k^2}((w,\psi))\,dt - \int_0^T \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w,\psi)\,dt - \int_0^T \frac{nk'}{k}(w,\psi)\,dt$
   $= \displaystyle\int_0^T (f,\psi)\,dt,$
   para toda $\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, tal que $\psi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ com $\psi(0) = \psi(T) = 0$,
4. $w(0) = w^0$ em Ω.

Demonstração: A prova é baseada no método de Faedo-Galerkin que consiste nas seguintes etapas:

1. Construção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita;
2. Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas;
3. Passagem ao limite das soluções aproximadas;
4. Verificação do dado inicial;
5. Unicidade da solução.

- **Existência**

Soluções Aproximadas

Seja $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base hilbertiana de $L^2(\Omega)$ constituída de soluções aproximadas do problema espectral

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta\theta_j = \lambda_j\theta_j \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \\ \theta_j = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma, \end{array} \right. \tag{2.13}$$

e que forma um sistema ortogonal completo em $H_0^1(\Omega)$. Tal base existe pelo Teorema (1.15).

Multiplicando 2.13_1 por $\overline{v} = \overline{v(y,t)} \in H_0^1(\Omega)$, integrando em Ω e usando o Teorema 1.10, temos

$$\Delta\theta_j\overline{v} = \lambda_j\theta_j\overline{v}.$$

Daí,

$$-\int_\Omega \overline{v}\Delta\theta_j dy = \lambda_j \int_\Omega \theta_j\overline{v}dy,$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla\theta_j\nabla\overline{v}dy - \int_\Gamma \frac{\partial\theta_j}{\partial\nu}\overline{v}d\Gamma = \lambda_j\int_\Omega \theta_j\overline{v}dy,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla\theta_j\nabla\overline{v}dy = \lambda_j\int_\Omega \theta_j\overline{v}dy,$$

donde

$$((\theta_j, v)) = \lambda_j(\theta_j, v),$$

com $\theta_j = \theta_j(y)$.

Como $\theta_j \in L^2(\Omega)$, aplicando sucessivamente o Teorema 1.14, obtemos que $\theta_j \in H_0^1(\Omega) \cap H^m(\Omega)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Seja $V_m = [\theta_1, \cdots, \theta_m]$ o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelos m primeiros vetores θ_j dessa base.

O sistema aproximado para a solução do Teorema 2.2 é

$$\left| \begin{array}{l} w_m(t) \in V_m, \\ (w_m'(t), \theta_j(y)) + \dfrac{i}{k^2}((w_m(t), \theta_j(y))) - \dfrac{k'}{k}(y\cdot\nabla w_m, \theta_j(y)) - \dfrac{nk'}{k}(w_m(t), \theta_j(y)) \\ = (f(t), \theta_j(y)) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots, m, \\ w_m(0) = w_m^0 \longrightarrow w^0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.14}$$

Como $w_m(t) \in V_m$, temos que $w_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\theta_j(y)$.

Segue que (2.14) é um sistema de equações diferenciais ordinárias na incógnita $g_{jm}(t)$. Este sistema tem uma solução local em $[0, t_m[$, *com* $t_m < T$, pelo Corolário 1.2. A extensão para o intervalo $[0, T]$ é consequência das estimativas a priori que faremos a seguir.

Primeira Estimativa

Multiplicando (2.14) por $\overline{g_{jm}(t)}$, o conjugado do número complexo $g_{jm}(t)$, e somando de $j = 1$ até $j = m$, obtemos

$$\begin{aligned}(w_m'(t), w_m(t)) + \frac{i}{k^2}((w_m(t), w_m(t))) - \left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla w_m(t), w_m(t)\right) - \\ - \left(\frac{nk'}{k} w_m(t), w_m(t)\right) = (f(t), w_m(t)).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Tomando o dobro da parte real em ambos os membros da equação (2.15), temos

$$2Re(w_m'(t), w_m(t)) - 2Re\left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla w_m(t), w_m(t)\right) - \frac{2nk'}{k}|w_m(t)|^2 = 2Re(f(t), w_m(t)). \tag{2.16}$$

Como $y \cdot \nabla w_m = y_j \dfrac{\partial w_m}{\partial y_j}$, pelo Teorema 1.9, nos leva a

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}[y_j w_m \overline{w}_m]\, dy = \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j w_m \overline{w}_m \, d\Gamma = 0,$$

pois $w_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\theta_j(y)$ e $\theta_j = 0$ *sobre* Γ.

Daí, temos

$$\int_\Omega n w_m \overline{w}_m \, dy + \int_\Omega y_j \frac{\partial w_m}{\partial y_j} \overline{w}_m \, dy + \int_\Omega y_j w_m \frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_j} = 0,$$

o que nos dá

$$n(w_m, w_m) + (y \cdot \nabla w_m, w_m) + (y \cdot \nabla \overline{w}_m, \overline{w}_m) = 0,$$

ou seja,

$$n|w_m|^2 + (y \cdot \nabla w_m, w_m) + \overline{(y \cdot \nabla w_m, w_m)} = 0,$$

isto é,

$$n|w_m|^2 + 2Re(y \cdot \nabla w_m, w_m) = 0,$$

donde

$$-2Re\left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla w_m, w_m\right) = \frac{nk'}{k}|w_m|^2. \tag{2.17}$$

Substituindo a equação (2.17) em (2.16), segue que

$$2Re(w_m'(t), w_m(t)) - \frac{nk'}{k}|w_m(t)|^2 = 2Re(f(t), w_m(t)). \tag{2.18}$$

Notando que $\dfrac{d}{dt}|w_m(t)|^2 = 2Re(w'(t), w_m(t))$, temos que

$$\frac{d}{dt}|w_m(t)|^2 - \frac{nk'}{k}|w_m(t)|^2 = 2Re(f(t), w_m(t)) \leq 2|f(t)|\,|w_m(t)|. \tag{2.19}$$

Integrando (2.19) de 0 a t, obtemos

$$\frac{1}{2}|w_m(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|w_m(0)|^2 + \int_0^t \left[\frac{1}{2}\frac{nk'(s)}{k(s)}|w_m(s)| + |f(s)|\right]|w_m(s)|\,ds. \tag{2.20}$$

Pelo Lema 1.7.1, resulta de (2.20), que

$$|w_m(t)| \leq |w_m(0)| + \int_0^T |f(s)|\,ds + \int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}|w_m(s)|\,ds,$$

obtendo assim uma desigualdade do tipo

$$\varphi(t) \leq A + \int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\varphi(s)\,ds, \tag{2.21}$$

com $\varphi(s) = |w_m(s)|$ e $A = |w_m(0)| + \displaystyle\int_0^T |f(s)|\,ds$.
Dividindo ambos os lados da desigualdade (2.21) pelo segundo membro, nos leva a

$$\frac{\varphi(t)}{A + \displaystyle\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds} \leq 1. \tag{2.22}$$

Multiplicando (2.22) por $\dfrac{n|k'(s)|}{k(s)}$, temos

$$\frac{\dfrac{n|k'(s)|}{k(s)|}\varphi(s)}{A + \displaystyle\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds} \leq \frac{n|k'(s)|}{k(s)},$$

ou seja,

$$\frac{\dfrac{d}{dt}\left(A + \displaystyle\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\varphi(s)\,ds\right)}{A + \displaystyle\int_0^t \frac{n|k'(s)}{k(s)}\varphi(s)\,ds} \leq \frac{n|k'(s)|}{k(s)}. \tag{2.23}$$

Integrando a expressão (2.23) de 0 a t, resulta que

$$\int_0^t \frac{\dfrac{d}{dt}\left(A+\displaystyle\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\varphi(s)\,ds\right)}{A+\displaystyle\int_0^t \frac{n|k'(s)}{k(s)}\varphi(s)\,ds}\,ds \leq \int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds,$$

donde,

$$ln\left(A+\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\varphi(s)\,ds\right)\Bigg|_0^t \leq \int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds + C,$$

o que nos leva a

$$ln\left(A+\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\varphi(s)\,ds\right) - ln(A) \leq \int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds + C,$$

resultando que

$$ln\left(\frac{A+\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\varphi(s)\,ds}{A}\right) \leq \int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds + C,$$

ou seja,

$$\frac{A+\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\varphi(s)\,ds}{A} \leq e^{\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds},$$

o que nos conduz a

$$A+\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\varphi(s)\,ds \leq Ae^{\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds}. \tag{2.24}$$

Usando (2.21), então de (2.24), obtemos:

$$\phi(t) \leq Ae^{\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds}.$$

Mais precisamente,

$$|w_m(t)| \leq C\left[|w_m(0)| + \int_0^T |f(s)|ds\right], \tag{2.25}$$

onde $C = e^{\int_0^t \frac{n|k'(s)|}{k(s)}\,ds}$ independe de t, pela hipótese $(H1)$.

Segunda Estimativa

Multiplicando ambos os lados da equação aproximada (2.14) por $\lambda_j \overline{g}_{jm}(t)$, resulta que:

$$\begin{aligned}&(w'_m(t), \lambda_j g_{jm}(t)\theta_j(y)) + \frac{i}{k^2}((w_m(t), \lambda_j g_{jm}(t)\theta_j(y))) - \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w_m, \lambda_j g_{jm}(t)\theta_j(y)) - \\ &-\frac{nk'}{k}(w_m(t), \lambda_j g_{jm}(t)\theta_j(y)) = (f(t), \lambda_j g_{jm}(t)\theta_j(y)).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Observando que

$$-\Delta w_m(t) = -\Delta\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\theta_j(y)\right) = \sum_{j=1}^{m} -\Delta(g_{jm}(t)\theta_j(y)) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\lambda_j\theta_j(y),$$

e somando de $j=1$ até $j=m$ na equação (2.26), obtemos

$$\begin{aligned}&(w_m'(t), -\Delta w_m(t)) + \frac{i}{k^2}((w_m(t), -\Delta w_m(t))) - \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w_m(t), -\Delta w_m(t)) - \\ &-\frac{nk'}{k}(w_m(t), -\Delta w_m(t)) = (f(t), -\Delta w_m(t)).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Notando que

$$\begin{aligned}((w_m, -\Delta w_m)) &= \int_\Omega \nabla w_m \overline{\nabla(-\Delta w_m)}\, dy = -\int_\Omega \nabla w_m \overline{(-\nabla w_m)}\, dy + \int_\Gamma \frac{\partial w_m}{\partial \nu}(-\Delta w_m)\, d\Gamma = \\ &= -\int_\Omega \Delta w_m \overline{(-\Delta w_m)}\, dy = -(\Delta w_m, -\Delta w_m),\end{aligned}$$

e

$$(w_m, -\Delta w_m) = \int_\Omega w_m \overline{(-\Delta w_m)}\, dy = \int_\Omega \nabla w_m \overline{\nabla w_m}\, dy = ((w_m, w_m)) = \|w_m\|^2,$$

então de (2.27), segue que

$$\begin{aligned}&(w_m'(t), -\Delta w_m(t)) - \frac{i}{k^2}(\Delta w_m(t), -\Delta w_m(t)) - \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w_m(t), -\Delta w_m(t)) - \\ &-\frac{nk'}{k}\|w_m(t)\|^2 = (f(t), -\Delta w_m(t)).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Tomando o dobro da parte real em (2.28) e observando que

$$((w_m', w_m)) = (\nabla w_m', \nabla w_m) = (w_m', -\Delta w_m),$$

obtemos:

$$\begin{aligned}&2Re((w_m'(t), w_m(t))) - 2Re\left(\frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w_m(t), -\Delta w_m(t))\right) - \frac{2nk'}{k}\|w_m(t)\|^2 = \\ &2Re((f(t), w_m(t))).\end{aligned} \tag{2.29}$$

- Análise do termo $-2Re\left(\dfrac{k'}{k}y\cdot\nabla w_m(t), -\Delta w_m(t)\right)$.

Pelo Teorema 1.10, temos que

$$
\begin{aligned}
&\left(y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}, -\Delta w_m\right) = \int_\Omega y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}(-\overline{\Delta w_m})\,dy = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}\left[y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\right]\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_j}\,dy-\\
&-\int_\Gamma \frac{\partial \overline{w}_m}{\partial \nu}y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\,d\Gamma = \int_\Omega \frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_j}\,dy + \int_\Omega y_j\frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\right]\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_j}\,dy-\\
&-\int_\Gamma \frac{\partial \overline{w}_m}{\partial \nu}y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\,d\Gamma = \|w_m(t)\|^2 + \left(y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right], \frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right)-\\
&-\int_\Gamma \frac{\partial \overline{w}_m}{\partial \nu}y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\,d\Gamma = \|w_m(t)\|^2 + \left(y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right], \frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right)-\\
&-\int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial \nu}\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\,d\Gamma = \|w_m(t)\|^2 + \left(y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right], \frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right)-\\
&-\int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2\,d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Tomando o dobro da parte real em ambos os membros de (2.30) e após isso multiplicando por -1, nos conduz a:

$$
\begin{aligned}
&-2Re(y\cdot\nabla w_m, -\Delta w_m) = -2\|w_m\|^2 - \int_\Omega y_j 2Re\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right]\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\right\}dy+\\
&+2\int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2\,d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Notemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\right] &= \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right]\frac{\overline{w}_m}{\partial y_l} + \frac{\partial w_m}{\partial y_l}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right]\frac{\overline{w}_m}{\partial y_l} + \frac{\partial w_m}{\partial y_l}\overline{\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right]} =\\
&= 2Re\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right]\cdot\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\right\}.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 1.9, segue que

$$
\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\left[y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\right]dy = \int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\,d\Gamma = \int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2\,d\Gamma, \tag{2.32}
$$

visto que

$$
\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l} = \nu_l\nu_l\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial \nu} = \left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2.
$$

Assim, de (2.32), vale

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\right]dy = -n\int_\Omega \frac{\partial w_m}{\partial y_l}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\,dy + \int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2\,d\Gamma =\\
&= -n\|w_m\|^2 + \int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2\,d\Gamma
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Substituindo (2.33) em (2.31), obtemos:

$$
\begin{aligned}
&-2Re(y \cdot \nabla w_m, -\Delta w_m) = -2\|w_m\|^2 - \int_\Omega y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\frac{\partial \overline{w}_m}{\partial y_l}\right] dy+ \\
&+2\int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma = -2\|w_m\|^2 + n\|w_m\|^2 - \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma+ \\
&+2\int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma = (n-2)\|w_m\|^2 + \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

Multiplicando (2.34) por $\frac{k'}{k}$, resulta que

$$
-2Re\left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla w_m, -\Delta w_m\right) = \frac{(n-2)k'}{k}\|w_m\|^2 + \frac{k'}{k}\int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma. \tag{2.35}
$$

Substituindo (2.35) em (2.31), obtemos:

$$
\frac{d}{dt}\|w_m(t)\|^2 - \frac{(n+2)k'}{k}||w_m(t)||^2 + \frac{k'}{k}\int_\Gamma y_j \cdot \nu_j \left|\frac{\partial w_m(t)}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma = 2Re((f(t), w_m(t))). \tag{2.36}
$$

Observação 2.2 *Se supormos que $y_j \cdot \nu_j \geq 0$ em Γ, isto é, Ω contém a origem de $\mathbb{R}^n$ e o domínio é estrelado com respeito à origem, a integral na fronteira em* (2.36) *é não negativa. Com isso, obtemos a limitação de $w_m(t)$ em $H_0^1(\Omega)$, concluindo a segunda estimativa. Entretanto, tal restrição a Ω não se faz necessária tendo em vista que a integral em* (2.36) *pode ser substituída por uma identidade, que nos permite estimar $w_m(t)$ em $H_0^1(\Omega)$. A prova desta identidade encontra-se no Apêndice A.*

Pelo Apêndice A, modificamos a equação (2.36) obtendo

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{\|w_m\|^2 + k'k\, Im(w_m, y \cdot \nabla w_m)\} - \frac{nk'}{k}\{\|w_m\|^2 + k'k\, Im(w_m, y \cdot \nabla w_m)\} = \\
&[k'^2 + kk'']\, Im(w_m, y \cdot \nabla w_m) + 2k'k\, Im(P_m f, y \cdot \nabla w_m) + kk'\, Im(P_m f, n w_m) + \\
&+2Re((f, w_m)).
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

Definimos $h(t) = \|w_m(t)\|^2 + k(t)k'(t)\, Im(w_m(t), y \cdot \nabla w_m(t))$, e a equação diferencial (2.37) toma a forma:

$$
h'(t) - \theta(t)h(t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.38}
$$

com $\theta(t) = \dfrac{nk'(t)}{k(t)}$ e $g(t)$ sendo o segundo membro de (2.37).

Notando que

$$e^{-\displaystyle\int_0^t \theta(s)\,ds} = e^{-\displaystyle\int_0^t \frac{nk'(s)}{k(s)}\,ds} = e^{-n[ln(k(t)) - ln(k(0))]} = e^{n\,ln\left[\dfrac{k(0)}{k(t)}\right]} = \left[\frac{k(0)}{k(t)}\right]^n,$$

então, resolvendo (2.38), obtemos:

$$h(t) = \left[\frac{k(t)}{k(0)}\right]^n h(0) + k^n(t)\int_0^t k^{-n}(s)g(s)\,ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\|w_m(t)\|^2 + k'(t)k(t)\ Im(w_m(t), y\cdot\nabla w_m(t)) = \\
&= \left[\frac{k(t)}{k(0)}\right]^n \Big[\|w_m(0)\|^2 + k'(0)k(0)\ Im(w_m(0), y\cdot\nabla w_m(0))\Big] + \\
&+ k^n(t)\int_0^t k^{-n}(s)\{[k''(s)k(s) + k'^2(s)]\ Im(w_m(s), y\cdot\nabla w_m(s)) + \\
&+ 2k'(s)k(s)\ Im(P_m f(s), y\cdot\nabla w_m(s)) + k'(s)k(s)\ Im(P_m f(s), nw_m(s)) + \\
&+ 2Re((f(s), w_m(s)))\}\,ds.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Como $k \in W^{2,\infty}_{loc}(0,\infty)$, temos que para todo $T > 0$, existem constantes positivas $C_0(T)$, $C_1(T)$ e $C_2(T)$ tais que, para todo $t \in [0,T]$, valem:

- $|k(s)| \le \underset{0\le s\le T}{sup\ ess}\, |k(s)| \le C_0(T)$;
- $|k'(s)| \le \underset{0\le s\le T}{sup\ ess}\, |k'(s)| \le C_1(T)$;
- $|k''(s)| \le \underset{0\le s\le T}{sup\ ess}\, |k''(s)| \le C_2(T)$.

Assim, temos as seguintes desigualdades:

- $|-k(t)k'(t)\ Im(w_m(t), y\cdot\nabla w_m(t))| \le |k(t)|\,|k'(t)|\,|w_m(t)|M\|w_m(t)\| \le$
  $\le \dfrac{1}{2}M^2C_0^2(T)C_1^2(T)|w_m(t)|^2 + \dfrac{1}{2}\|w_m(t)\|^2$;
- $|2k'(s)k(s)\ Im(P_m f(s), y\cdot\nabla w_m(s))| \le 2C_0(T)C_1(t)|f(s)|M\|w_m(s)\|$;

- $|k'(s)k(s)\ Im(P_m f(s), nw_m(s))| \leq C_0(T)C_1(T)|f(s)|\,|w_m(s)| \leq$

  $\leq C_0(T)C_1(T)C|f(s)|\|w_m(s)\|$, pela Desigualdade de Poincaré.

Usando as desigualdades acima, modificamos (2.39), obtendo:

$$\frac{1}{2}\|w_m(t)\|^2 \leq C_0|w_m(t)|^2 + C_1\|w_m(0)\|^2 + C_2\int_0^t [|w_m(s) + \|f(s)\|]\|w_m(s)\|\,ds. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.25) em (2.40), resulta que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w_m(t)\|^2 &\leq C_0\left(|w_m(0)| + \int_0^T |f(s)|ds\right)^2 + C_1\|w_m(0)\|^2 + \\ &+C_2\int_0^T [|w_m(s)| + \|f(s)\|\|w_m(s)\|]ds.\end{aligned} \quad (2.41)$$

Desde que $|w_m(s)| + \|f(s)\| \in L^1(0,T)$, podemos aplicar o Lema 1.7.1. De fato, basta tomarmos $a = \sqrt{C_0}\left(|w_m(0)| + \int_0^T |f(s)|ds\right)$ e $b = \sqrt{C_1}\|w_m(0)\|$. De (2.41), obtemos:

$$\frac{1}{2}\|w_m(t)\|^2 \leq (a+b)^2 + C_2\int_0^t [|w_m(s)| + \|f(s)\|]\|w_m(s)\|ds. \quad (2.42)$$

Usando o Lema 1.7.1 em (2.42) e a desigualdade (2.25) da primeira estimativa, segue que

$$\|w_m(t)\| \leq C\left[\|w_m(0)\| + \int_0^T \|f(s)\|ds\right],\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \quad (2.43)$$

Passagem ao Limite no Problema Aproximado

De (2.25) e (2.43), obtemos:

$$(w_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad (2.44)$$

e

$$(w_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \quad (2.45)$$

De (2.44) e (2.45), aplicando o Teorema 1.1 e o Corolário 1.1, segue que $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ possui subsequência, que também denotaremos por $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$w_m \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \quad (2.46)$$

e

$$w_m \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \quad (2.47)$$

Multiplicando (2.14) por $\theta \in D(0,T)$ e integrando em $(0,T)$, obtemos:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(w_m(t),\theta_j)\theta(t)\,dt + \int_0^T \frac{i}{k^2}((w_m(t),\theta_j))\theta(t)\,dt - \int_0^T \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w_m(t),\theta_j)\theta(t)\,dt -$$
$$-\int_0^T \frac{nk'}{k}(w_m(t)\theta_j)\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t),\theta_j)\theta(t)\,dt,$$

donde

$$-\int_0^T (w_m(t),\theta_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \frac{i}{k^2}((w_m(t),\theta_j))\theta(t)\,dt - \int_0^T \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w_m(t),\theta_j)\theta(t)\,dt-$$
$$-\int_0^T \frac{nk'}{k}(w_m(t),\theta_j)\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t),\theta_j)\theta(t)\,dt, \ para \ \ todo \ \ \theta_j \in V_m.$$

Fazendo $m\to\infty$ e usando as convergências em (2.46) e (2.47), deduzimos que para todo $\theta \in D(0,T)$, vale

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (w(t),\theta_j)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \frac{i}{k^2}((w(t),\theta_j))\theta(t)\,dt - \int_0^T \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w(t),\theta_j)\theta(t)\,dt-\\&-\int_0^T \frac{nk'}{k}(w(t),\theta_j)\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t),\theta_j)\theta(t)\,dt.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Seja $v\in H_0^1(\Omega)$. Como V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$z_m = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{mj}\theta_j \in V_m,$$

com $z_m \longrightarrow v \ \ em \ \ H_0^1(\Omega)$.

Multiplicando (2.48) por $\overline{\varphi_{mj}}$ e somando em $j=1,2,\cdots,m$, então para todo $z_m\in V_m$, segue que:

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (w(t),z_m)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \frac{i}{k^2}((w(t),z_m))\theta(t)\,dt - \int_0^T \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w(t),z_m)\theta(t)\,dt-\\&-\int_0^T \frac{nk'}{k}(w(t),z_m)\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t),z_m)\theta(t)\,dt.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Ao limite com $m\to\infty$ em (2.49), resulta que:

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (w(t),v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T \frac{i}{k^2}((w(t),v))\theta(t)\,dt - \int_0^T \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w(t),v)\theta(t)\,dt-\\&-\int_0^T \frac{nk'}{k}(w(t),v)\theta(t)\,dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)\,dt, \ para \ \ todo \ \ v\in H_0^1(\Omega).\end{aligned} \tag{2.50}$$

De (2.50), temos:

$$\Big\langle (w(t),v),\theta'(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} + \Big\langle \frac{i}{k^2}((w(t),v)),\theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} -$$
$$-\Big\langle \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w(t),v),\theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} - \Big\langle \frac{nk'}{k}(w(t),v),\theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} =$$
$$= \langle (f(t),v),\theta(t)\rangle_{D'(0,T),D(0,T)},$$

implicando para todo $v\in H_0^1(\Omega)$ e para todo $\theta\in D(0,T)$, vale

$$\Big\langle \frac{d}{dt}(w(t),v) + \frac{i}{k^2}((w(t),v)) - \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w(t),v) - \frac{nk'}{k}(w(t),v) - (f(t),v),\theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(w(t),v) + \frac{i}{k^2}((w(t),v)) - \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w(t),v) - \frac{nk'}{k}(w(t),v) = (f(t),v), \tag{2.51}$$

no sentido de $D'(0,T)$.

Condição inicial

Para a condição inicial devemos encontrar o espaço ao qual w' pertence, para que possamos garantir que w está realmente definido em $t=0$. De fato, mostraremos que $w'\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Com efeito, segue por (2.51) que, tomando em particular $v\in D(\Omega)$, temos:

$$\Big\langle w'(t),v\Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \Big\langle -\frac{i}{k^2}\Delta w(t),v\Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} + \Big\langle -\frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w(t)),v\Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} +$$
$$+\Big\langle -\frac{nk'}{k}w(t),v\Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \Big\langle f(t),v\Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)},$$

isto é,

$$\Big\langle w'(t) - \frac{i}{k^2}\Delta w(t) - \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla w(t)) - \frac{nk'}{k}w(t) - f(t),v\Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = 0,$$

para todo $v\in D(\Omega)$, *no sentido de* $D'(0,T)$.

Portanto,

$$w' - \frac{i}{k^2}\Delta w - \frac{k'}{k}y\cdot\nabla w - \frac{nk'}{k}w = f \quad em \quad D'(\Omega).$$

Como $-\Delta\in\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega))$ *e* $w\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos que $-\Delta w\in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Assim,

$$w' = f + \frac{i}{k^2}\Delta w + \frac{k'}{k}y\cdot\nabla w + \frac{nk'}{k}w \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)) + L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) +$$
$$+L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) + L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Logo,

$$w' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Como $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então pelo Lema 1.3, segue que

$$w \in C^0([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.52}$$

Dessa forma, faz sentido calcular $w(0)$. Mostraremos agora que $w(0) = w^0$.

Notemos que, de (2.46), temos:

$$(w_m, z) \longrightarrow (w, z), \ para \ \ todo \ \ z \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\int_0^T (w_m(t), z(t))dt \longrightarrow \int_0^T (w(t), z(t))dt. \tag{2.53}$$

Em particular a convergência (2.53) vale para $z = v\theta$ onde $\theta \in C^1[0,T]$ *tal que* $\theta(0) = 1$ *e* $\theta(T) = 0$, *e para todo* $v \in H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, podemos reescrever (2.53) da seguinte maneira:

$$\int_0^T (w_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (w(t), v)\theta(t)dt, \ para \ \ todo \ \ v \in H_0^1(\Omega) \ \ e \ \ \theta \in C^1[0,T].$$

Logo,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(w_m(t)v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}(w(t), v)\theta(t)dt,$$

o que integrando por parte nos dá:

$$(w_m(t), v)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (w_m(t)v)\theta'(t)dt \longrightarrow (w(t), v)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (w(t), v)\theta'(t)dt,$$

ou seja,

$$-(w_m(0), v) - \int_0^T (w_m(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow -(w(0), v) - \int_0^T (w(t), v)\theta'(t)dt \tag{2.54}$$

Notemos que de (2.46), vale a seguinte convergência

$$\int_0^T (w_m(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^t (w(t), v)\theta'(t)dt,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ *e todo* $\theta \in C^1[0,T]$.

Portanto, segue de (2.54) que

$$(w_m(0), v) \longrightarrow (w(0), v), \ para \ \ todo \ \ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.55}$$

Por outro lado, temos que $w_m(0) \longrightarrow w^0 \ \ em \ \ H_0^1(\Omega)$, o que implica

$$(w_m(0), v) \longrightarrow (w^0, v), \quad para \ \ todo \ \ v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.56}$$

De (2.55), de (2.56) e da unicidade do limite, podemos concluir que

$$(w(0), v) = (w^0, v), \ para \ \ todo \ \ v \in H_0^1(\Omega),$$

implicando que

$$w(0) = w^0.$$

Unicidade

Suponhamos que w e $\hat{w}$ sejam soluções do problema (2.11). Seja $z = w - \hat{w}$. Então temos que $z \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ e $z' \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ e satisfaz o sistema

$$\left| \begin{array}{l} z' - \dfrac{i}{k^2}\Delta z - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla z - \dfrac{nk'}{k} z = 0 \ \text{ em } \ Q, \\ \\ z = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\ \\ z(0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array} \right. \tag{2.57}$$

Mostraremos que $z = 0$. Com efeito, multiplicando $(2.57)_1$ por $\overline{z}$ e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega z'(s)\overline{z(s)}dy - \int_\Omega \frac{i}{k^2}\Delta z(s)\overline{z(s)}dy - \int \frac{k'}{k} y \cdot \nabla z(s)\overline{z(s)}dy - \int_\Omega \frac{nk'}{k} z(s)\overline{z(s)}dy = 0,$$

ou seja,

$$(z'(s), z(s)) + \left(\left(\frac{i}{k^2} z(s), z(s)\right)\right) - \left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla z(s), z(s)\right) - \left(\frac{nk'}{k} z(s), z(s)\right) = 0. \tag{2.58}$$

Tomando a parte real em ambos os lados de (2.58) teremos, de forma análoga a primeira estimativa, que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(z(s), z(s)) + \frac{1}{2}\frac{nk'}{k}|z(s)|^2 - \frac{nk'}{k}|z(s)|^2 = 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|z(s)|^2 - \frac{1}{2}\frac{nk'}{k}|z(s)|^2 = 0,$$

donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|z(s)|^2 < \frac{nk'}{k}|z(s)|^2. \tag{2.59}$$

Integrando (2.59) de 0 a t, obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}|z(s)|^2 ds < \int_0^t \frac{nk'(s)}{k(s)}|z(s)|^2 ds,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}|z(t)|^2 < \frac{1}{2}|z(0)|^2 + \int_0^t \frac{nk'(s)}{k(s)}|z(s)|\,|z(s)|ds.$$

Pelo Lema 1.7.1, segue que:

$$|z(t)| \leq |z(0)| + \int_0^t \frac{nk'(s)}{k(s)}|z(s)|ds.$$

Um cálculo análogo como o feito na primeira estimativa nos dá

$$|z(t)| \leq C|z(0)|, \tag{2.60}$$

onde $C = e^{\int_0^t \frac{nk'(s)}{k(s)}ds}$.

Como $z(0) = 0$, resulta de (2.60) que, $\forall\ t \in [0, T]$, vale

$$|z(t)| \leq 0,$$

donde

$$z(t) = 0,$$

ou seja,

$$z \equiv 0,$$

e por conseguinte $w = \hat{w}$, conforme queríamos. $\square$

2.3 Solução Forte

Nessa seção, nosso objetivo é obtermos a regularidade $H_0^1(\Omega)$ para a solução fraca do problema do Teorema 2.2. Mostraremos que $w \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Para isso, obteremos w como limite de soluções mais regulares. De fato, consideremos o problema de valor de fronteira (2.11) com os dados:

$$w^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad f \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega)), \quad f' \in L^1(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.61}$$

Pelos mesmos argumentos usados no Teorema 2.2, vale o seguinte resultado:

Teorema 2.3 (Solução Forte) *Dados w^0 e f satisfazendo* (2.61), *então existe exatamente uma função $w : Q \to \mathbb{C}$, satisfazendo as seguintes condições:*

$$\left| \begin{array}{l} w \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ \\ w' - \dfrac{i}{k^2}\Delta w - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla w - \dfrac{nk'}{k} w = f \quad em \quad Q, \\ \\ w(0) = w^0. \end{array} \right.$$

A solução w do Teorema 2.3 é chamada *solução forte* do problema de valor de fronteira (2.11).

Observação 2.3 *Se conhecemos o Teorema* 2.3, *então podemos provar o Teorema* 2.2.

Com efeito, dados $w^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, com $f' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, existem sequências $(w_m^0)_{m\in\mathbb{N}}$, $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(f_m')_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente, tais que

$$\left| \begin{array}{l} w_m^0 \longrightarrow w^0 \quad em \quad H_0^1(\Omega), \\ f_m \longrightarrow f \quad em \quad L^1(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ f_m' \longrightarrow f' \quad em \quad L^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.62}$$

Com w_m^0 e f_m, pelo Teorema 2.3, obtemos w_m solução forte do problema de fronteira (2.11) e provamos que w_m tem a estimativa (2.43). Então

$$w_m \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad em \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.63}$$

e satisfaz todas as condições do Teorema 2.2.

Agora, consideremos dois índices m e n e $w_m,\ w_n$ as correspondentes soluções fortes do problema de fronteira (2.11), correspondente a w_m^0, w_n^0 e f_m^0, f_n^0. Utilizando argumentos análogos aos da segunda estimativa, obtemos:

$$\|w_m(t) - w_n(t)\| \leq C \left[\|w_m^0 - w_n^0\| + \int_0^T \|f_m^0(s) - f_n^0(s)\| ds \right].$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} \|w_m - w_n\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} &= \max_{0\leq t\leq T} \|w_m(t) - w_n(t)\| \\ &\leq C \left[\|w_m^0 - w_n^0\| + \int_0^T \|f_m^0(s) - f_n^0(s)\| ds \right]. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Utilizando as convergências $(2.62)_1$ e $(2.62)_2$, então de (2.64), segue que

$$\|w_m - w_n\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} \longrightarrow 0.$$

Logo, $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T],H_0^1(\Omega))$, e sendo o mesmo um espaço de Banach, existe $\xi \in C^0([0,T],H_0^1(\Omega))$ tal que

$$w_m \longrightarrow \xi \;\; em \;\; C^0([0,T],H_0^1(\Omega)),$$

ou seja,

$$w_m \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \;\; em \;\; C^0([0,T],H_0^1(\Omega)).$$

Como $C^0([0,T],H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, em particular

$$w_m \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \;\; em \;\; L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.65}$$

Segue de (2.63), (2.65) e pela unicidade do limite fraco estrela, que $w = \xi$. Assim, temos a regularidade para a solução fraca

$$w \in C^0([0,T],H_0^1(\Omega)). \tag{2.66}$$

2.4 Desigualdades Direta e Inversa

O Método da Unicidade Hilbertiana (HUM), que será visto posteriormente, é baseado em duas expressões fundamentais denominadas Desigualdade Direta e Desigualdade Inversa. Essa seção é dedicada a provar essas desigualdades para a solução do problema de valor de fronteira (2.11), que são o ponto chave para resolver o problema de controlabilidade exata para a equação de Schrödinger no cilindro Q. Para mostrarmos tais desigualdades, antes provaremos o seguinte resultado:

Lema 2.4.1 *Seja $q = (q_l)$ $1 \le l \le n$, um campo vetorial, com $q_l \in C^2(\overline{\Omega})$ para todo $l = 1.\cdots,n$. Então, para toda solução forte w do problema de fronteira adjunto* 2.11*, vale a* *identidade:*

$$\int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2} q\cdot\nu \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt = Im(w(t), q\cdot\nabla w(t))\Big|_0^T +$$
$$+\int_0^T \frac{1}{k^2} Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial^2 q_l}{\partial y_j \partial y_l} w\right) dt + \int_0^T \frac{2}{k^2} Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_j}\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt-$$
$$-\int_0^T Im\left(\frac{k'}{k} y_j \frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right) dt - \int_0^T 2Im\left(\frac{k'}{k} y_j \frac{\partial w}{\partial y_j}, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt- \tag{2.67}$$
$$-\int_0^T 2Im\left(\frac{nk'}{k} w, q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt - \int_0^T Im\left(f, \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right) dt-$$
$$-\int_0^T 2Im\left(f, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt.$$

Demonstração: Seja w uma solução forte como no Teorema 2.3. Multiplicando ambos os membros da equação $(2.11)_1$ por $q_l\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial y_l}$, integrando em Q e tomando o dobro da parte imaginária em ambos os lados da igualdade resultante, obtemos:

$$\int_0^T 2Im\left(w', q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt + \int_0^T \frac{2}{k^2} Re\left(-\Delta w, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt-$$
$$-\int_0^T 2Im\left(\frac{k'}{k} y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}, q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt - \int_0^T 2Im\left(\frac{nk'}{k} w, q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt = \tag{2.68}$$
$$= \int_0^T 2Im\left(f, q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt.$$

Temos que

$$\frac{d}{dt}\left(w, q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) = \left(w', q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) + \left(w, q_l\frac{\partial w'}{\partial y_l}\right). \tag{2.69}$$

Pelo Teorema 1.9, segue que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}[w q_l \overline{w'}] dy = \int_\Gamma \nu_l \cdot q_l w\overline{w'} d\Gamma = 0, \tag{2.70}$$

visto que $w = 0$ *sobre* Σ.

De (2.70), temos

$$0 = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}\left[w q_l\overline{w'}\right] dy = \int_\Omega \left[\frac{\partial w}{\partial y_l} q_l \overline{w'} + w\frac{\partial}{\partial y_l}(q_l\overline{w'})\right] dy =$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial y_l} q_l\overline{w'} + w\frac{\partial q_l}{\partial y_l}\overline{w'} + w q_l \frac{\partial \overline{w'}}{\partial y_l}\right) dy =$$
$$= \int_\Omega w q_l \frac{\partial\overline{w'}}{\partial y_l} dy + \int_\Omega q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\overline{w'} dy + \int_\Omega \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\overline{w'} dy,$$

ou seja,

$$\left(w, q_l \frac{\partial w'}{\partial y_l}\right) + \left(q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}, w'\right) + \left(\frac{\partial q_l}{\partial y_l} w, w'\right) = 0. \tag{2.71}$$

Integrando (2.71) de 0 a T, segue que:

$$\int_0^T \left(w, q_l \frac{\partial w'}{\partial y_l}\right) dt + \int_0^T \left(q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}, w'\right) dt + \int_0^T \left(\frac{\partial q_l}{\partial y_l} w, w'\right) dt = 0, \tag{2.72}$$

e por (2.69), resulta que

$$\left(w, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right)\Bigg|_0^T - \int_0^T \left(w', q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt + \int_0^T \left(q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}, w'\right) dt + \int_0^T \left(\frac{\partial q_l}{\partial y_l} w, w'\right) dt = 0,$$

isto é,

$$-\int_0^T \left(w', q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt + \int_0^T \left(q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}, w'\right) dt = -\left(w, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right)\Bigg|_0^T - \int_0^T \left(\frac{\partial q_l}{\partial y_l} w, w'\right) dt.$$

Mais precisamente, temos:

$$\int_0^T \left(w', q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt - \int_0^T \left(q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}, w'\right) dt = \left(w, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right)\Bigg|_0^T + \int_0^T \left(\frac{\partial q_l}{\partial y_l} w, w'\right) dt. \tag{2.73}$$

Como $z - \overline{z} = 2iIm(z)$, então de (2.73), vale

$$2iIm \int_0^T \left(w', q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt = \left(w, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right)\Bigg|_0^T + \int_0^T \left(\frac{\partial q_l}{\partial y_l} w, w'\right) dt,$$

ou seja,

$$2Im \int_0^T \left(w', q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt = -i\left(w, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right)\Bigg|_0^T - i\int_0^T \overline{\left(w', \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right)} dt. \tag{2.74}$$

Tomando a parte real em ambos os lados de (2.74) e observando que $Re(iz) = -Im(z)$ e $Re(-i\overline{z}) = Im(z)$, obtemos:

$$2Im \int_0^T \left(w', q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt = Im\left(w, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right)\Bigg|_0^T + \int_0^T Im\left(w', \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right) dt. \tag{2.75}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T Im\left(w', \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right) dt.$

Multiplicando ambos os lados de $(2.11)_1$ por $\dfrac{\partial q_l}{\partial y_l}\overline{w}$, integrando em Ω e tomando a parte imaginária de ambos os lados da igualdade resultante, segue

$$\begin{aligned} -Im\left(w', \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right) &= \frac{1}{k^2} Re\left(-\Delta w, \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right) - \\ -Im\left(\frac{k'}{k} y_j \frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right) &- Im\left(\frac{nk'}{k} w, \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right) - Im\left(f, \frac{\partial q_l}{\partial y_l} w\right). \end{aligned} \tag{2.76}$$

Notando que

$$\left|\left(\frac{nk'}{k}w, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}w\right)\right| \leq nC(T)\left|\left|\frac{\partial q_l}{\partial y_l}\right|\right|_{\infty}.|w|^2,$$

então

$$Im\left(\frac{nk'}{k}w, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}w\right) = 0. \tag{2.77}$$

Pelo Teorema 1.10, obtemos:

$$\frac{1}{k^2}Re\left(-\Delta w, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}w\right) = \frac{1}{k^2}Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial q_l}{\partial y_l}w\right]\right) + \frac{1}{k^2}\int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu}\frac{\partial \overline{q_l}}{\partial y_l}w d\Gamma. \tag{2.78}$$

Como $w = 0$ *sobre* Γ, então de (2.78), resulta que:

$$\frac{1}{k^2}Re\left(-\Delta w, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}w\right) = \frac{1}{k^2}Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial^2 q_l}{\partial y_j \partial y_l}w\right) + \frac{1}{k^2}Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) \tag{2.79}$$

Substituindo (2.76), (2.77), (2.79) em (2.75), obtemos

$$\begin{aligned}
&2Im\int_0^T \left(w', q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right)dt = Im\left(w, q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right)\Big|_0^T + \\
&+\int_0^T \frac{1}{k^2}Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial^2 q_l}{\partial y_j \partial y_l}w\right)dt + \int_0^T \frac{1}{k^2}Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right)dt - \\
&-\int_0^T Im\left(\frac{k'}{k}y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}w\right)dt - \int_0^T Im\left(f, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}w\right)dt.
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Observemos que (2.80) nos fornece o primeiro termo da identidade (2.67).

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T \frac{2}{k^2}Re\left(-\Delta w, q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right)dt.$

  Pelo Teorema 1.10, temos:

$$\begin{aligned}
\left(-\Delta w, q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) &= \left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\left[q_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right]\right) - \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \nu}q_l\frac{\partial \overline{w}}{\partial y_l}d\Gamma = \\
&= \left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_j}\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, q_l\frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w}{\partial y_j}\right]\right) - \int_\Gamma q_l\cdot\nu_l\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}^2\right|d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Agora, pelo Teorema 1.9, resulta que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w}{\partial y_j}q_l\frac{\partial \overline{w}}{\partial y_j}\right]dy = \int_\Gamma q_l\cdot\nu_l\frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y_j}d\Gamma. \tag{2.82}$$

Calculando as derivadas na primeira integral e notando que $\dfrac{\partial w}{\partial y_j} = \nu_j\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$, então de (2.82) vale que:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w}{\partial y_j}\right]q_l\frac{\partial \overline{w}}{\partial y_j}dy + \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_l}\left[q_l\frac{\partial \overline{w}}{\partial y_j}\right]dy = \int_\Gamma q_l\cdot\nu_l\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w}{\partial y_j}\right] q_l \frac{\partial \overline{w}}{\partial y_j} dy + \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial y_j} q_l \frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial \overline{w}}{\partial y_j}\right] dy + \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial y_j}\frac{\partial q_l}{\partial y_l}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y_j} dy =$$
$$= \int_\Gamma q_l \cdot \nu_l \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma,$$

isto é,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial w}{\partial y_l}, q_l \frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w}{\partial y_j}\right]\right) + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, q_l \frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w}{\partial y_j}\right]\right)} = \\ &= -\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) + \int_\Gamma q_l \cdot \nu_l \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Como $2Re(z) = z + \overline{z}$, então de (2.83) resulta que

$$2Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_l}, q_l \frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w}{\partial y_j}\right]\right) = -\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) + \int_\Gamma q_l \cdot \nu_l \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma. \tag{2.84}$$

De (2.81) e (2.84), segue que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{2}{k^2} Re\left(-\Delta w, q_l \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt = \int_0^T \frac{2}{k^2} Re\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt - \\ &\int_0^T \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_l}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) dt - \int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2} q_l \cdot \nu_l \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Substituindo (2.80) e (2.85) na identidade (2.68), obtemos (2.67). □

A próxima proposição nos dá a regularidade para $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$ sobre Σ, onde w é uma solução forte do problema de valor de fronteira (2.11). Mais precisamente, mostraremos que

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma),$$

a qual é chamada de *Regularidade Escondida*, visto que a mesma não provém das propriedades da solução fraca w dada pelo Teorema 2.2. Esta denominação foi introduzida por Lions [12], quando o autor estudou um problema misto associado à equação da onda semilinear.

Proposição 2.1 *(**Desigualdade Direta**). Se w é uma solução fraca do problema de valor de fronteira* (2.11), *então*

$$\int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \leq C\left[\|w^0\|^2 + \left(\int_0^T \|f(s)\| ds\right)^2\right], \tag{2.86}$$

onde C é uma constante positiva independente de w.

Demonstração: Se w é uma solução forte de (2.11), então w satisfaz a identidade do Lema 2.4.1. Se escolhemos o campo vetorial $q = (q_l)_{1\leq l\leq n}$ com $q \in [C^2(\overline{\Omega})]^n$, tal que $q = \nu$ sobre Γ, onde ν é o vetor normal unitário exterior sobre Γ, então $q \cdot \nu = 1$ sobre Γ e o lado esquerdo da identidade (2.67) reduz-se a:

$$\int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt.$$

O lado direito de (2.67), para $q = \nu$ é limitado por $C \max\limits_{0\leq t\leq T} \|w(t)\|^2$.

Com efeito, usando que $\left| \dfrac{\partial w}{\partial y_j} \right| \leq |\nabla w|$, $q_l \in C^2(\overline{\Omega})$ e as Desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, temos:

- $\left| Im(w(t), q \cdot \nabla w(t)) \Big|_0^T \right| = \left| Im(w(t), \nu \cdot \nabla w(t)) \Big|_0^T \right| \leq$

  $\leq 2 \max\limits_{0\leq t\leq T} |w(t)||\nu||\nabla w(t)| \leq \max\limits_{0\leq t\leq T} (|w(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2) \leq$

  $\leq C \max\limits_{0\leq t\leq T} \|w(t)\|.$

Agora,

- $\left| \displaystyle\int_o^T \frac{1}{k^2} Re \left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial^2 q_l}{\partial y_j \partial y_l} w \right) dt \right| \leq 2 \left\| \frac{\partial^2 q_l}{\partial y_j \partial y_l} \right\|_\infty C(T) \int_0^T \left| \frac{\partial w}{\partial y_j} \right| |w| dt \leq$

  $2C(T) \left\| \dfrac{\partial^2 q_l}{\partial y_j \partial y_l} \right\|_\infty \displaystyle\int_0^T |\nabla w| \, |w| dt \leq C(T) \left\| \frac{\partial^2 q_l}{\partial y_j \partial y_l} \right\|_\infty \int_0^T (|w|^2 + |\nabla w|^2) dt \leq$

  $\leq C \max\limits_{0\leq t\leq T} (|w(t)|^2 + |\nabla w(t)|^2) \leq C \max\limits_{0\leq t\leq T} \|w(t)\|.$

Também,

- $\left| \displaystyle\int_0^T \frac{2}{k^2} Re \left(\frac{\partial w}{\partial y_j}, \frac{\partial q_l}{\partial y_j} \frac{\partial w}{\partial y_l} \right) dt \right| \leq C(T) \left\| \frac{\partial q_l}{\partial y_j} \right\|_\infty \int_0^T |\nabla w(t)|^2 dt \leq$

  $\leq C \max\limits_{0\leq t\leq T} |\nabla w(t)| = C \max\limits_{0\leq t\leq T} \|w(t)\|.$

Analogamente, os outros termos do lado direito de (2.67) são dominados por $C \max\limits_{0\leq t\leq T} \|w(t)\|$. Assim, temos a desigualdade (2.86) para soluções fortes.

Como consequência disso e por (2.43), vale:

$$\int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \le \frac{C}{2}\max_{0\le t\le T}\|w(t)\|^2 \le \frac{C}{2}\left[\|w^0\|^2 + \int_0^T \|f(s)\|ds\right]^2 \le$$
$$\le \frac{C}{2}\left[\|w^0\|^2 + 2\|w^0\|\int_0^T \|f(s)\|ds + \left(\int_0^T \|f(s)\|ds\right)^2\right] \le$$
$$\le \frac{C}{2}\left[\|w^0\|^2 + \|w^0\|^2 + \left(\int_0^T \|f(s)\|ds\right)^2 + \left(\int_0^T \|f(s)\|ds\right)^2\right],$$

isto é,

$$\int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \le C\left[\|w^0\|^2 + \left(\int_0^T \|f(s)\|ds\right)^2\right],$$

e assim temos a desigualdade (2.86) para soluções fortes.

A próxima etapa é estender a desigualdade (2.86) para a solução fraca de (2.11). De fato, seja W o espaço vetorial de todas as soluções fracas w de (2.11). Notemos que w é uma solução correspondente de $\{w^0, f^0\} \in \{H_0^1(\Omega), L^1(0,T;H_0^1(\Omega))\}$. De (2.66), temos que $w \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$. Em W definimos a norma

$$\|w\|_W = \max_{0\le t\le T}\|w(t)\|, \tag{2.87}$$

que torna $(W, \|\cdot\|_W)$ um espaço de Banach.

Representemos por S o espaço vetorial de todas as soluções fortes de (2.11), e consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : S &\longrightarrow L^2(\Sigma) \\ w &\longmapsto \gamma(w) = \frac{1}{k}\frac{\partial w}{\partial \nu}. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Então,

$$|\gamma(w)|^2_{L^2(\Sigma)} = \int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \le C\max_{0\le t\le T}\|w(t)\|^2 = C\|w\|_W^2,$$

ou seja,

$$|\gamma(w)|_{L^2(\Sigma)} \le C\|w\|_W,$$

isto é, $\gamma : S \to L^2(\Sigma)$ é linear e contínuo. Pelo Teorema 2.3 temos que S é denso em W com respeito a norma (2.87), isto é, $W = \overline{S}$.

Portanto, podemos estender γ, por continuidade, ao fecho W de S. Sem perda de generalidade, representemos por γ essa extensão contínua. Então, existe uma sequência

$w_m \in S$ tal que

$$w_m \longrightarrow w \quad em \quad C^0([0,T];H_0^1(\Omega)).$$

Definamos

$$\gamma(w) = \lim_{m\to\infty} \gamma(w_m) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{k}\frac{\partial w_m}{\partial \nu}, \tag{2.89}$$

que pertence a $L^2(\Sigma)$. Representemos esse limite por $\dfrac{1}{k}\dfrac{\partial w}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$. Portanto, se w é a solução fraca correspondente aos dados iniciais w^0, f e w_m é a solução forte correspondente a w_m^0, f_m aproximações de w^0, f, como na prova do Teorema 2.3, temos:

$$|\gamma(w_m)|_{L^2(\Sigma)} \leq C\|w_m\|_W = C\max_{0\leq t\leq T}\|w_m(t)\| \leq C\left[\|w_m(0)\| + \int_0^T \|f_m(s)\|ds\right],$$

ou seja,

$$|\gamma(w_m)|_{L^2(\Sigma)} \leq C\left[\|w_m(0)\| + \int_0^T \|f_m(s)\|ds\right]. \tag{2.90}$$

Ao limite com $m \longrightarrow \infty$, então de (2.89) e (2.90), obtemos

$$|\gamma(w)|_{L^2(\Sigma)} \leq C\left[\|w^0\| + \int_0^T \|f(s)\|ds\right],$$

ou seja,

$$|\gamma(w)|^2_{L^2(\Sigma)} \leq C\left[\|w^0\| + \int_0^T \|f(s)\|ds\right]^2,$$

isto é,

$$\int_0^T\int_\Gamma \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \leq C\left[\|w^0\|^2 + \left(\int_0^T \|f(s)\|ds\right)\right]. \tag{2.91}$$

□

Observação 2.4 *Para o caso* $f \equiv 0$, *então de* (2.91), *resulta que:*

$$\int_0^T\int_\Gamma \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \leq C\|w^0\|^2. \tag{2.92}$$

A próxima desigualdade é verdadeira sobre uma parte $\Gamma(y^0)$. De fato, conforme visto, seja $y^0 \in \mathbb{R}^n$, $m(y) = y - y^0$ e consideremos a seguinte decomposição de Γ:

$$\Gamma(y^0) = \{y \in \Gamma;\ m(y)\cdot\nu(y) \geq 0\};\ \ \Gamma_*(y^0) = \{y \in \Gamma;\ m(y)\cdot\nu(y) \leq 0\}.$$

Definamos também

$$\Sigma(y^0) = \Gamma(y^0)\times]0,T[\ ;\ \ \Sigma_*(y^0) = \Gamma_*(y^0)\times]0,T[.$$

Proposição 2.2 *(**Desigualdade Inversa**). Se w é uma solução fraca do problema de valor de fronteira* (2.11) *com $f = 0$, então vale*

$$C_0\|w^0\|^2 \leq \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt, \tag{2.93}$$

onde a constante C_0 independe de w e depende somente de T, $\|y^0\|$ e M.

Demonstração: Seja w a solução fraca de (2.11) correspondente a $w^0 \in H_0^1(\Omega)$. Segue de (2.67), para $q_l = y_l - y_l^0$, $1 \leq l \leq n$ e $f = 0$, que:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Gamma m(y)\cdot\nu\frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt &= Im(w(t), m(y)\cdot\nabla w)\Big|_0^T - \\ &- \int_0^T Im\left(\frac{k'}{k}y_l\frac{\partial w}{\partial y_l}, nw\right)dt + 2\int_0^T \frac{1}{k^2}\|w\|^2 dt - \\ &- \int_0^T 2Im\left(\frac{k'}{k}y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}, [y_l - y_l^0]\frac{\partial w}{\partial y_l}\right)dt - \\ &- \int_0^T 2Im\left(\frac{nk'}{k}w, [y_l - y_l^0]\frac{\partial w}{\partial y_l}\right)dt.\end{aligned} \tag{2.94}$$

Seja

$$H(t) = -Im\left(\frac{k'}{k}y_l\frac{\partial w}{\partial y_l}, nw\right) - 2Im\left(\frac{k'}{k}y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}, [y_l - y_l^0]\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) -$$
$$-2Im\left(\frac{nk'}{k}w, [y_l - y_l^0]\frac{\partial w}{\partial y_l}\right).$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned}H(t) = -Im\left(\frac{nk'}{k}y_l\frac{\partial w}{\partial y_l}, w\right) + 2Im\left(\frac{k'}{k}y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}, y_l^0\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) - \\ -2Im\left(\frac{nk'}{k}w, y_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) + 2Im\left(\frac{nk'}{k}w, y_l^0\frac{\partial w}{\partial y_l}\right).\end{aligned} \tag{2.95}$$

Observemos que se $z \in \mathbb{C}$, então

$$-2Im(\overline{z}) - Im(z) = Im(z),$$

e portanto,

$$-2Im\left(w, \frac{nk'}{k}y_l\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) - Im\left(\frac{nk'}{k}y_l\frac{\partial w}{\partial y_l}, w\right) = Im\left(\frac{nk'}{k}y_l\frac{\partial w}{\partial y_l}, w\right). \tag{2.96}$$

Substituindo (2.96) em (2.95), obtemos:

$$H(t) = Im\left(\frac{nk'}{k}y_l\frac{\partial w}{\partial y_l}, w\right) + 2Im\left(\frac{k'}{k}y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}, y_l^0\frac{\partial w}{\partial y_l}\right) + 2Im\left(w, \frac{nk'}{k}y_l^0\frac{\partial w}{\partial y_l}\right). \tag{2.97}$$

Substituindo (2.97) em (2.94), temos:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Gamma m(y)\cdot\nu \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt = Im(w(t), m(y)\cdot\nabla w)\Big|_0^T +\\
&+2\int_0^T \frac{1}{k^2}\|w\|^2 dt + \int_0^T Im\left(\frac{k'}{k} y_l \frac{\partial w}{\partial y_l}, nw\right) dt +\\
&+2\int_0^T Im\left(\frac{k'}{k} y_j \frac{\partial w}{\partial y_j}, y_l^0 \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt + 2\int_0^T Im\left(nw, \frac{k'}{k} y_l^0 \frac{\partial w}{\partial y_l}\right) dt.
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

Agora mostraremos a desigualdade inversa (2.93) em duas etapas.

- **Etapa 1 -** Provaremos, nessa etapa, que a solução de (2.11) satisfaz:

$$
C_1|w^0|^2 + \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \geq C_2\|w^0\|^2. \tag{2.99}
$$

Com efeito, analisaremos os termos que aparecem do lado direito da equação (2.98).

- Análise do termo $2\displaystyle\int_0^T \frac{1}{k^2}\|w(t)\|^2 dt$.

  De (2.39), com $f = 0$, segue que:

$$
\begin{aligned}
&\|w(t)\|^2 = \left[\frac{k(t)}{k(0)}\right]^n \|w^0\|^2 + \left[\frac{k(t)}{k(0)}\right]^n k'(0)k(0) Im(w^0, y\cdot\nabla w^0) -\\
&-kk' Im(w, y\cdot\nabla w) + k^n(t)\int_0^t \left[\frac{k''(s)k(s) + k'^2(s)}{k^n(s)}\right] Im(w(s), y\cdot\nabla w(s)) ds.
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

Multiplicando ambos os lados de (2.100) por $\dfrac{2}{k^2}$ e integrando em $(0, T)$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^T \frac{1}{k^2}\|w(t)\|^2 dt = 2\int_0^T \frac{k^{n-2}(t)}{k^n(0)}\|w^0\|^2 dt +\\
&+2\int_0^T \frac{k^{n-2}(t)}{k^n(0)} k'(0)k(0) Im(w^0, y\cdot\nabla w^0) dt -\\
&-2\int_0^T \frac{k'}{k} Im(w, y\cdot\nabla w^0) dt +\\
&+2\int_0^T \left\{k^{n-2}(t)\int_0^t \left[\frac{k''(s)k(s) + k'^2(s)}{k^n(s)}\right] Im(w(s), y\cdot\nabla w(s)) ds\right\} dt.
\end{aligned}
\tag{2.101}
$$

Usando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young com ε, vale:

- $-2\displaystyle\int_0^T \frac{k^{n-2}(t)}{k^n(0)}k'(0)k(0)Im(w^0, y\cdot\nabla w^0)dt \le 2C(T)M|w^0|\|w^0\| \le$

  $\le \dfrac{1}{\varepsilon}C^2(T)M^2|w^0|^2 + \varepsilon\|w^0\|^2.$

- $2\displaystyle\int_0^T \frac{k'}{k}Im(w, y\cdot\nabla w)dt \le C(T)M|w(t)|\|w(t)\| \le C(T)M|w^0|\|w^0\| \le$

  $\le \dfrac{1}{\varepsilon}C^2(T)M^2|w^0|^2 + \varepsilon\|w^0\|^2.$

- $-2\displaystyle\int_0^T \left\{k^{n-2}(t)\int_0^t \left[\frac{k''(s)k(s)+k'^2(s)}{k^n(s)}\right] Im(w(s), y\cdot\nabla w(s))ds\right\} dt \le$

  $\le C(T)M|w^0|\|w^0\| \le \dfrac{1}{\varepsilon}C^2(T)M^2|w^0|^2 + \varepsilon\|w^0\|^2,$

onde $C(T)$ representa diferentes constantes.

Usando as desigualdades acima, resulta que:

$$\begin{aligned} 2\int_0^T \|w(t)\|^2 dt \ge \int_0^T \frac{2k^{n-2}(t)}{k^n(0)}\|w^0\|^2 dt - \\ -\frac{C(T)}{\varepsilon}|w^0|^2 - 3\varepsilon\|w^0\|^2. \end{aligned} \tag{2.102}$$

- Análise do termo $2\displaystyle\int_0^T Im\left(\frac{k'}{k}y\cdot\nabla w, y^0\cdot\nabla w\right)dt.$

Temos:

$$\begin{aligned} -2\int_0^T Im\left(\frac{k'(t)}{k(t)}y\cdot\nabla w, y^0\cdot\nabla w\right)dt \le \int_0^T \frac{2|k'(t)|}{k(t)}M\|y^0\|\|w(t)\|^2 dt = \\ = 2M\|y^0\|\int_0^T \frac{|k'(t)|}{k(t)}\|w(t)\|^2 dt. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Para modificarmos a integral do lado direito de (2.103), multiplicaremos ambos os lados de (2.100) por $\dfrac{k'(t)}{k(t)}$ e integramos em $(0,T)$ para em seguida obtermos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{|k'(t)|}{k(t)}\|w(t)\|^2 dt \le \int_0^T \frac{|k'(t)|k^{n-1}(t)}{k^n(0)}\|w^0\|^2 dt + \\ + \int_0^T \frac{|k'(t)|k^{n-1}(t)}{k^n(0)}|k'(0)|k(0)M|w^0|\|w^0\|dt + \\ + \int_0^T |k'(t)|^2 M|w(t)|\|w(t)\|dt + \\ + \int_0^T \left\{k^{n-1}(t)|k'(t)|\int_0^t \left[\frac{|k''(s)k(s)|+k'^2(s)}{k^n(s)}\right] M|w(s)|\|w(s)\|ds\right\} dt. \end{aligned} \tag{2.104}$$

De (2.104), obtemos:

$$\int_0^T \frac{|k'(t)|}{k(t)}\|w(t)\|^2 dt \leq \int_0^T |k'(t)|\frac{k^{n-1}(t)}{k^n(0)}\|w^0\|^2 dt + \frac{1}{\varepsilon}MC(T)|w^0|^2 + \varepsilon\|w^0\|^2. \quad (2.105)$$

De (2.103) e (2.105), resulta que

$$\begin{aligned} &-\int_0^T Im\left(\frac{k'(t)}{k(t)}y\cdot\nabla w, y^0\cdot\nabla w\right)dt \leq \\ &\leq 2M\|y^0\|\int_0^T |k'(t)|\frac{k^{n-1}(t)}{k^n(0)}\|w^0\|^2 dt + \\ &+\frac{1}{\varepsilon}2M\|y^0\|C(T)|w^0|^2 + 2M\|y^0\|\varepsilon\|w^0\|^2, \end{aligned} \quad (2.106)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\int_0^T Im\left(\frac{k'(t)}{k(t)}y\cdot\nabla w, y^0\cdot\nabla w\right)dt \geq \\ &\geq -2M\|y^0\|\int_0^T |k'(t)|\frac{k^{n-1}(t)}{k^n(0)}\|w^0\|^2 dt - \\ &-\frac{1}{\varepsilon}2M\|y^0\|C(T)|w^0|^2 - 2M\|y^0\|\varepsilon\|w^0\|^2. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Observação 2.5 *Temos que:*

$$Im(w(t), m(y)\cdot\nabla w(t))\Big|_0^T = Im(w(T), m(y)\nabla w(T)) - Im(w^0, m(y)\cdot\nabla w^0),$$

obtendo termos do tipo $\frac{1}{\varepsilon}|w^0|^2$ *e* $\varepsilon\|w^0\|^2$.

Os outros termos em (2.98), a saber,

$$\int_0^T Im\left(\frac{nk'}{k}y\cdot\nabla w(t), w(t)\right)dt \quad e \quad \int_0^T Im\left(nw(t), \frac{k'(t)}{k(t)}y^0\cdot\nabla w(t)\right)dt,$$

podem ser dominados por uma combinação linear de coeficientes do tipo $\frac{1}{\varepsilon}|w^0|^2$ *e* $\varepsilon\|w^0\|^2$.

De (2.102), (2.107) e da Observação 2.5, modificamos (2.98) obtendo:

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_\Gamma \frac{1}{k^2(t)}m(y)\cdot\nu\left|\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt \geq \\ &\geq \frac{1}{k^n(0)}\left\{\int_0^T [2k^{n-2}(t) - 2M\|y^0\|\,|k'(t)k^{n-1}(t)|]dt\right\}\|w^0\|^2 - \\ &-\frac{C(T)}{\varepsilon}|w^0|^2 - C(T)\varepsilon\|w^0\|^2. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Escolhamos $k(t)$ de modo que a integral do lado direito de (2.108) seja positiva. Para isso, devemos ter que:

$$2k^{n-2}(t) - 2M\|y^0\|\,|k'(t)k^{n-1}(t)| > 0 \tag{2.109}$$

para todo $0 \leq t \leq T$, pelas hipóteses $(H1)$ e $(H2)$.

Façamos

$$\chi(t) = \frac{1}{k^n(0)}[2k^{n-2}(t) - 2M\|y^0\|\,|k'(t)k^{n-1}(t)|].$$

Então, de (2.109), temos que:

$$\chi(t) > 0 \ \text{ sobre } \ [0,T].$$

Para cada $\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{C(T)}\int_0^T \chi(t)dt, \tag{2.110}$$

obtemos de (2.108) que

$$\int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2(t)}\, m(y)\cdot\nu \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \geq \left[\int_0^T \chi(t)dt - C(T)\varepsilon\right] \|w^0\|^2 - \frac{C(T)}{\varepsilon}|w^0|^2. \tag{2.111}$$

De (2.111), segue que existem constantes positivas C_1 e C_2 dependendo de T, $\|y^0\|$ e M, tal que:

$$C_1|w^0|^2 + \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2(t)} \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \geq C_2\|w^0\|^2.$$

- **Etapa 2 -** Provaremos, nesta etapa, que se w é uma solução fraca de (2.11) então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C|w^0| \leq \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{2.112}$$

Com efeito, suponhamos por contradição que (2.112) seja falsa. Considerando $w^0 \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de soluções fortes de (2.11), $w_n(0) = w_n^0$ tal que

$$\int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \left|\frac{\partial w_n}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt < \frac{1}{n}|w_n^0|, \tag{2.113}$$

onde podemos supor que $|w_n^0| = 1$. Então, de (2.113) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \left|\frac{\partial w_n}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt = 0, \tag{2.114}$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial w_n}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \longrightarrow 0. \tag{2.115}$$

Da Etapa 1, provamos que:

$$C_1 |w_n^0|^2 + \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \geq C_2 \|w_n^0\|^2. \tag{2.116}$$

O lado esquerdo de (2.116) é limitado, e assim temos que $(w_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega) \overset{C}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, então podemos extrair uma subsequência, que também denotaremos por $(w_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$w_n^0 \longrightarrow w^0 \quad em \quad L^2(\Omega). \tag{2.117}$$

Como $|w_n^0| = 1$, segue de (2.117) que

$$|w^0| = 1. \tag{2.118}$$

Por (2.25), com $f = 0$, temos:

$$\|w_m - w_n\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} = \max_{0\leq t\leq T} |w_m(t) - w_n(t)| \leq C(T)|w_m^0 - w_n^0|,$$

implicando que

$$w_n \longrightarrow w \quad em \quad C^0([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{2.119}$$

Integrando por partes para $\xi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, $\xi' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$, $\xi(0) = \xi(T) = 0$ e notando que w_n é uma sequência de soluções fortes de (2.11) com $f = 0$, resulta que:

$$\int_Q w_n \left[-\overline{\xi}' + \frac{i}{k^2} \Delta \overline{\xi} + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla \overline{\xi} \right] dydt = \int_Q \overline{\xi} \left[w_n' - \frac{i}{k^2} \Delta w_n - \frac{k'}{k} y \cdot \nabla w_n - \frac{nk'}{k} w_n \right] dydt = 0,$$

ou seja,

$$\int_Q w_n \left[-\overline{\xi}' + \frac{i}{k^2} \Delta \overline{\xi} + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla \overline{\xi} \right] dydt = 0. \tag{2.120}$$

Ao limite, com $n \longrightarrow \infty$ em (2.120), vale que

$$\left| \begin{aligned} & \int_Q w \left[-\overline{\xi}' + \frac{i}{k^2} \Delta \overline{\xi} + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla \overline{\xi} \right] dydt = 0, \\ & w(0) = w^0. \end{aligned} \right. \tag{2.121}$$

Agora, transformamos (2.121) para o domínio não cilíndrico $\widehat{Q}$ pela aplicação $y = \dfrac{x}{k(t)}$, $(x,t) \in \widehat{Q}$ *e* $(y,t) \in Q$. Com efeito, consideremos a função

$$\begin{aligned} \theta : \widehat{Q} &\longrightarrow Q \\ (x,t) &\longmapsto \theta(x,t) = k^{-n}(t)\, w\left(\frac{x}{k(t)}, t\right), \end{aligned}$$

onde w é solução fraca de (2.11). Como $w \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$, então $\theta \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$.

Consideremos $\widehat{G}$ um subconjunto limitado convexo de $\mathbb{R}^n$ tal que seu fecho contenha $\widehat{Q}$ e $\widehat{\Sigma}(y^0)$. Sejam $\widehat{\mathcal{O}} = \widehat{G} \cap \widehat{Q}$, que é não vazio, e uma função $\widetilde{\theta}(x,t)$ tal que

$$\widetilde{\theta}(x,t) = \begin{cases} \theta(x,t) \ \text{ em } \ \widehat{Q}, \\ \\ 0, \ \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Integrando por partes, temos que

$$\widetilde{\theta}' - i\Delta\widetilde{\theta} = 0 \ \text{ no sentido de } \ D'(\widehat{G}).$$

Por definição, temos que $\widetilde{\theta} = 0$ em $\widehat{G} \cap \widehat{Q}^C \subset \widehat{G}$. Pelo Teorema 1.19, segue que $\widetilde{\theta} = 0$ em $\widehat{G}$, e portanto,

$$\theta(x,t) = \widetilde{\theta}(x,t) = 0 \ \ em \ \ \widehat{Q},$$

ou seja,

$$\theta(x,t) = 0 \ \ em \ \ \widehat{Q}. \tag{2.122}$$

Para $t = 0$ em (2.122) e usando a definição de θ, temos:

$$0 = \theta(x,0) = k^{-n}(0)\, w\left(\frac{x}{k(0)}, 0\right) = k^{-n}(0) w(y,0),$$

ou seja, em Ω_0 temos:

$$k^{-n}(0) w(y,0) = 0. \tag{2.123}$$

Como $k(0) > 0$, então de (2.123), segue que:

$$w(y,0) = 0,$$

isto é,

$$w^0 = 0,$$

o que é um absurdo, visto que $|w^0| = 1$. $\square$

2.5 Solução Ultra Fraca

O objetivo desta seção é estudarmos a existência, unicidade e regularidade para o seguinte problema de valor na fronteira não homogêneo

$$\left| \begin{array}{l} w' - \dfrac{i}{k^2}\Delta w - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla w = 0 \text{ em } Q, \\ \\ w = v \text{ sobre } \Sigma, \\ \\ w(0) = w^0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.124}$$

com o dado w^0 menos regular que o considerado na Seção 2.1. Por essa razão, a solução de (2.124) será chamada solução ultra fraca. Inicialmente, definiremos o conceito de solução para (2.124) por meio do Método da Transposição (Ver[12]). Devido ao método utilizado, a solução de (2.124) também é conhecida por Solução por Transposição.

Suponhamos que $v \in L^2(\Sigma)$, $w^0 \in H^{-1}(\Omega)$ e consideremos uma função $\theta = \theta(y,t)$ tal que $\theta = 0$ sobre Σ e $\theta(T) = \theta(y,T) = 0$, para $y \in \Omega$. Multiplicando ambos os lados de $(2.124)_1$ por $\overline{\theta}$ e integrando em Q, obtemos:

$$\int_0^T \int_\Omega \left[w' - \frac{i}{k^2}\Delta w - \frac{k'}{k} y \cdot \nabla w \right] \overline{\theta} dy dt = 0. \tag{2.125}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T \int_\Omega w'\overline{\theta} dy dt.$

Notemos que

$$\int_0^T \overline{\theta} w' dt = \overline{\theta} w \Big|_0^T - \int_0^T \overline{\theta}' w dt = \overline{\theta}(T) w(T) - \overline{\theta}(0) w(0) - \int_0^T w \overline{\theta}' dt. \tag{2.126}$$

Integrando (2.126) em Ω, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega w'\overline{\theta} dy dt = \int_\Omega w(T)\overline{\theta}(T) dy - \int_\Omega w(0)\overline{\theta}(0) dy - \int_0^T \int_\Omega w\overline{\theta}' dy dt =$$
$$= (w(T), \theta(T)) - (w(0), \theta(0)) - \int_0^T \int_\Omega w\overline{\theta}' dy dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega w'\overline{\theta} dy dt = -(w(0), \theta(0)) - \int_0^T \int_\Omega w\overline{\theta}' dy dt. \tag{2.127}$$

- Análise do termo $-\int_0^T\int_\Omega \frac{i}{k^2}\Delta w\overline{\theta}dydt$.

Pelo Teorema 1.10, temos:

$$-\int_\Omega \Delta w\overline{\theta}dy = \int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\overline{\theta}dy - \int_\Gamma \overline{\theta}\frac{\partial w}{\partial\nu}d\Gamma. \tag{2.128}$$

Usando novamente o Teorema 1.10, obtemos:

$$\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\overline{\theta}dy = -\int_\Omega w\Delta\overline{\theta}dy + \int_\Gamma w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}d\Gamma. \tag{2.129}$$

Substituindo (2.129) em (2.128), segue que

$$-\int_\Omega \Delta w\overline{\theta}dy = -\int_\Omega w\Delta\overline{\theta}dy + \int_\Gamma w\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}d\Gamma - \int_\Gamma \overline{\theta}\frac{\partial w}{\partial\nu}d\Gamma. \tag{2.130}$$

Multiplicando ambos os membros de (2.130) por $\frac{i}{k^2}$, integrando em $(0,T)$, notando que $\theta = 0$ sobre Σ e $w = v$ sobre Σ, resulta que:

$$-\int_0^T\int_\Omega \frac{i}{k^2}\Delta w\cdot\overline{\theta}dydt = -\int_0^T\int_\Omega \frac{i}{k^2}w\cdot\Delta\overline{\theta}dydt + \int_0^T\int_\Gamma \frac{i}{k^2}v\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}d\Gamma dt. \tag{2.131}$$

- Análise do termo $-\int_0^T\int_\Omega \frac{k'}{k}y\cdot\nabla w\overline{\theta}dydt$.

Pelo Teorema 1.9, temos:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}[y_j w\overline{\theta}]dy = \int_\Gamma \nu_j\cdot y_j w\overline{\theta}d\Gamma = 0, \tag{2.132}$$

visto que $\theta = 0$ sobre Σ.

Segue de (2.132) que

$$\int_\Omega nw\overline{\theta}dy + \int_\Omega y_j\frac{\partial w}{\partial y_j}\overline{\theta}dy + \int_\Omega wy_j\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y_j}dy = 0. \tag{2.133}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.133) por $\frac{k'}{k}$, integrando em $(0,T)$ e notando que $y_j\frac{\partial w}{\partial y_j} = y\cdot\nabla w$, resulta que

$$\int_0^T\int_\Omega nw\frac{k'}{k}\overline{\theta}dydt + \int_0^T\int_\Omega \frac{k'}{k}y\cdot\nabla w\overline{\theta}dydt + \int_0^T\int_\Omega w\frac{k'}{k}y\cdot\nabla\overline{\theta}dydt = 0,$$

ou seja,

$$-\int_0^T\int_\Omega \frac{k'}{k} y\cdot\nabla w\overline{\theta}dydt = \int_0^T\int_\Omega nw\frac{k'}{k}\overline{\theta}dydt + \int_0^T\int_\Omega w\frac{k'}{k}y\cdot\nabla\overline{\theta}dydt. \tag{2.134}$$

Substituindo (2.127), (2.131) e (2.134) em (2.125), obtemos:

$$\begin{aligned}&-(w^0,\theta(0)) + \int_Q w[-\overline{\theta'}]dydt + \int_Q w\left[-\frac{i}{k^2}\Delta\overline{\theta}\right]dydt+\\ &+\int_\Sigma w\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}d\Gamma dt + \int_Q w\left[\frac{k'}{k}y\cdot\nabla\overline{\theta}\right]dydt + \int_Q wn\frac{nk'}{k}\overline{\theta}dydt = 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$-(w^0,\theta(0)) + \int_\Sigma w\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}d\Gamma dt + \int_Q w\left[-\overline{\theta'} - \frac{i}{k^2}\Delta\overline{\theta} + \frac{k'}{k}y\cdot\nabla\overline{\theta} + \frac{nk'}{k}\overline{\theta}\right]dydt = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}&-\int_Q w\left[\overline{\theta' - \frac{i}{k^2}\Delta\theta - \frac{k'}{k}y\cdot\nabla\theta - \frac{nk'}{k}\theta}\right]dydt =\\ &= (w^0,\theta(0)) - \int_\Sigma v\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}d\Gamma dt.\end{aligned} \tag{2.135}$$

Agora, formularemos o conceito de solução ultra fraca para o problema (2.124). Dada $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, seja θ a solução fraca do seguinte problema retrógrado

$$\left|\begin{array}{l}\theta' - \dfrac{i}{k^2}\Delta\theta - \dfrac{k'}{k}y\cdot\nabla\theta - \dfrac{nk'}{k}\theta = -f \quad \text{em} \quad Q,\\[2ex] \theta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma,\\[2ex] \theta(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.\end{array}\right. \tag{2.136}$$

Em (2.136) consideremos a mudança de $T-t$ por t. Mais precisamente, definindo

$$\left|\begin{array}{l}\widehat{\theta}(y,t) = \theta(y,T-t),\\[2ex] \widehat{k}(t) = k(T-t),\\[2ex] \widehat{f}(t) = f(T-t),\end{array}\right. \tag{2.137}$$

obtemos

$$\left|\begin{array}{l}\widehat{\theta}'(y,t) = -\theta'(y,T-t),\\[2ex] \widehat{k}'(t) = -k'(T-t).\end{array}\right. \tag{2.138}$$

De (2.137) e (2.138), então $(2.136)_1$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$-\widehat{\theta}' - \frac{i}{\widehat{k}^2}\Delta\widehat{\theta} + \frac{\widehat{k}'}{\widehat{k}} y \cdot \nabla\widehat{\theta} + \frac{n\widehat{k}'}{\widehat{k}}\widehat{\theta} = -\widehat{f},$$

ou seja,

$$\widehat{\theta}' + \frac{i}{\widehat{k}^2}\Delta\widehat{\theta} - \frac{\widehat{k}'}{\widehat{k}} y \cdot \nabla\widehat{\theta} - \frac{n\widehat{k}'}{\widehat{k}}\widehat{\theta} = \widehat{f},$$

isto é,

$$\overline{\widehat{\theta}'} - \frac{i}{\widehat{k}^2}\Delta\overline{\widehat{\theta}} - \frac{\widehat{k}'}{\widehat{k}} y \cdot \nabla\overline{\widehat{\theta}} - \frac{n\widehat{k}'}{\widehat{k}}\overline{\widehat{\theta}} = \overline{\widehat{f}}$$

Portanto, de (2.136), obtemos o problema equivalente:

$$\left|\begin{array}{l} \overline{\widehat{\theta}'} - \dfrac{i}{\widehat{k}^2}\Delta\overline{\widehat{\theta}} - \dfrac{\widehat{k}'}{\widehat{k}} y \cdot \nabla\overline{\widehat{\theta}} - \dfrac{n\widehat{k}'}{\widehat{k}}\overline{\widehat{\theta}} = \overline{\widehat{f}} \ \text{ em } \ Q, \\ \overline{\widehat{\theta}} = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\ \overline{\widehat{\theta}}(0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array}\right. \tag{2.139}$$

Pelo Teorema 2.2, o sistema (2.139) possui uma única solução $\overline{\widehat{\theta}}$. Notemos que $\overline{\widehat{\theta}(y,t)} = \overline{\theta(y, T-t)}$. Então, a solução fraca $\theta(y,t) = \theta$ de (2.136) com $f \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$ é tal que

- $\theta(0) \in H_0^1(\Omega)$,
- $\|\theta\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}$, pela estimativa (2.43),
- $\left(\displaystyle\int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}$, pela Proposição 2.1.

Com estas considerações, podemos reescrever (2.135) como sendo:

$$\int_Q w\overline{f} dydt = \langle w^0, \theta(0)\rangle - \int_\Sigma v\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}d\Gamma dt,$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa a dualidade entre os espaços $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Consideremos a aplicação

$$S : L^1(0,T; H_0^1(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f \longmapsto \langle S, f\rangle = \langle w^0, \theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \int_\Sigma v\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}d\Gamma dt$$

onde θ é a solução fraca do problema transposto (2.136). Notemos que S é linear. Além disso, usando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, obtemos:

$$|\langle S,f\rangle| \leq \|w^0\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\theta(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Sigma |v|\frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}\right| d\Gamma dt \leq$$

$$\leq \|w^0\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\theta(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left(\int_\Sigma |v|^{\frac{1}{2}} d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Sigma \frac{1}{k^4}\left|\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \|w^0\|_{H^{-1}(\Omega)}\max_{0\leq t\leq T}\|\theta(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)} \left(\int_\Sigma \frac{1}{k^2}\frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \|w^0\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\theta\|_{l^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + C(T)\|v\|_{L^2(\Sigma)} \left(\int_\Sigma \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}\|w^0\|_{H^{-1}(\Omega)} + C\|v\|_{L^2(\Sigma)}\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} =$$

$$= C(\|w^0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)})\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

ou seja,

$$|\langle S,f\rangle| \leq C(\|w^0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)})\|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \tag{2.140}$$

Portanto, $S : L^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \longrightarrow \mathbb{C}$ é um operador contínuo. Dessa forma, $S \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cong [L^1(0,T;H_0^1(\Omega))]'$. Pelo Teorema 1.11, existe uma única função $w \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que para cada $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos a representação da forma:

$$\langle S,f\rangle = \int_0^T \langle w(t),f(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt.$$

Isso nos motiva a formularmos a seguinte definição:

Definição 2.1 (Solução Ultra Fraca) *Para $w^0 \in H^{-1}(\Omega)$ e $v \in L^2(\Sigma)$, a solução ultra fraca do problema* (2.124) *é a única função $w \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que*

$$\int_0^T \langle w(t),f(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt = \langle w^0,\theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \int_\Sigma v\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu} d\Gamma dt,$$

para toda $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, onde θ é a solução fraca de (2.136).

Teorema 2.4 (Existência e Unicidade) *Dados $w^0 \in H^{-1}(\Omega)$ e $v \in L^2(\Sigma)$, existe exatamente uma solução ultra fraca $w \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ do problema de valor de fonteira não homogêneo* (2.124).

Demonstração:

Com efeito, como $S \in [L^1(0,T;H_0^1(\Omega))]'$ então, pelo Teorema 1.11, existe uma única função $w \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$\langle S, f\rangle = \int_0^T \langle w(t), f(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt,$$

para toda $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Portanto, a existência da solução ultra fraca é assegurada. Para a unicidade, suponhamos que w e $\widehat{w}$ sejam soluções ultra fracas de (2.124). Por definição de solução ultra fraca, temos

$$\langle w - \widehat{w}, f\rangle_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))\times L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} = 0.$$

Pelo Teorema 1.18, temos:

$$\|w - \widehat{w}\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} = \sup_{\substack{f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \|f\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq 1}} |\langle w - \widehat{w}, f\rangle| = 0,$$

ou seja, $w = \widehat{w}$, q.s.. $\square$

Como temos visto acima, se w é uma solução ultra fraca de (2.124), então $w \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Nosso objetivo agora é provarmos que $w \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$. A prova do resultado dessa regularidade depende da regularidade do problema misto

$$\left|\begin{array}{l} w' - \dfrac{i}{k^2}\Delta w - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla w = f \ \text{ em } \ Q, \\[2ex] w = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\[2ex] w(0) = w^0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array}\right. \tag{2.141}$$

Definição 2.2 *Sejam $w^0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Dizemos que $w \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ é solução de* (2.141) *no sentido das distribuições sobre Q quando*

$$-\int_Q w \left[\phi' - \frac{i}{k^2}\Delta\phi - \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\phi - \frac{nk'}{k}\phi\right] dydt = \int_Q f\phi \, dydt,$$

para toda $\phi \in D(\Omega)$.

Proposição 2.3 *O problema misto* (2.141) *tem solução no sentido das distribuições sobre Q.*

Demonstração: Com efeito, dados $\{w^0, f\} \in \{L^2(\Omega), L^2(0,T; L^2(\Omega))\}$, existem sequências $(w_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, respectivamente, tais que

$$w_n^0 \longrightarrow w^0 \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

e

$$f_n \longrightarrow f \text{ em } L^2(0,T; L^2(\Omega).$$

Tomando w_n^0, f_n como dados de (2.124), então como visto na Seção 2.1, o problema (2.124) possui única solução fraca w_n, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ e, além disso, vale:

$$|w_m(t) - w_n(t)| \leq C \left[|w_m^0 - w_n^0| + \int_0^T |f_m(t) - f_n(t)| dt \right],$$

para todo $t \in [0,T]$. Portanto, temos que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ e, como $C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ é um espaço de Banach, existe $w \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ tal que

$$w_n \longrightarrow w \text{ em } C^0([0,T]; L^2(\Omega)),$$

donde

$$w_n \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ em } C^0([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{2.142}$$

Nosso objetivo agora é mostrarmos que w é solução de (2.124) no sentido da distribuição conforme Definição 2.2 acima.

Como $C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty([0,T]; L^2(\Omega))$,em particular, de (2.142), segue que

$$w_n \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ em } L^\infty([0,T]; L^2(\Omega)),$$

e portanto, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q w_n v \, dydt = \int_Q wv \, dydt, \tag{2.143}$$

para todo $v \in L^1([0,T]; L^2(\Omega))$.

Sabemos que w_n é solução fraca de (2.124). Então,

$$\int_\Omega w_n' \phi \, dy - \int_\Omega \frac{i}{k^2} \Delta w_n \phi \, dy - \int_\Omega \frac{k'}{k} y \cdot \nabla w_n \phi \, dy = \int_\Omega f_n \phi \, dy, \tag{2.144}$$

para toda $\phi \in D(\Omega)$.

Integrando por partes (2.144), então para toda $\phi \in D(\Omega)$, obtemos:

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega w_n \phi' \, dy + \int_\Omega \frac{i}{k^2} w_n \Delta\phi \, dy + \int_\Omega \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\phi w_n \, dy + \int_\Omega \frac{nk'}{k} \phi w_n \, dy = \\ &= \int_\Omega f_n \phi \, dy. \end{aligned} \tag{2.145}$$

Integrando (2.145) de 0 a T, segue que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega -w_n \phi' \, dydt + \int_0^T \int_\Omega \frac{i}{k^2} w_n \Delta\phi \, dydt + \int_0^T \int_\Omega \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\phi w_n \, dydt + \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \frac{nk'}{k} \phi w_n \, dydt = \int_0^T \int_\Omega f_n \phi \, dydt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_Q w_n \left[-\phi' + \frac{i}{k^2} \Delta\phi + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\phi + \frac{nk'}{k} \phi \right] dydt = \int_Q f_n \phi \, dydt,$$

isto é,

$$-\int_Q w_n \left[\phi' - \frac{i}{k^2} \Delta\phi - \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\phi - \frac{nk'}{k} \phi \right] dydt = \int_Q f_n \phi \, dydt. \tag{2.146}$$

Ao limite com $n \longrightarrow \infty$ em (2.146) e notando (2.143), obtemos que w é solução de (2.124) no sentido da distribuição sobre Q. □

Proposição 2.4 *A solução w de* (2.124) *no sentido das distribuições sobre Q é também solução ultra fraca de* (2.124) *e possui regularidade $w \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$.*

Demonstração: Com efeito, consideremos os autovalores θ_j, com $j = 1, 2, \ldots$, do problema espectral:

$$((\theta_j, v)) = \lambda_j (\theta_j, v),$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e V_m o subespaço gerado por $[\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m]$. O sistema aproximado para o problema (2.124) com $w_m(t) \in V_m$ é:

$$\left| \begin{array}{l} (w_m'(t), \theta_j) + \dfrac{i}{k^2}((w_m(t), \theta_j)) - \dfrac{k'}{k}(y \cdot \nabla w_m(t), \theta_j) = (f(t), \theta_j), \\ \text{para todo } \; 1 \le j \le m; \\ \\ w_m(0) = w_m^0 \longrightarrow w^0 \;\; \text{em} \;\; L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.147}$$

De (2.147), obtemos:

$$|w_m(t)| \le C \left(|w^0| + \int_0^T |f(s)| ds \right),$$

e assim, podemos extrair uma subsequência, que denotaremos ainda por $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$w_m \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad \text{em} \quad L^\infty([0,T];L^2(\Omega)) \tag{2.148}$$

e w é solução de (2.124) no sentido das distribuições sobre Q. Agora, mostraremos que w é uma solução ultra fraca de (2.124). Para isso, consideremos

$$\alpha \in H^1(0,T) \quad \text{com} \quad \alpha(T)=0.$$

Multiplicando ambos os lados de $(2.147)_1$ por α e integrando de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (w_m',\theta_j)\alpha(t)dt + \int_0^T \frac{i}{k^2}((w_m,\theta_j))\alpha(t)dt - \\ &-\int_0^T \left(\frac{k'}{k}y\cdot\nabla w_m,\theta_j\right)\alpha(t)dt = \int_0^T (f,\theta_j)\alpha(t)dt. \end{aligned} \tag{2.149}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T (w_m',\theta_j)\alpha(t)dt.$

Integrando por partes e notando que $\alpha(T)=0$, segue que

$$\int_0^T (w_m',\theta_j)\alpha(t)dt = -(w_m^0,\theta_j^0)\alpha(0) - \int_0^T (w_m,\theta_j)\alpha'(t)dt. \tag{2.150}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T \frac{i}{k^2}((w_m,\theta_j))\alpha(t)dt.$

Pelo Teorema 1.10 e notando que $\theta_j=0$ sobre Γ, temos

$$-\int_\Omega w_m\Delta\overline{\theta_j}dy = ((w_m,\theta_j)),$$

ou seja,

$$((w_m,\theta_j)) = -(w_m,\Delta\theta_j),$$

isto é,

$$\int_0^T \frac{i}{k^2}((w_m,\theta_j))\alpha(t)dt = \int_0^T \left(w_m, -\frac{i}{k^2}\Delta\theta_j\alpha\right)dt. \tag{2.151}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T \left(\frac{k'}{k}y\cdot\nabla w_m,\theta_j\right)\alpha\,dt.$

Pelo Teorema 1.9 e notando que $\theta_j = 0$ sobre Γ, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}[y_j w_m \overline{\theta_j}]dy = \int_\Gamma \nu_j y_j w_m \overline{\theta_j} d\Gamma = 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega w_m n\overline{\theta_j} dy + \int_\Omega y \cdot \nabla w_m \overline{\theta_j} dy + \int_\Omega w_m y \cdot \nabla \overline{\theta_j} dy = 0,$$

isto é,

$$(w_m, n\theta_j) + (y \cdot \nabla w_m, \theta_j) + (w_m, y \cdot \nabla \theta_j) = 0. \tag{2.152}$$

De (2.152), resulta que:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\frac{k'}{k} y \cdot \nabla w_m, \theta_j\right) \alpha(t)dt = -\int_0^T \left(w_m, \frac{nk'}{k}\theta_j\right)\alpha(t)dt- \\ &-\int_0^T \left(w_m, \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\theta_j\right)\alpha(t)dt. \end{aligned} \tag{2.153}$$

Substituindo (2.150), (2.151) e (2.153) em (2.149), temos

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (w_m, \theta_j \alpha')dt + \int_0^T \left(w_m, -\frac{i}{k^2}\Delta\theta_j\alpha\right)dt+ \\ &+\int_0^T \left(w_m, \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\theta_j\alpha\right)dt + \int_0^T \left(w_m, \frac{nk'}{k}\theta_j\alpha\right)dt = \\ &= (w_m(0), \alpha(0)\theta_j) + \int_0^T (f, \alpha\theta_j)dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(w_m, -\alpha'\theta_j - \frac{i}{k^2}\Delta\theta_j\alpha + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\theta_j\alpha + \frac{nk'}{k}\theta_j\alpha\right)dt = \\ &= (w_m(0), \theta_j\alpha(0)) + \int_0^T (f, \alpha\theta_j)dt. \end{aligned} \tag{2.154}$$

Ao limite com $m \longrightarrow \infty$ em (2.154) e notando (2.148), obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(w, -\alpha'\theta_j - \frac{i}{k^2}\Delta\theta_j\alpha + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\theta_j\alpha + \frac{nk'}{k}\theta_j\alpha\right)dt = \\ &= (w(0), \theta_j\alpha(0)) + \int_0^T (f, \alpha\theta_j)dt. \end{aligned} \tag{2.155}$$

Para cada $h \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$, consideremos o problema misto de valor na fronteira

$$\left| \begin{array}{l} z' - \dfrac{i}{k^2}\Delta z - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla z - \dfrac{nk'}{k} z = h \ \text{ em } \ Q, \\ \\ z = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\ \\ z(T) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array} \right. \tag{2.156}$$

Então, de (2.155), a solução w de (2.124) satisfaz uma igualdade do tipo:

$$\int_0^T (w,h)dt = (w(0), z(0)) + \int_0^T (f,z)dt,$$

para toda $h \in L^1(0,T,H_0^1(\Omega))$ e z solução fraca de (2.156). Isto significa que w é uma solução ultra fraca de (2.124). Notemos que em (2.124), $w = 0$ sobre Σ.

De $(2.147)_1$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(w,\theta_j) = \left\langle f + \frac{i}{k^2}\Delta w + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla w + \frac{nk'}{k} w, \theta_j \right\rangle$$

em $D(0,T)$, para todo $1 \leq j \leq n$, com $f + \frac{i}{k^2}\Delta w + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla w + \frac{nk'}{k} w \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$. Isto implica que

$$w' \in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)).$$

Como

$$w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

e como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$ são densas, segue que

$$w \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

$\square$

Observação 2.6 *Se $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $w \in L^2(\Omega)$, a solução de* (2.124) *no sentido das distribuições é também uma solução ultra fraca com $w \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.*

Agora estamos em condições de provarmos que a solução ultra fraca do problema (2.124) possui regularidade $w \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$. O seguinte resultado é válido:

Proposição 2.5 *Se $w^0 \in L^2(\Omega)$ e $g \in H_0^1(0,T;H^{3/2}(\Gamma))$, então a solução ultra fraca de* (2.124) *possui regularidade $C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.*

Demonstração: Pela sobrejetividade do operador traço γ_0 (ver Teorema 1.6), existe $\widetilde{g} \in H_0^1(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $\widetilde{g} = g$ sobre Σ. Consideremos o problema misto

$$\left| \begin{array}{l} \widetilde{w}' - \frac{i}{k^2}\Delta\widetilde{w} - \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\widetilde{w} = -\widetilde{g}' + \frac{i}{k^2}\Delta\widetilde{g} + \frac{k'}{k} y \cdot \nabla\widetilde{g} \;\text{ em }\; Q, \\ \\ \widetilde{w} = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma, \\ \\ \widetilde{w}(0) = w^0 \;\text{ em }\; \Omega. \end{array} \right. \tag{2.157}$$

Notemos que $\widetilde{g}'$, $\Delta\widetilde{g}$, $y \cdot \nabla\widetilde{g} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, visto que $\widetilde{g} \in H_0^1(0,T;H^2(\Omega))$. Por hipótese, temos que $w^0 \in L^2(\Omega)$. Portanto, pela Proposição 2.4 existe uma única solução $\widetilde{w}$ de (2.157) no sentido das distribuições sobre Q que também é solução ultra fraca com regularidade $\widetilde{w} \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

A função

$$w = \widetilde{w} + \widetilde{g}$$

é solução no sentido das distribuições sobre Q do problema

$$\left| \begin{array}{l} w' - \dfrac{i}{k^2}\Delta w - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla w = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\[2ex] w = g \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\[2ex] w(0) = w^0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.158}$$

com regularidade $w \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$. A regularidade de w é obtida pela regularidade de $\widetilde{w}$. Notemos também que w é solução ultra fraca. $\square$

Proposição 2.6 (Regularidade da Solução Ultra Fraca) *A solução ultra fraca do problema* (2.124) *com* $w^0 \in H^{-1}(\Omega)$ *e* $g \in L^2(\Sigma)$ *possui regularidade* $w \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Demonstração: Com efeito, dados $w^0 \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in L^2(\Sigma)$, como as imersões $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(0,T;H^{3/2}(\Gamma)) \hookrightarrow L^2(\Sigma)$ são densas, temos que existem sequências $(w_m^0)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(g_m^0)_{m\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(0,T;H^{3/2}(\Gamma))$, respectivamente, tais que

$$\left| \begin{array}{l} w_m^0 \longrightarrow w^0 \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega), \\[2ex] g_m^0 \longrightarrow g \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma). \end{array} \right. \tag{2.159}$$

Seja $w_m \in H_0^1(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $w_m = g_m^0$ sobre Σ. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos o problema misto não homogêneo

$$\left| \begin{array}{l} w_m' - \dfrac{i}{k^2}\Delta w_m - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla w_m = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\[2ex] w_m = g_m^0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\[2ex] w_m(0) = w_m^0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.160}$$

Pela Proposição 2.5, temos que a solução ultra fraca de (2.160) possui regularidade

$$w_m \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.161}$$

Segue que $w_m - w_n$ é também solução ultra fraca de (2.160) com dados $w_m^0 - w_n^0$ e $g_m^0 - g$.

De (2.140), temos

$$\|w_m - w_n\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\Big[\|w_m^0 - w_n^0\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g_m^0 - g\|_{L^1(0,T;L^2(\Sigma))}\Big] \tag{2.162}$$

e

$$\int_0^T \langle w_m, h\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt = \langle w_m^0, \theta(0)\rangle - \int_0^T \int_\Gamma g_m^0 \frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu} d\Gamma dt, \tag{2.163}$$

para todo $h \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)$ e θ solução fraca do problema retrógrado (2.136) com $-f = h$.

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.162) e usando (2.159), obtemos que $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, e assim existe $w \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$w_m \longrightarrow w \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Portanto, de (2.161) concluímos que a solução ultra fraca $w \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Finalmente, ao limite com $m \longrightarrow \infty$ em (2.163), obtemos:

$$\int_0^T \langle w, h\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} dt = \langle w^0, \theta(0)\rangle - \int_0^T \int_\Gamma g \frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu} d\Gamma dt,$$

mostrando que w é uma solução ultra fraca de (2.160) e consequentemente de (2.124). $\square$

Capítulo 3

Controlabilidade Exata para Equação de Schrödinger Linear

Nesse capítulo estudaremos a controlabilidade exata para a equação de Schrödinger linear por meio do Método da Unicidade Hilbertiana (HUM), idealizado por Lions ([11]), cuja metodologia é baseada em certo critério de unicidade e na construção de um espaço de Hilbert. O HUM toma em consideração as propriedades das soluções da equação de Schrödinger desenvolvidas nas Seções 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5.

3.1 Descrição do Problema

Inicialmente, resolveremos o problema de controlabilidade exata do problema de valor de fronteira não homogêneo sobre o cilindro Q, a saber:

$$\left| \begin{array}{l} w' - \dfrac{i}{k^2}\Delta w - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla w = 0 \;\; \text{em} \;\; Q, \\[2ex] w = v \;\; \text{sobre} \;\; \Sigma, \\[2ex] w(0) = w^0 \;\; \text{em} \;\; \Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Após isso, obteremos o resultado de controlabilidade exata para o problema misto sobre o domínio não cilíndrico $\widehat{Q}$:

$$\left| \begin{array}{l} u' - i\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \widehat{Q}, \\ \\ u = \begin{cases} g & \text{sobre} \quad \widehat{\Sigma}(y^0), \\ \\ 0 & \text{sobre} \quad \widehat{\Sigma} \backslash \widehat{\Sigma}(y^0), \end{cases} \\ u(0) = u^0 \quad \text{em} \quad \Omega_0, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

O problema de controlabilidade exata para (3.1) pode ser formulado como segue: dado $T > 0$, encontrar um espaço de Hilbert H tal que para cada dado inicial $w^0 \in H$, exite um controle v pertencente a um espaço de controles sobre Σ tal que a solução correspondente $w(y, t, v)$ de (3.1) satisfaz a condição

$$w(y, T, v) = 0 \ \text{ para todo } \ y \in \Omega. \tag{3.3}$$

3.2 Resultado Principal

O resultado principal do nosso trabalho num domínio cilíndrico pode ser enunciado como segue:

Teorema 3.1 *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ e suponhamos que as hipóteses $(H1)$ e $(H2)$ sejam válidas. Se $T > 0$, então para cada $w^0 \in H^{-1}(\Omega)$, existe um contole $v \in L^2(\Sigma)$ tal que w, solução do problema (3.1), satisfaz a condição*

$$w(y, T, v) = 0 \ \textit{ para todo } \ y \in \Omega. \tag{3.4}$$

Demonstração: Com efeito, para isso usaremos o Método da Unicidade Hilbertiana (HUM). Descrevemos esse método por etapas como segue:

- **Etapa 1 - Solução Forte**

Consideremos $\phi^0 \in D(\Omega)$ e a solução ϕ do problema adjunto:

$$\left| \begin{array}{l} \phi' - \dfrac{i}{k^2}\Delta\phi - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla\phi - \dfrac{nk'}{k}\phi = 0 \ \text{ em } \ Q, \\ \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\ \\ \phi(0) = \phi^0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Pelos resultados obtidos nas Seções 2.2 e 2.3, temos que o problema (3.5) admite uma única solução forte ϕ com regularidade $\phi \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$ e, além disso,

$$\frac{1}{k}\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \tag{3.6}$$

- **Etapa 2 - Solução do Estado Adjunto**

Fazendo no problema retrógrado

$$\left| \begin{array}{l} \psi' - \dfrac{i}{k^2}\Delta\psi - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla\psi = 0 \ \text{ em } \ Q, \\ \psi = \begin{cases} -i\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \ \text{ sobre } \ \Sigma(y^0), \\ 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \backslash \Sigma(y^0), \end{cases} \\ \psi(T) = 0, \end{array} \right. \tag{3.7}$$

a reversão no tempo, isto é, a mudança de variável $t \longmapsto T - t$ e denotando por $\widehat{\psi}(t) = \psi(T-t)$ e $\widehat{k}(t) = k(T-t)$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \overline{\widehat{\psi}}(t) - \dfrac{i}{\widehat{k}^2}\Delta\overline{\widehat{\psi}}(t) - \dfrac{\widehat{k}'(t)}{\widehat{k}(t)} y \cdot \nabla\overline{\widehat{\psi}}(t) = 0 \ \text{ em } \ Q, \\ \overline{\widehat{\psi}} = \begin{cases} -i\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \ \text{ sobre } \ \Sigma(y^0), \\ 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \backslash \Sigma(y^0), \end{cases} \\ \overline{\widehat{\psi}}(0) = 0. \end{array} \right. \tag{3.8}$$

Como (3.8) é um caso particular de (2.124), então o problema (3.7) possui uma única solução ultra fraca ψ com regularidade $\psi \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$, conforme visto na Seção 2.5.

- **Etapa 3 - O operador Λ**

Da solução ψ de (3.7), definamos o operador

$$\begin{aligned} \Lambda : D(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ \phi^0 &\longrightarrow \Lambda(\phi^0) = \psi(0). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Observemos que, de $\phi^0 \in D(\Omega)$, obtemos a solução ϕ de (3.5) com regularidade (3.6) da derivada normal. Então, do problema (3.7), donde definimos Λ, é bem posto.

Seja

$$L\psi = \psi' - \frac{i}{k^2}\Delta\psi - \frac{k'}{k}\nabla\psi.$$

Multiplicando ambos os lados de (3.7) por ϕ, solução de (3.5), e integrando em Q, um cálculo análogo como em (2.127), (2.131) e (2.134), resulta que

$$0 = \langle L\psi, \phi\rangle = \langle \psi, L^*\phi\rangle + \langle \psi(T), \phi(T)\rangle - \langle \psi(0), \phi(0)\rangle + i\int_0^T \int_\Gamma \frac{1}{k^2}\psi\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\nu}d\Gamma dt, \tag{3.10}$$

onde

$$L^*\phi = -\overline{\phi}' - \frac{i}{k^2}\Delta\overline{\phi} + \frac{k'}{k}y\cdot\nabla\overline{\phi} + \frac{nk'}{k}\overline{\phi}$$

é o adjunto formal do operador L.

Usando $(3.5)_1$, $(3.5)_3$, $(3.7)_1$ e $(3.7)_3$, então de (3.10), obtemos

$$0 = -\langle \psi(0), \phi^0\rangle + i\int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2}\left[-i\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right]\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\nu}d\Gamma dt,$$

ou seja,

$$\langle \psi(0), \phi^0\rangle = \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{3.11}$$

Substituindo (3.9) em (3.11), obtemos:

$$\langle \Lambda\phi^0, \phi^0\rangle = \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{3.12}$$

Se considerarmos ϕ^0, $\xi^0 \in D(\Omega)$ e representarmos por ϕ e ξ as correspondentes soluções de (3.5), então, pelos mesmos argumentos usados para obter (3.11), nos leva à expressão:

$$\langle \Lambda\phi^0, \xi^0\rangle = \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\frac{\partial\overline{\xi}}{\partial\nu}d\Gamma dt. \tag{3.13}$$

- **Etapa 4 - A norma** $\|\cdot\|_H$

Seja

$$\|\cdot\|_H : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi^0 \longrightarrow \|\phi^0\|_H = \left(\int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt\right)^{1/2}. \tag{3.14}$$

Notemos que (3.14) define uma norma em $D(\Omega)$.

Com efeito, é suficiente mostrarmos que

$$\|\phi^0\|_H = 0 \Longleftrightarrow \phi^0 = 0,$$

pois as demais propriedades de norma são facilmente verificadas.

De fato, se $\|\phi^0\|_H = 0$, então $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$ q.s. sobre $\Gamma(y^0) \times (0, T)$ e portanto, por (2.93), vale

$$\|\phi^0\|^2 \leq C \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt = 0,$$

e assim segue que

$$\|\phi^0\| = 0,$$

e portanto, $\phi^0 = 0$ q.s. em Ω. Reciprocamente, se $\phi^0 = 0$, então a solução ϕ do problema (3.5) é nula e portanto, $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0$ q.s. sobre $\Gamma(y^0) \times (0, T)$, o que implica que $\|\phi\|_H = 0$.

Observação 3.1 *A norma* $\| \cdot \|_H$ *definida em* (3.14) *provém do produto interno definido por*

$$(\phi, \xi)_H = \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \nu} d\Gamma dt, \tag{3.15}$$

onde $(\phi, \xi) \in D(\Omega) \times D(\Omega)$.

Agora, consideremos o espaço de Hilbert H obtido pelo completamento de $D(\Omega)$ na norma $\| \cdot \|_H$, ou seja, $H = \overline{D(\Omega)}^{\| \cdot \|_H}$. Das desigualdades (2.86) e (2.93), temos que existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$C_1 \|\phi^0\|^2 \leq \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \leq C_2 \|\phi^0\|^2,$$

e de (3.14), temos que

$$C_1 \|\phi^0\|^2 \leq \|\phi^0\|_H^2 \leq C_2 \|\phi^0\|^2,$$

e assim, as normas $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)}$ e $\| \cdot \|_H$ são equivalentes. Logo, $H = H_0^1(\Omega)$ e $H^* = H^{-1}(\Omega)$.

- **Etapa 5 - A extensão contínua de Λ a F**

De (3.12) e (3.15), temos

$$\langle \Lambda \phi^0, \xi^0 \rangle = \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \nu} d\Gamma dt = (\phi^0, \xi^0)_H,$$

ou seja,

$$\langle \Lambda\phi^0, \xi^0 \rangle = (\phi^0, \xi^0)_H. \tag{3.16}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.16), obtemos:

$$|\langle \Lambda\phi^0, \xi^0 \rangle| \leq \|\phi^0\|_F \|\xi^0\|_H. \tag{3.17}$$

De (3.17), temos que Λ é um operador linear contínuo definido em $D(\Omega)$. Portanto, Λ se estende de maneira contínua a H. Sem perda de generalidade, denotaremos essa extensão por Λ e daqui em diante, $\Lambda : H \longrightarrow H^*$, visto que $H = H_0^1(\Omega)$ e $H^* = H^{-1}(\Omega)$.

- **Etapa 6 - A forma bilinear** b

Definamos:

$$\begin{aligned} & b : H \times H \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (\phi^0, \xi^0) \longrightarrow b(\phi^0, \xi^0) = (\phi^0, \xi^0)_H = \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \nu} \, d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Temos que (3.18) é uma forma bilinear e contínua. Além disso, (3.18) é coerciva devido a desigualdade (2.93), visto que

$$b(\phi^0, \phi^0) = (\phi^0, \phi^0)_H = \int_0^T \int_{\Gamma(y^0)} \frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \geq C_0 \|\phi^0\|^2,$$

ou seja,

$$b(\phi^0, \phi^0) \geq C_0 \|\phi^0\|^2.$$

onde C_0 é uma constante positiva.

Portanto, pelo Teorema 1.12, para cada $w^0 \in H^*$, dual de H, existe uma única $\phi^0 \in H$ tal que

$$b(\phi^0, \xi^0) = \langle w^0, \xi^0 \rangle_{H^* \times H},$$

isto é,

$$\langle \Lambda\phi^0, \xi^0 \rangle = \langle w^0, \xi^0 \rangle_{H^* \times H},$$

ou seja, dado $w^0 \in H^*$, existe um único $\phi^0 \in H$ tal que

$$\Lambda\phi^0 = w^0 \quad \text{em} \quad H^*. \tag{3.19}$$

Mas, por (3.9), temos que

$$\Lambda\phi^0 = \psi(0),$$

e portanto, de (3.19), segue que

$$\psi(0) = w^0. \tag{3.20}$$

- **Etapa 7 - O controle** v

Fazendo a reversão no tempo em (3.7) e usando (3.20), temos que (3.7) é equivalente ao seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{l} \psi' - \dfrac{i}{k^2}\Delta\psi - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla\psi = 0 \text{ em } Q, \\ \psi = \begin{cases} -i\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} \text{ sobre } \Sigma(y^0), \\ 0 \text{ sobre } \Sigma\backslash\Sigma(y^0), \end{cases} \\ \psi(0) = w^0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Agora, escolhendo o controle $v = -i\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$ e substituindo em (3.1), resulta que

$$\left| \begin{array}{l} w' - \dfrac{i}{k^2}\Delta w - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla w = 0 \text{ em } Q, \\ w = \begin{cases} -i\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} \text{ sobre } \Sigma(y^0), \\ 0 \text{ sobre } \Sigma\backslash\Sigma(y^0), \end{cases} \\ w(0) = w^0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.22}$$

Da unicidade da solução ultra fraca dos problemas (3.21) e (3.22), temos que

$$w(x,t) = \psi(x,t) \text{ q.s. em } Q.$$

Em $t = T$, segue que

$$w(T) = \psi(T)$$

e por $(3.7)_3$, resulta que

$$w(T) = 0,$$

conforme queríamos. □

Observação 3.2 *A prova do Teorema* 2.1 *segue do Teorema* 3.1 *e do difeomorfismo* τ, *conforme Seção* 2.1. *Para maiores detalhes, ver Apêndice B.*

Apêndice A

Sobre a Identidade (2.36)

O objetivo deste apêndice é provarmos a identidade para modificar a integral de superfície

$$\frac{k'}{k}\int_{\Gamma} y_j\nu_j \left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma,$$

conforme visto em (2.36).

De fato, consideremos a equação aproximada como em (2.14), a saber,

$$(w_m', \theta_j) + \frac{i}{k^2}((w_m, \theta_j)) - \frac{k'}{k}(y \cdot \nabla w_m, \theta_j) - \frac{nk'}{k}(w_m, \theta_j) = (f, \theta_j). \tag{A.1}$$

Seja $L^2(\Omega) = V_m \oplus V_m^{\perp}$ e P_m a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em $V_m \subset L^2(\Omega)$. Temos que $P_m \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ com $\|P_m\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} = 1$, P_m é auto-adjunto e $P_m w = w$, para todo $w \in V_m$. Para cada $w \in L^2(\Omega)$, temos que

$$P_m w = \sum_{j=1}^{m}(w, \theta_j)\theta_j. \tag{A.2}$$

Multiplicando ambos os lados de (A.1) por θ_j e somando em $j = 1, 2, \ldots, m$, e observando (A.2), obtemos:

$$w_m' - \frac{i}{k^2}\Delta w_m - \frac{k'}{k}P_m[y \cdot \nabla w_m] - \frac{nk'}{k}w_m = P_m f. \tag{A.3}$$

Tomando o produto interno em ambos os lados de (A.3) com $y \cdot \nabla w_m$, segue que:

$$\begin{aligned} &(w_m', y \cdot \nabla w_m) - \frac{i}{k^2}(\Delta w_m, y \cdot \nabla w_m) - \frac{k'}{k}(P_m[y \cdot \nabla w_m], y \cdot \nabla w_m) - \\ &-\frac{nk'}{k}(w_m, y \cdot \nabla w_m) = (P_m f, y \cdot \nabla w_m). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Observando que $P_m^2 = P_m$, temos

$$(P_m[y\cdot\nabla w_m], y\cdot\nabla w_m) = (P_m^2(y\cdot\nabla w_m), y\cdot\nabla w_m) = (P_m[y\cdot\nabla w_m], P_m[y\cdot\nabla w_m]) =$$

$$= \|P_m[y\cdot\nabla w_m]\|^2 \in \mathbb{R}.$$

Tomando o dobro da parte imaginária em ambos os lados de (A.4) e observando que $2Im(iz) = 2Re(z)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&2Im(w_m', y\cdot\nabla w_m) - \frac{1}{k^2}2Re(\Delta w_m, y\cdot\nabla w_m) - \\
&-\frac{nk'}{k}2Im(w_m, y\cdot\nabla w_m) = 2Im(P_m f, y\cdot\nabla w_m).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Integrando (A.5) de 0 a T, resulta que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T 2Im(w_m', y\cdot\nabla w_m)dt + \int_0^T \frac{2}{k^2}Re(-\Delta w_m, y\cdot\nabla w_m)dt - \\
&-\int_0^T \frac{nk'}{k}2Im(w_m, y\cdot\nabla w_m)dt = \int_0^T 2Im(P_m f, y\cdot\nabla w_m)dt.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T 2Im(w_m', y\cdot\nabla w_m)dt.$

Usando integração por partes, temos

$$\int_0^T (w_m', y\cdot\nabla w_m)dt = (w_m(t), y\cdot\nabla w_m(t))\Big|_0^T - \int_0^T (w_m, y\cdot\nabla w_m')dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (w_m', y\cdot\nabla w_m)dt = (w_m(T), y\cdot\nabla w_m(T)) - (w_m(0), y\cdot\nabla w_m(0)) - \\
&-\int_0^T (w_m, y\cdot\nabla w_m')dt.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Além disso, pelo Teorema 1.9, temos que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}[y_l w_m \overline{w_m'}]dy = \int_\Gamma y_l\cdot\nu_l w_m \overline{w_m'} d\Gamma = 0,$$

e assim,

$$\int_\Omega w_m\, y_l \frac{\partial \overline{w_m'}}{\partial y_l}dy + \int_\Omega y_l \frac{\partial w_m}{\partial y_l}\overline{w_m'}dy + \int_\Omega w_m n \overline{w_m'}dy = 0,$$

ou seja,

$$-(w_m, y\cdot\nabla w_m') = (y\cdot\nabla w_m, w_m') + (w_m, n w_m'),$$

isto é,

$$-\int_0^T (w_m, y\cdot\nabla w_m')dt = \int_0^T (y\cdot\nabla w_m, w_m')dt + \int_0^T (w_m, nw_m')dt. \tag{A.8}$$

Substituindo (A.8) em (A.7), obtemos:

$$\int_0^T (w_m', y\cdot\nabla w_m)dt = (w_m(T), y\cdot\nabla w_m(T)) - (w_m(0), y\cdot\nabla w_m(0)) +$$
$$+\int_0^T (y\cdot\nabla w_m, w_m')dt + \int_0^T (w_m, nw_m')dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^T (w_m', y\cdot\nabla w_m)dt - \int_0^T (y\cdot\nabla w_m, w_m')dt = (w_m(T), y\cdot\nabla w_m(T)) -\\ -(w_m(0), y\cdot\nabla w_m(0)) + \int_0^T (w_m, nw_m')dt.\end{aligned} \tag{A.9}$$

Notando que $z-\overline{z} = 2iIm(z)$ e $-i(z-\overline{z}) = 2Im(z)$, segue que

$$2Im\int_0^T (w_m', y\cdot\nabla w_m)dt = -i\left[\int_0^T (w_m', y\cdot\nabla w_m)dt - \int_0^T (y\cdot\nabla w_m, w_m')dt\right]. \tag{A.10}$$

Assim, usando (A.10) e (A.9), obtemos

$$\begin{aligned}2Im\int_0^T (w_m', y\cdot\nabla w_m)dt = -i\Big[(w_m(T), y\cdot\nabla w_m(T)) - (w_m(0), y\cdot\nabla w_m(0))\Big]\\ -i\int_0^T (nw_m, w_m')dt.\end{aligned} \tag{A.11}$$

Tomando a parte real de ambos os lados de (A.11) e observando que $Re(iz) = -Im(z)$, resulta que

$$\begin{aligned}2Im\int_0^T (w_m', y\cdot\nabla w_m)dt = Im(w_m(t), y\cdot\nabla w_m(t))\Big|_0^T +\\ +\int_0^T Im(nw_m, w_m')dt.\end{aligned} \tag{A.12}$$

Notando que $Im(\overline{z}) = -Im(z)$, vale que

$$\begin{aligned}\int_0^T Im(nw_m, w_m')dt = \int_0^T Im\overline{(w_m', nw_m)}dt =\\ = -\int_0^T Im(w_m', nw_m)dt = \int_0^T Im(-w_m', nw_m)dt.\end{aligned} \tag{A.13}$$

Por (A.3), temos

$$-w_m' = -\frac{i}{k^2}\Delta w_m - \frac{k'}{k}P_m[y\cdot\nabla w_m] - \frac{nk'}{k}w_m - P_m f. \tag{A.14}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}&Im(-w_m', nw_m) = \frac{n}{k^2}Re(-\Delta w_m, w_m) - \frac{nk'}{k}Im(P_m[y\cdot\nabla w_m], w_m)\\&-\frac{n^2k'}{k}Im(w_m, w_m) - n(P_m f, w_m).\end{aligned} \tag{A.15}$$

Como P_m é auto-adjunto e $P_m w_m = w_m$, temos

$$(P_m[y\cdot\nabla w_m], w_m) = (y\cdot\nabla w_m, P_m w_m) = (y\cdot\nabla w_m, w_m)$$

e

$$(P_m f, w_m) = (f, P_m w_m) = (f, w_m).$$

Além disso,

$$\frac{n^2k'}{k}Im(w_m, w_m) = \frac{n^2k'}{k}Im|w_m|^2 = 0.$$

Assim, pelo Teorema 1.10, reescrevemos (A.15) como segue:

$$Im(-w_m', nw_m) = \frac{n}{k^2}||w_m||^2 - \frac{nk'}{k}Im(y\cdot\nabla w_m, w_m) - (P_m f, nw_m),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&\int_0^T Im(-w_m', nw_m)dt = \int_0^T \frac{n}{k^2}\|w_m\|^2 dt - \int_0^T \frac{nk'}{k}Im(y\cdot\nabla w_m, w_m)dt\\&-\int_0^T (P_m f, nw_m)dt.\end{aligned} \tag{A.16}$$

Substituindo (A.16) em (A.12), resulta que

$$\begin{aligned}&\int_0^T 2Im(w_m', y\cdot\nabla w_m)dt = Im(w_m(t), y\cdot\nabla w_m(t))\Big|_0^T +\\&+\int_0^T \frac{n}{k^2}\|w_m\|^2 dt - \int_0^T \frac{nk'}{k}Im(y\cdot\nabla w_m, w_m)dt - \int_0^T (P_m f, nw_m)dt.\end{aligned} \tag{A.17}$$

- Análise do termo $\displaystyle\int_0^T \frac{2}{k^2}Re(-\Delta w_m, y\cdot\nabla w_m)dt.$

  Pelo Teorema 1.10, temos

$$\begin{aligned}(-\Delta w_m, y\cdot\nabla w_m) &= \left(\frac{\partial w_m}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_l}\left[y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\right]\right) - \int_\Gamma \frac{\partial w_m}{\partial \nu}y_j\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_j}d\Gamma =\\&= \left(\frac{\partial w_m}{\partial y_j}, \delta_l^j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\right) + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y_j}, y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{\partial w_m}{\partial y_l}\right) - \int_\Gamma \frac{\partial w_m}{\partial \nu}y_j\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_j}d\Gamma,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}2Re(-\Delta w_m, y\cdot\nabla w_m) = 2\|w_m\|^2 + \int_\Omega y_j 2Re\left\{\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_l}\right]\right\} dy-\\ -2\int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma.\end{aligned} \tag{A.18}$$

Pelo Teorema 1.9, segue que

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}\left[y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_j}\right]dy = \int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_j}d\Gamma = \int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma. \tag{A.19}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_l}\left[y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_j}\right]dy = n\int_\Omega \frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_j}dy + \int_\Omega y_j\frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\right]\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_j}dy+\\ +\int_\Omega y_j\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_l}\left[\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_j}\right]dy = n\|w_m\|^2 + 2\int_\Omega y_j Re\left\{\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_l}\right]\right\}dy.\end{aligned} \tag{A.20}$$

De (A.19) e (A.20), obtemos

$$\int_\Omega y_j 2Re\left\{\frac{\partial w_m}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{\partial \overline{w_m}}{\partial y_l}\right]\right\}dy = -n\|w_m\|^2 + \int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma. \tag{A.21}$$

Substituindo (A.21) em (A.18), resulta que:

$$2Re(-\Delta w_m, y\cdot\nabla w_m) = 2\|w_m\|^2 - n\|w_m\|^2 - \int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^T \frac{2}{k^2}Re(-\Delta w_m, y\cdot\nabla w_m)dt = \int_0^T \frac{2}{k^2}\|w_m\|^2 dt - \int_0^T \frac{n}{k^2}\|w_m\|^2 dt-\\ -\int_0^T\int_\Gamma \frac{1}{k^2}y_j\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt.\end{aligned} \tag{A.22}$$

Substituindo (A.17) e (A.22) em (A.6), obtemos:

$$\begin{aligned}&Im(w_m(t), y\cdot\nabla w_m(t))\Big|_0^T - \int_0^T \frac{nk'}{k}Im(y\cdot\nabla w_m, w_m)dt-\\ &-\int_0^T (P_m f, nw_m)dt + \int_0^T \frac{2}{k^2}\|w_m\|^2 dt-\\ &-\int_0^T \frac{1}{k^2}\int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt - \int_0^T \frac{nk'}{k}2Im(w_m, y\cdot\nabla w_m)dt =\\ &= \int_0^T 2Im(P_m f, y\cdot\nabla w_m)dt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_0^T \frac{1}{k^2}\int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt=\int_0^T 2Im(P_mf,y\cdot\nabla w_m)dt-$$
$$-Im(w_m(t),y\cdot\nabla w_m(t))\Big|_0^T+\int_0^T\frac{nk'}{k}Im(y\cdot\nabla w_m,w_m)dt+$$
$$+\int_0^T(P_mf,nw_m)dt-\int_0^T\frac{2}{k^2}\|w_m\|^2dt+$$
$$+\int_0^T\frac{nk'}{k}2Im(w_m,y\cdot\nabla w_m)dt,$$

isto é,

$$\int_0^T \frac{1}{k^2}\int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt=Im(w_m(t),y\cdot\nabla w_m(t))\Big|_0^T+$$
$$+\int_0^T\frac{2}{k^2}\|w_m\|^2dt-\int_0^T\frac{nk'}{k}2Im(w_m,y\cdot\nabla w_m)dt- \tag{A.23}$$
$$-\int_0^T 2Im(P_mf,y\cdot\nabla w_m)dt-\int_0^T(P_mf,nw_m)dt.$$

A identidade (A.23) é verdadeira para todo $0\le t\le T$. Tomando $t=T$, derivando ambos os membros de (A.23) com respeito a t e multiplicando por $k'k$, obtemos:

$$\frac{k'}{k}\int_\Gamma y_j\cdot\nu_j\left|\frac{\partial w_m}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma=kk'\frac{d}{dt}Im(w_m,y\cdot\nabla w_m)+$$
$$+\frac{2k'}{k}\|w_m\|^2-2nk'^2Im(w_m,y\cdot\nabla w_m)-2kk'Im(P_mf,y\cdot\nabla w_m)- \tag{A.24}$$
$$-kk'(P_mf,nw_m).$$

□

Apêndice B

Equivalência de Soluções para Equação de Schrödinger

Neste apêndice mostraremos a equivalência da controlabilidade exata para a equação de Schrödinger no cilindro Q e no não cilindro $\widehat{Q}$. As coordenadas em $\widehat{Q}$ são (x,t) e de Q são (y,t), onde $y = \dfrac{x}{k(t)}$. Consideremos os seguintes problemas não homogêneos:

- Em $\widehat{Q}$,

$$\left| \begin{array}{l} u'(x,t) - i\Delta u(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \widehat{Q}, \\ \\ u(x,t) = \begin{cases} g \ \text{ sobre } \ \widehat{\Sigma}(y^0), \\ \\ 0 \ \text{ sobre } \ \widehat{\Sigma} \backslash \widehat{\Sigma}(y^0), \end{cases} \\ u(x,0) = u^0(x) \ \text{ em } \ \Omega_0. \end{array} \right. \tag{B.1}$$

- Em Q,

$$\left| \begin{array}{l} w'(y,t) - \dfrac{i}{k^2(t)}\Delta w(y,t) - \dfrac{k'(t)}{k(t)} y_j \dfrac{\partial w}{\partial y_j}(y,t) = 0 \ \text{ em } \ Q, \\ \\ w(y,t) = \begin{cases} v \ \text{ sobre } \ \Sigma(y^0), \\ \\ 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \backslash \Sigma(y^0), \end{cases} \\ w(y,0) = w^0(y) \ \text{ em } \ \Omega. \end{array} \right. \tag{B.2}$$

Os sistemas adjuntos de (B.1) e (B.2) são dados, respectivamente, por:

$$\left|\begin{array}{l} \theta'(x,t) - i\Delta\theta(x,t) = 0 \;\text{ em }\; \widehat{Q}, \\ \\ \theta(x,t) = 0 \;\text{ sobre }\; \widehat{\Sigma}, \\ \\ \theta(x,0) = \theta^0(x) \;\text{ em }\; \Omega_0, \end{array}\right. \tag{B.3}$$

e

$$\left|\begin{array}{l} z'(y,t) - \dfrac{i}{k^2}\nabla z(y,t) - \dfrac{k'}{k} y \cdot \nabla z(y,t) - \dfrac{nk'}{k} z(y,t) = 0 \;\text{ em }\; Q, \\ \\ z(y,t) = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma, \\ \\ z(y,0) = z^0(y) \;\text{ em }\; \Omega. \end{array}\right. \tag{B.4}$$

Notemos que

$$u(x,t) = w\left(\frac{x}{k(t)}, t\right),$$

onde $(x,t) \in \widehat{Q}$.

Já definimos a solução fraca para (B.4), conforme Seção 2.2. Agora, definiremos a solução fraca para o sistema (B.3) em $\widehat{Q}$.

Definição B.1 *Dizemos que uma função $\theta \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega_t))$ é solução fraca para o sistema $(B.3)$ se satisfaz a seguinte condição:*

$$-\int_0^T (\theta, \varphi')_{L^2(\Omega_t)} dt + i\int_0^T ((\theta,\varphi))_{H_0^1(\Omega_t)} dt = 0, \tag{B.5}$$

para toda $\varphi = \varphi(x,t)$ tal que $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_t))$, $\varphi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega_t))$ com $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$, sendo que

$$\theta(x,0) = \theta^0(x) \quad \textit{em} \quad \Omega_0. \tag{B.6}$$

Proposição B.1 *Se $z(y,t)$ é solução fraca de $(B.4)$, então*

$$\theta(x,t) = k^{-n} z\left(\frac{x}{k(t)}, t\right)$$

é solução fraca de $(B.3)$.

Demonstração: Com efeito, sendo $z = z(y,t)$ solução fraca de (B.4), então

$$-\int_0^T (z,\psi')dt + i\int_0^T \frac{1}{k^2}((z,\psi))dt - \int_0^T \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla z,\psi)dt - \int_0^T \frac{nk'}{k}(z,\psi)dt = 0 \tag{B.7}$$

para todo $\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\psi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ com $\psi(0) = \psi(T) = 0$. Pelo Teorema 1.9 e notando que $z = 0$ sobre Σ, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\Big[y_j z\overline{\psi}\Big]dy = \int_\Gamma y_j \cdot \nu_j z\overline{\psi}d\Gamma = 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega nz\overline{\psi}dy + \int_\Omega y\cdot\nabla z\overline{\psi}dy + \int_\Omega zy\cdot\nabla\overline{\psi}dy = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega y\cdot\nabla z\overline{\psi}dy = -\int_\Omega zy\cdot\nabla\overline{\psi}dy - \int_\Omega nz\overline{\psi}dy.$$

Mais precisamente, temos:

$$-(y\cdot\nabla z,\psi) = (z, y\cdot\nabla\psi) + (z, n\psi). \tag{B.8}$$

Multiplicando ambos os lados de (B.8) por $\dfrac{k'}{k}$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$-\int_0^T \frac{k'}{k}(y\cdot\nabla z,\psi)dt = \int_0^T (z, \frac{k'}{k}y\cdot\nabla\psi)dt + \int_0^T (z, \frac{nk'}{k}\psi)dt. \tag{B.9}$$

Substituindo (B.9) em (B.7), resulta que:

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega z(y,t)\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}(y,t)dydt + \int_0^T\int_\Omega z(y,t)\frac{k'}{k}y\cdot\nabla\overline{\psi}(y,t)dydt + \\
&+\int_0^T\int_\Omega \frac{1}{k^2}\nabla z(y,t)\cdot\nabla\overline{\psi}(y,t)dydt = 0.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Seja

$$y = \frac{x}{k(t)}.$$

Então,

$$y = \left(\frac{x_1}{k(t)}, \frac{x_2}{k(t)}, \ldots, \frac{x_n}{k(t)}\right).$$

Consideremos o difeomorfismo

$$\tau : \widehat{Q} \longrightarrow Q$$

$$(x,t) \longmapsto (y,t).$$

Portanto,

$$\tau(x,t) = \Big(\underbrace{\frac{x_1}{k(t)}}_{\tau_1}, \underbrace{\frac{x_2}{k(t)}}_{\tau_2}, \ldots, \underbrace{\frac{x_n}{k(t)}}_{\tau_n}, \underbrace{t}_{\tau_{(n+1)}}\Big).$$

A matriz jacobiana de τ é dada por

$$J\tau(x,t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\tau_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tau_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tau_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tau_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\tau_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tau_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tau_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tau_2}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\tau_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tau_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tau_n}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tau_n}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\tau_{n+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\tau_{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\tau_{n+1}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial\tau_{n+1}}{\partial t} \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Daí, temos que

$$J\tau(x,t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{k(t)} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{k(t)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{k(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \tag{B.11}$$

Assim, o determinante da matriz jacobiana (B.11) é $k^{-n}(t)$, ou seja,

$$detJ\tau(x,t) = k^{-n}(t).$$

Pelo Teorema da Mudança de Variáveis, temos:

$$dydt = |detJ\tau(x,t)|dxdt,$$

isto é,

$$dydt = k^{-n}(t)dxdt. \tag{B.12}$$

Substituindo (B.12) em (B.10), segue que

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \int_{\Omega_t} k^{-n} z\left(\frac{x}{k},t\right) \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}\left(\frac{x}{k},t\right) dxdt+ \\ &+\int_0^T \int_{\Omega_t} k^{-n} z\left(\frac{x}{k},t\right) \frac{k'}{k}\frac{x}{k}\cdot\nabla\overline{\psi}\left(\frac{x}{k},t\right) dxdt+ \\ &+\int_0^T \int_{\Omega_t} \frac{1}{k^2} k^{-n}\nabla z\left(\frac{x}{k},t\right)\cdot\nabla\overline{\psi}\left(\frac{x}{k},t\right) dxdt = 0, \end{aligned} \tag{B.13}$$

onde $k = k(t)$.

Notemos que

$$\frac{d\psi}{dt}(y,t)=\frac{\partial\psi}{\partial y}(y,t)\frac{\partial y}{\partial t}(y,t)+\frac{\partial\psi}{\partial t}(y,t)\frac{\partial t}{\partial t}(y,t).$$

Como $y=\dfrac{x}{k}$, então $\dfrac{\partial y}{\partial t}=-\dfrac{k'}{k^2}x$ e portanto,

$$\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{x}{k},t\right)=\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{x}{k},t\right)-\frac{k'}{k}\frac{x}{k}\nabla\psi\left(\frac{x}{k},t\right),$$

isto é,

$$-\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{x}{k},t\right)=-\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{x}{k},t\right)+\frac{k'}{k}\frac{x}{k}\nabla\psi\left(\frac{x}{k},t\right). \tag{B.14}$$

Notando que $\varphi(x,t)=\psi\left(\dfrac{x}{k},t\right)$, então de (B.13) e (B.14) com $\theta(x,t)=k^{-n}z\left(\frac{x}{k},t\right)$, $x\in\Omega_t$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_{\Omega_t}\theta(x,t)\frac{d\overline{\varphi}}{dt}(x,t)dxdt+i\int_0^T\int_{\Omega_t}\nabla\theta(x,t)\nabla\overline{\varphi}(x,t)dxdt=\\
&=-\int_0^T\int_{\Omega_t}\theta(x,t)\frac{d\overline{\psi}}{dt}\left(\frac{x}{k},t\right)dxdt+i\int_0^T\int_{\Omega_t}k^{-n}\nabla z\left(\frac{x}{k},t\right)\frac{1}{k}\nabla\overline{\psi}\left(\frac{x}{k},t\right)\frac{1}{k}dxdt=\\
&-\int_0^T\int_{\Omega_t}k^{-n}z\left(\frac{x}{k},t\right)\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}\left(\frac{x}{k},t\right)dxdt+\int_0^T\int_{\Omega_t}k^{-n}z\left(\frac{x}{k},t\right)\frac{k'}{k}\frac{x}{k}\cdot\nabla\overline{\psi}\left(\frac{x}{k},t\right)dxdt+\\
&+\int_0^T\int_{\Omega_t}\frac{1}{k^2}k^{-n}\nabla z\left(\frac{x}{k},t\right)\cdot\nabla\overline{\psi}\left(\frac{x}{k},t\right)dxdt=0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_0^T\int_{\Omega_t}\theta(x,t)\frac{d\overline{\varphi}}{dt}(x,t)dxdt+i\int_0^T\int_{\Omega_t}\nabla\theta(x,t)\nabla\overline{\varphi}(x,t)dxdt=0,$$

isto é,

$$-\int_0^T(\theta,\varphi')_{L^2(\Omega_t)}dt+i\int_0^T((\theta,\varphi))_{H_0^1(\Omega_t)}dt=0,$$

e $\theta(x,t)=0$ sobre Σ, visto que $k^{-n}z\left(\dfrac{x}{k},t\right)=0$.

Para os dados iniciais, temos:

$$(z(y,0),\psi(y))=(z^0(y),\psi(y))\ \text{ para }\ \psi\in L^2(\Omega),$$

isto é,

$$\int_{\Omega_0}k^{-n}(0)z\left(\frac{x}{k},0\right)\overline{\psi}\left(\frac{x}{k}\right)dx=\int_{\Omega_0}k^{-n}(0)z^0\left(\frac{x}{k}\right)\overline{\psi}\left(\frac{x}{k}\right)dx,$$

implicando que,

$$\int_{\Omega_0} \theta(x,0)\overline{\varphi}(x)dx = \int_{\Omega_0} \theta^0(x)\overline{\varphi}(x)dx, \quad \text{para} \quad \varphi \in L^2(\Omega_0),$$

ou seja,

$$\theta(x,0) = \theta^0(x) \quad \text{em} \quad \Omega_0.$$

$\square$

Observação B.1 *Seja $\eta(x,t)$ a normal unitária de $\widehat{\Sigma}$. Se $(x,t) \in \widehat{\Sigma}$, seja $\varphi = 0$ a parametrização local de $y = \dfrac{x}{k}$. Então, $\psi(x,t) = \varphi\left(\dfrac{x}{k}\right) = 0$. Temos,*

$$\nabla\psi(x,t) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$

com $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_j} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ e $\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{k'}{k}\dfrac{x}{k}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$. Daí, segue que

$$\nabla\psi(x,t) = \frac{1}{k}\Big\{\nabla\varphi(y), -k'y\nabla\varphi(y)\Big\},$$

onde $\dfrac{1}{k}\nabla\varphi(y)$ é a x-componente de $\nabla\psi(x,t)$; que é a x-componente de $\eta(x,t)$.

Seja $\nu^*(x,t)$ a x-componente de $\eta(x,t)$, $|\nu^*(x,t)| = 1$. Então, pela observação (B.1), temos

$$\nu^*(x,t) = \frac{\nabla\varphi(y)}{|\nabla\varphi(y)|} = \nu\left(\frac{x}{k(t)}\right), \tag{B.15}$$

onde $\nu\left(\dfrac{x}{k}\right)$ é o vetor normal unitário de Σ no ponto $y = \dfrac{x}{k}$ correspondente a (x,t) de $\widehat{\Sigma}$.

Se

$$\theta(x,t) = k^{-n} z\left(\frac{x}{k}, t\right),$$

então

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_j}(x,t) = k^{-n}\frac{\partial z}{\partial x_j}(y,t) = k^{-n}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_j} = k^{-n}\frac{\partial z}{\partial y_j}\frac{1}{k} = k^{-n-1}\frac{\partial z}{\partial y_j},$$

isto é,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_j}(x,t) = k^{-n-1}\frac{\partial z}{\partial y_j}(y,t). \tag{B.16}$$

Então, de (B.15) e (B.16), vale:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\nu_j^*(x,t) = k^{-n-1}\frac{\partial z}{\partial y_j}\nu_j(y),$$

ou seja,

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu^*} = k^{-n-1}\frac{\partial z}{\partial \nu},$$

onde $(x,t) \in \widehat{\Sigma}$ correspondendo a $\left(\frac{x}{k}, t\right) \in \Sigma$.

Definição B.2 *Dizemos que uma função $u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$ é solução ultra fraca do problema $(B.1)$ se satisfaz a condição*

$$\int_0^T \langle u(t), \widehat{h}(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega_t)\times H_0^1(\Omega_t)} dt = \langle u^0, \theta(0)\rangle_{L^2(\Omega_0)} - \int_0^T \int_{\Gamma_t} g(x,t)\frac{i}{k^2}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial \nu^*} d\Gamma_t dt,$$

para $\widehat{h} \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ e θ solução fraca do problema

$$\left| \begin{array}{l} \theta' - i\Delta\theta = 0 \quad em \quad \widehat{Q}, \\ \\ \theta = 0 \quad sobre \quad \widehat{\Sigma}, \\ \\ \theta(T) = 0 \quad em \quad \Omega_0. \end{array} \right.$$

Proposição B.2 *Suponhamos que $u(x,t) = w\left(\frac{x}{k}, t\right)$, para $x \in \Omega_t$. Então u é solução ultra fraca de $(B.1)$ se, e somente se, w é solução ultra fraca de $(B.2)$.*

Demonstração: Com efeito, se $\theta(x,t) = k^{-n}z\left(\frac{x}{k}, t\right)$, $u(x,t) = w\left(\frac{x}{k}, t\right)$ e $g(x,t) = k^2 v(y,t)$, então valem as seguintes identidades:

$$\theta'(x,t) = -nk^{-n-1}k'z\left(\frac{x}{k}, t\right) - k^{-n-1}k'y \cdot \nabla z\left(\frac{x}{k}, t\right) + k^{-n}z'\left(\frac{x}{k}, t\right), \tag{B.17}$$

$$u' - i\Delta u = Lw(y,t), \tag{B.18}$$

$$\theta' - i\Delta\theta = k^{-n}L^*z(y,t), \tag{B.19}$$

onde

$$L^*z = z' - \frac{i}{k^2}\Delta z - \frac{k'}{k}y \cdot \nabla z - \frac{nk'}{k}z$$

é o adjunto do operador

$$Lw = w' - \frac{i}{k^2}\Delta w - \frac{k'}{k}y \cdot \nabla w.$$

Com efeito, sendo $y = \dfrac{x}{k}$, temos:

$$\begin{aligned}
\theta'(x,t) &= \frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}[k^{-n}z(y,t)] = \frac{\partial}{\partial t}(k^{-n})z(y,t) + k^{-n}(t)\frac{\partial z}{\partial t}(y,t) = \\
&= -nk^{-n-1}k'z(y,t) + k^{-n}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial t}\right] = \\
&= -nk^{-n-1}k'z(y,t) + k^{-n}\left[-\frac{k'}{k}\frac{x}{k}\nabla z(y,t) + z'(y,t)\right] = \\
&= -nk^{-n-1}k'z\left(\frac{x}{k},t\right) - k^{-n-1}k'y\cdot\nabla z\left(\frac{x}{k},t\right) + k^{-n}z'\left(\frac{x}{k},t\right),
\end{aligned}$$

e portanto, segue (B.17).

Agora,

$$\begin{aligned}
&u' - i\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - i\Delta u(x,t) = \frac{\partial w}{\partial t}(y,t) - \frac{i}{k^2}\Delta w(y,t) = \\
&\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} - i\frac{1}{k^2}\Delta w(y,t) = -\frac{k'}{k}y\cdot\nabla w + w' - i\frac{1}{k^2}\Delta w(y,t) = \\
&= w' - \frac{i}{k^2}\Delta w - \frac{k'}{k}y\cdot\nabla w = Lw(y,t),
\end{aligned}$$

e assim, vale (B.18).

Finalmente, temos:

$$\begin{aligned}
&\theta' - i\Delta\theta = -nk^{-n-1}k'z\left(\frac{x}{k},t\right) - k^{-n-1}k'y\cdot\nabla z\left(\frac{x}{k},t\right) + k^{-n}z'\left(\frac{x}{k},t\right) - \frac{i}{k^2}k^{-n}\Delta z\left(\frac{x}{k},t\right) = \\
&= k^{-n}\left[z'\left(\frac{x}{k},t\right) - \frac{i}{k^2}\Delta z\left(\frac{x}{k},t\right) - \frac{k'}{k}y\cdot\nabla z\left(\frac{x}{k},t\right) - \frac{nk'}{k}z\left(\frac{x}{k},t\right)\right] = k^{-n}L^*z,
\end{aligned}$$

e segue (B.19).

De (B.17), (B.18) e (B.19), e notando que $dxdt = k^n dydt$, nos leva a

$$\int_0^T\int_{\Omega_t}(u' - i\Delta u)\theta\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega Lwk^{-n}zk^n\,dydt = \int_0^T\int_\Omega Lwz\,dydt. \tag{B.20}$$

e

$$\int_0^T\int_{\Omega_t}u(\theta' - i\Delta\theta)\,dxdt = \int_0^T\int_\Omega wk^{-n}L^*zk^n\,dydt = \int_0^T\int_\Omega w\,L^*z\,dydt. \tag{B.21}$$

Notemos que

- $\displaystyle\int_\Gamma v(y,t)d\Gamma = \int_{\Gamma_t}k^{-n+1}v(y,t)d\Gamma_t = \int_{\Gamma_t}k^{-n+1}k^{-2}g(x,t)d\Gamma_t = \int_{\Gamma_t}k^{-n-1}g(x,t)d\Gamma_t.$

Além disso,

- $\displaystyle\int_{\Gamma_t} g(x,t)\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\nu^*}d\Gamma_t = \int_{\Gamma} k^{n-1}g(ky,t)\frac{i}{k^2}k^{-n-1}\frac{\partial\overline{z}}{\partial\nu}d\Gamma = \int_{\Gamma} g(ky,t)k^{-2}\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{z}}{\partial\nu}d\Gamma =$
  $\displaystyle= \int_{\Gamma} k^2 v(y,t)k^{-2}\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{z}}{\partial\nu}d\Gamma = \int_{\Gamma} v(y,t)\frac{i}{k^2}\frac{\partial\overline{z}}{\partial\nu}d\Gamma.$

$\square$

Apêndice C

Espaços de Sobolev sobre o Domínio Não Cilíndrico $\widehat{Q}$

Nesse apêndice caracterizaremos os espaços $L^p(0,T;H_0^m(\Omega_t))$, $1 \leq p \leq \infty$; $L^{p'}(0,T;H^{-m}(\Omega_t))$ para $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$; $C^0([0,T];H_0^m(\Omega_t))$ e $C^0([0,T];H^{-m}(\Omega_t))$, onde m é um inteiro positivo.

Seja

$$\begin{aligned} u : \widehat{Q} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,t) &\longmapsto u(x,t) = k^{-n}(t)\xi\left(\frac{x}{k},t\right), \end{aligned} \tag{C.1}$$

com $\xi \in L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega))$.

Para $1 \leq q < \infty$, temos

$$|D_x^m u(x,t)|^q = k^{-nq-mq}(t)|D_y\xi(y,t)|^q.$$

Daí, como $dx = k^n dy$, então

$$\left(\int_{\Omega_t} |D_x^m u(x,t)|^q dx\right)^{1/q} = k^{\frac{n}{q}-n-m}(t)\left(\int_{\Omega} |D_y\xi(y,t)|^q dy\right)^{1/q}.$$

Temos que $u \in W_0^{m,q}(\Omega_t)$ q.s. em $(0,T)$ e, além disso,

$$\|u(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega_t)} = k^{\frac{n}{q}-n-m}(t)\|\xi\|_{W_0^{m,q}(\Omega)}.$$

Portanto,

$$C_0\|\xi(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega)} \leq \|u(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega_t)} \leq C_1\|\xi(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega)}, \tag{C.2}$$

onde C_0 e C_1 são constantes positivas independentes de ξ e u.

Denotemos por $L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, m inteiro positivo, o espaço de (classes de) funções $u : \widehat{Q} \to \mathbb{C}$ tal que existe $\xi \in L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega))$ satisfazendo (C.1), munido com a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_{W_0^{m,q}(\Omega_t)} dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{W_0^{m,q}(\Omega_t)}.$$

Por (C.2), temos que o espaço $L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))$ munido com a norma acima é um espaço de Banach e a aplicação linear

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega)) &\longrightarrow L^p(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t)) \\ \xi &\longmapsto \mathcal{U}\xi = u \end{aligned} \tag{C.3}$$

é um isomorfismo.

Representamos por $C^0([0,T];W_0^{m,q}(\Omega_t))$ o subespaço fechado de $L^\infty(0,T;W_0^{m,q}(\Omega_t))$ constituído por funções u tal que a função $\xi \in C^0([0,T];W_0^{m,q}(\Omega))$, onde ξ é dada por (C.1).

No que segue, caracterizaremos os espaços duais. De fato, consideremos $X = L^p(0,T;H_0^1(\Omega))$, $Y = L^p(0,T;H_0^1(\Omega_t))$ e a aplicação $\mathcal{U} : X \to Y$ definida em (C.3). Sabemos que $\mathcal{U} : X \to Y$ é um isomorfismo linear. Portanto, a aplicação transposta $\mathcal{U}^*$ torna o dual Y' no dual X', ou seja, $\mathcal{U}^* : Y' \to X'$. Segue que, para todo $S \in Y'$, vale:

$$\langle S, u\rangle = \langle S, \mathcal{U}\xi\rangle = \langle \mathcal{U}^* S, \xi\rangle,$$

para toda $\xi \in X$.

Seja

$$R = \mathcal{U}^* S \in X'.$$

Assim, concluímos que para cada $S \in Y'$, dual de Y, existe um único $R \in X'$, dual de X, tal que

$$\langle S, u\rangle = \langle R, \xi\rangle, \quad \xi = \mathcal{U}^{-1} u,$$

e por (C.2), vale:

$$C_0\|R\| \leq \|S\| \leq C_1\|R\|.$$

Definamos o operador $P(t)$, $t \in (0,T)$, como sendo:

$$\langle P(t), \alpha \rangle = \langle R(t), \beta \rangle,$$

para $\alpha \in H_0^1(\Omega_t)$ e $\beta(y) = k^n \alpha(k(t)y)$. Então temos,

$$C_0 \|R(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|P(t)\|_{H^{-1}(\Omega_t)} \leq C_1 \|R(t)\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

pois

$$C_0 \|\beta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\alpha\|_{H_0^1(\Omega_t)} \leq C_1 \|\beta\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Identificando S com R e R com P, obtemos que o espaço $L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$ é constituído por formas lineares S tais que:

$$S : (0,T) \longrightarrow H^{-1}(\Omega_t)$$

e existe $R \in L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ satisfazendo a condição:

$$\langle S(t), \alpha \rangle = \langle R(t), \beta \rangle \ \text{ q.s. em } \ (0,T),$$

para $\beta(y) = k^n(t)\alpha(k(t)y)$ e a norma é dada por

$$\|S\|_{L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))} = \left(\int_0^T \|S(t)\|_{H^{-1}(\Omega_t)}^{p'} dt \right)^{1/p'}, \quad 1 \leq p' < \infty$$

e

$$\|S\|_{L^{\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|S(t)\|_{H^{-1}(\Omega_t)}, \qquad p' = \infty.$$

Definimos o espaço $C^0([0,T];H^{-1}(\Omega_t))$ como o subespaço fechado de $L^{\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega_t))$ constituído por formas lineares contínuas S tal que o correspondente R pertence a $C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Bibliografia

[1] ANTUNES, G., SILVA, M., APOLAYA, R., *Schrödinger equations in noncylindrical domains: exact controllability*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, **2006**, p. 1–30, 2006.

[2] APOLAYA, R., *Non linear Schrödinger equations - Approximate controllability in noncylindrical domains*, PESQUIMAT Revista de la Fac. CC. MM. de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, **2**, p. 1-11, 2005.

[3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2011.

[4] CUI, L., JIANG, Y., WANGY, Y., *Exact controllability for a one-dimensional wave equation with the fixed endpoint control.* Boundary Value Problems, 2015:208, 2015.

[5] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Second edition. Graduate Studies in Mathematics, v. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[6] GOMES, C. R. D., RINCON, M. A., SILVA, M. D. G., ANTUNES, G. O.,*Theoretical and computational analysis of a nonlinear Schrödinger problem with moving boundary*, Advances in Computational Mathematics, **2**, p. 981-1004, 2019.

[7] HÖRMANDER, L., Linear Partial Differential Operators, Springer - Verlag, 1976.

[8] JESUS, I. P., *Controllability for a one-dimensional wave equation in a non-cylindrical domain,* Mediterr. J. Math., Accepted, 2019.

[9] JESUS, I. P., LIMA, O. A, CLARK, M. R., *Análise Funcional: Uma introdução*, 1ª. ed. Teresina: EDUFPI, 2018.

[10] LIONS, J.–L., *Problèmes aux Limites dans Les Équations aux Dérivées Partielles,* Deuxième édition. Séminaire de Mathématiques Supérieures, no. 1 (Été, 1962), Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1965.

[11] LIONS, J.– L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[12] LIONS, J.–L., et MAGENES, E., *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Apllications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, (1968).

[13] MEDEIROS, L. A., Exact Controllability for Wave Equation - HUM, Atas do 37º SBA, p. 61-173, 1993.

[14] MEDEIROS, L. A., MIRANDA , M. M., *Contrôllabilité exacte de l'équation de Schrödinger dans des domaines non cylindriques,* C.R Acad. Sci. **319**, p. 685–689, 1994.

[15] MEDEIROS, L. A., MIRANDA , M. M., *Exact controllability for Schrödinger equations in non cylindrical domains,* 41º Seminário Brasileiro de Análise. Rev Mat Apl., 1995.

[16] MEDEIROS, L. A.; MILLA MIRANDA, M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, 5a. edição. Rio de Janeiro: Editora IM-UFRJ, 2006.

[17] MEDEIROS, L. A., *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais.* Parte I. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2006.

[18] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos,* Instituto de Matemática-UFRJ, nº 9, 1975.

[19] MIRANDA, M. M., *Exact controlllability for the wave equation in domains with variable boundary*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madr. **9**, p. 435-457, 1996.

[20] MIRANDA, M. M., *HUM and the wave equation with variable coeficients*, Asymptotic Analysis **11**, 317-341, 1995.

[21] SENGOUGA, A., *Observability of the 1-D wave equation with mixed boundary conditions in a non-cylindrical domain,* Mediterr. J. Math., 15:62, 2018.

[22] TEMAM, R., *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, Vol. 2. North-Holland, Amsterdam, 1997.

[23] ZUAZUA, E., Finite Dimensional Null Controllability for the Semilinear Heat Equation. *J. Math. Pures Appl.*, v. 76, p.237–264, 1997.