Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre a Boa Colocação da Equação de Korteweg-de Vries Generalizada

Dieme Pereira da Silva

Teresina - 26 de março de 2020

Dieme Pereira da Silva

Dissertação de Mestrado:

Sobre a Boa Colocação da Equação de Korteweg-de Vries Generalizada

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos

Teresina - 26 de março de 2020

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre a boa colocação da equação de Kortweg-de Vries generalizada

Dieme Pereira da Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 09 de Março de 2020.

Banca Examinadora:

Gleison do Nascimento Santos
Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos - Orientador

José Francisco Alves de Oliveira
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira (UFPI)

Prof. Dr. Mykael de Araújo Cardoso (UFPI)

Thiago Esteves Moura
Prof. Dr. Thiago Esteves Moura (IFPI)

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S586s Silva, Dieme Pereira da.
Sobre a boa colocação para a equação de Korteweg-de Vries generalizada / Dieme Pereira da Silva. – Teresina, 2020.
80 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Gleison Nascimento dos Santos

1. Análise. 2. Equações Difernciais Parciais. 3. Teorema do Ponto Fixo. 4. Equação de Korteweg-de Vries. I. Título.

CDD 515.353

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

Maria Oliveira Silva. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela proteção, dádiva da vida e força em todos os momentos para trilhar este caminho.

Agradeço à meus pais, Jonas Gregório da Silva e Ivana de Moraes Pereira pelo apoio durante todos estes anos de graduação e mestrado. Agradeço a meus irmãos, Jarinete, Jarques, Dina e toda a minha família, por tudo que fizeram por mim e ainda fazem.

Agradeço ao meu orientador ,Gleison do Nascimento Santos, pelo apoio, ensinamentos e paciência.

Agradeço aos meus professores de graduação e mestrado na UFPI Teresina por todos os ensinamentos repassados e que permitiu que eu chegasse a este momento: Humberto, Marcos Vinícius, Mikael, Newton, Rondinelle, Xavier, Barnabé, Halysson, Franciane, José Francisco, Isaías, Jefferson Leite e Joel. Em especial, Agradeço a professor Roger Peres Moura, pela ajuda durante todos esses anos de curso, por se dispor a lecionar durante aos finais de semana muitas vezes abdicando de seu tempo livre.

Agradeço aos meus amigos de graduação, mestrado e doutorado pela parceria de estudo, amizades verdadeiras e companheirismo: Júlia Peixoto, Márcio, Erisvaldo (Pajé), Pedro Rodrigues, Pedro Paulo, Christoffer (O cara mais fresco do mestrado), Edilson (Pé de cana), Francimar, Edmilson, Leonardo (Mestre Pokemón), João Vinícius (Jerisvaldo), Jean, Raimundo Bruno e Thiago Mayson (Tchá) . Não tenho como listar todos, pois sou abençoado por ter tantos amigos.

Agradeço aos meus amigos de cocal dos Alves pelas conversas, ajuda e apoio: Junior, Rodrigo (fone JBL), Denilson, Maykon (aydetico), Nayane, Eulilia, Yarla(Não é de Cocal dos Alves), Maria de Fátima, Francilene Almeida, Fábio (Zé Rosa), Kaina, Rikaelly, Isamara, Gilmara, João (João Batata) e Dário.

Agradeço aos meus professores de Ensino fundamental e médio. Em especial, agradeço ao professor Raimundo Alves, pelo ensinamentos e amizade.

Agradeço CAPES pelo apoio financeiro.

"*The victory belongs to those who believe in it the most and believe in it the longest*".

Cool. Jimmy Doolittle.

Resumo

Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v^k \partial_x v = 0 & x, t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}^+$.

Neste trabalho, vamos fazer um estudo sobre a equação Kortweg-de Vries (KdV) generalizada com $k = 1, 2$, e 4. Estudaremos a boa colocação local (BCL) para o problema de valor inicial (PVI) com $k = 1$ via princípio de contração nos espaços de Sobolev $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ com $s > \frac{3}{4}$ e espaços de Bourgain $X_{s,b}$ com $s \in (-\frac{3}{4}, 0]$ e $b \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Além disso, vai ser feito um estudo sobre Boa colocação local do PVI nos outros casos, isto é, $k = 2, 4$ $s \geqslant \frac{1}{4}$ e $s > 0$ respectivamente.

Palavras Chave: Boa Colocação Local, Equação de Korteweg-de Vries, Teorema do Ponto Fixo.

Abstract

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v^k \partial_x v = 0 & x, t \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = v_0(x). \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}^+$.

In this work, we will make study about the generalized Kortweg-de Vries (KdV) equation with $k = 1, 2$, and 4. We study local well-posedness(LWP) via contraction principle for the initial value problem with $k = 1$ in the Sobolev spaces $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ with $s > \frac{3}{4}$ and Bougain spaces $X_{s,b}$ with $s \in (-\frac{3}{4}, 0]$ and $b \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Moreover, we are going make about LWP of the PVI with $k = 2, 4$ $s \geqslant \frac{1}{4}$ and $s > 0$ respectively.

Keywords Local Well-posedness, Generalized Korteweg-de Vries Equation e Fixed Point Theorem.

Sumário

Introdução

Em 1834 o engenheiro escocês John Scott Russel estava a margem do canal de Hermiston, em Edinburgo conduzindo experimentos para projetar barcos em canais quando percebeu um fenômeno curioso o qual foi posteriormente reportado por ele da seguinte forma: *Eu estava observando o movimento de um barco que era rapidamente arrastado ao longo de um canal estreito por um par de cavalos quando de repente o barco parou de modo que a massa de água no canal que tinha sido posta em movimento acumulou-se em volta da proa da embarcação em um estado de agitação violenta e derrepente, deixando-a para trás, avançou com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, um monte de água em um formato arredondado, suave e bem definido, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Eu a segui a cavalo, e a alcancei ainda a uma velocidade de 14 km/h, preservando sua forma original com 9 metros de comprimento e de 30 a 45cm de altura. Sua altura diminuiu gradualmente e, após um perseguição de 1 ou 2 milhas, perdi-a. Tal foi, no mês de agosto de 1834, a minha primeira chance de ver aquele fenômeno singular e belo que chamei de onda de translação.*

Em 1985, D. J. Korteweg and G. de Vries, formularam um modelo matemático que fornecia uma explicação para o fenômeno observado por Scott Russel. Eles deduziram a seginte equação para modelar a propagação de ondas em uma direção numa superfície de água de densidade ϕ

$$v_t = \frac{\sqrt{gh}}{h}\left(\varepsilon + \frac{3}{2}\right) v_x + \frac{1}{2}\sigma v_{xxx}. \tag{1}$$

onde $v = v(x, t)$ com $x, t \in \mathbb{R}$ e ε é um parâmetro suficientemente pequeno veja [1] . A equação (1) é hoje conhecida como equação de Korteweg- de Vries ou abreviadamente **KdV**.

Neste trabalho, consideremos problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v^k \partial_x v = 0 \quad x, t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = v_0(x). \quad \text{(I)} \end{cases}$$

Esta família de equações em (I) é conhecida como equação de Korteweg-de Vries k-generalizada ($gKdV$). Quando k = 2, as equações recebem o nome de equação de Korteweg-de Vries modificada ($mKdV$).

Um aspecto de extrema relevância no estudo qualitativo de equações diferenciais parciais é o problema de Boa colocação, que trata da existência, unicidade e dependência contínua de soluções em relação aos dados iniciais do problema. Para ser mais preciso, dizemos que um PVI é dito bem Posto (localmente) em um espaço de banach X, quando para cada dado inicial $v_0 \in X$ existem $T > 0$ e uma, e somente uma, solução $v \in C([-T,T] : X)$ para tal PVI. Além disso, a aplicação que associa a cada $v_0 \in X$ uma solução $v \in C([-T,T] : X)$ é contínua. Caso contrário, diz que o PVI é mal posto. No que diz respeito à teoria de boa colocação para a KdV e suas generalização existem vários trabalhos desenvolvidos no sentido de obter boa colocação nos espaços de Sobolev $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ com o índice s. (Veja [6] [9] e [10]).

Neste trabalho apresentaremos a prova de boa colocação para o PVI (I) apresentada no trabalho de Kenig, Ponce e Vega em [11]. Apesar de atualmente existirem resultados de boa coloção em espaços de Sobolev com índices mais baixos o trabalho de [11] é um dos resultados mais citados na área de equações dispersivas e tem fornecido técnicas e inspirado diversos trabalho recentes. A ideia usada na prova da Boa colocação local do PVI (I) apresentada é baseada no argumento de ponto fixo para contrações, que consiste no seguinte: primeiramente definimos o operador integral associado ao PVI (I), a saber

$$\phi_{v_0}(v)(t) = \phi(v)(t) = V(t)v_0 + \int_0^t V(t-\tau)(v^k \partial_x v)(\tau)d\tau. \tag{2}$$

onde $V(t)v_0$ descreve a solução do problema linear associado com condição inicial de valor inicial v_0. Em seguida devemos provar que ϕ satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo de Banach. Para tanto, devemos determinar um espaço de Banach $Y \subseteq C([-T,T] : \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ onde ϕ seja uma aplicação contração de Y nele próprio. Para encontrar um espaço de Banach Y com tal propriedade os autores em [11] utilizam e desenvolvem várias estimativas chaves sobre o grupo de soluções do problema linear associado $\{V(t)v_0\}$. Carlos E. Kening, Gustavo Ponce e Luis Vega provaram em [11] boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 3/4$ no caso $k = 1$. Para a equação modificada eles provaram boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geqslant 1/4$. Para $k = 3$ eles provaram no mesmo artigo boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 1/12$ e para $k \geqslant 4$ eles provaram boa colocação local em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > s_k = 1/2 - 2/k$.

Apresentaremos no presente trabalho os resultados de boa colocação local para o PVI (I) para os casos $k = 1, 2, 3$ e 4. Devido às dificuldades técnicas apresentadas no caso $k = 3$ iremos omitir a demonstração desse caso, mas observaremos que a ideia utilizado no caso $k = 1$ se aplica sem grandes dificuldades, de modo que vale nesse caso boa colocação $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ para $s > 3/4$ também.

Apresentaremos também um refinamento do resultado de boa colocação para a KdV usando o método apresentado por J. Bourgain conhecido como método em [3] onde definimos espaçosos adaptados à equação em questão. Tais espaços são conhecidos como espaços de Bourgain. Usando tal técnica apresentamos a demonstração da boa colocação local para o PVI (I) para $k = 1$ no espaço $X_{s,b}$ com $s \in (-3/4, 0]$ e $b \in (1/2, 3/4)$.

Uma das maiores dificuldade apresentada no estudo da equação em (I) além dela ser não linear, a mesma apresenta derivadas na parte não-linear. Isso nos traz grandes dificuldades em estabelecer um subconjunto $Y \subsetneqq C([-T, T] : \mathbf{H}^s(\mathbb{R}))$ onde $\Psi(Y) \subseteq Y$ uma vez que, devido a presença de derivada na parte não linear da equação não é óbvio que a expressão de $\phi(v)$ tenha a mesma regularidade de v. Isso é o que chamamos de **perda de regularidade**.

A fim de assegurar que podemos encontrar um subespaço $Y \subseteq C([-T, T] : H^s(\mathbb{R}))$ no qual v e $\Psi(v)$ tenha a mesma regularidade utilizamos as seguintes ferramentas, que nos diz que podemos *ganhar* derivadas quando olhamos $\{V(t)v_0\}$ com respeito à norma do espaço $L^\infty_x L^2_t$:

$$(1). \qquad \|\partial_x V(t)v_0\|_{L^\infty_x L^2_t} \leqslant c\|v_0\|_2,$$

$$(2). \qquad \|\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} V(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L^2_x} \leqslant c\|f\|_{L^1_x L^2_t}$$

$$(3). \qquad \|\partial_x^2 \int_{0}^{t} V(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L^\infty_x L^2_t} \leqslant c\|f\|_{L^1_x L^2_t}.$$

Além da boa colocação, apresentaremos a demonstração de que o PVI (I) é mal posto em $\mathbf{H}^s$ para com $s = s_k = 1/2 - 2/k$. Birnir, Kenig, Ponce, Svanstedt e L. Vega provaram em [2] que para $k > 4$ o PVI (I) é mal posto, isto é embora possa existir uma solução, estas não satisfazem a dependência contínua em reação aos dados iniciais em $\mathbf{H}^{s_k}$.

Essa dissertação está dividida em 4 capítulos: No capítulo 1, enunciaremos algumas noções preliminares, no capítulo 2, serão estabelecidas algumas estimativas lineares que serão usadas na prova de boa colocação local do PVI (I). No capítulo 3,faremos a demostração da boa colocação local e finalmente no capítulo 4, estabeleceremos uma prova para a má colocação da equação de Korteweg- de Vries para o caso $k = 4$.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Para auxiliar na leitura deste trabalho, enunciaremos neste capítulo as definições e resultados essenciais para uma melhor compreensão do texto.

1.1 Noções Preliminares

Nesta seção enunciaremos algumas definições e resultados importantes na prova dos teoremas principais.

Definição 1.1.1. *Um espaço métrico é um par* (X, d)*, onde* X *é um conjunto e* d *é uma métrica em* X*.*

Definição 1.1.2. *Seja* X *um espaço métrico completo não vazio com uma métrica* d*. Uma aplicação* $f : X \to X$ *é dita contração uniforme, se existir uma constante* c *com* $0 \leqslant c \leqslant 1$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant c d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$*.*

Definição 1.1.3. *Seja* $T : M \to M$ *um operador onde* M *é um espaço de Hilbert. Diremos que* $x \in M$ *é um ponto fixo de* T*, se* $T(x) = x$*.*

Teorema 1.1.1. *Teorema do Ponto Fixo de Banach Considere* (X, d) *um espaço métrico completo e uma contração* $f : X \to X$*. Então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Veja a referência [15]. $\square$

Para enunciar uma das estimativas lineares é necessário definir a seguinte classe de funções.

Definição 1.1.4. *Dizemos que* $g(x,t) \in \mathcal{D}_{\otimes}(\mathbb{R}^2)$*, quando*

$$g(x,t) = \sum_{i=0}^{N} g_i(x)\tilde{g}_i(t)$$

com $g_i, \tilde{g}_i \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *para* $i = 1, ..., N$.

1.2 Espaços de Lebesgue L^p

Definição 1.2.1. *Seja* $0 < p \leqslant \infty$*. Dada* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mensurável, definimos*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}: \text{ f é mensurável e } \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty\},$$

que é chamado de espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$ *de Lebesgue.*

Observação 1.2.1. *Vamos omitir o domínio da função* f *na notação do espaço* $L^p(\mathbb{R}^n)$*, ou seja, denominaremos somente por* L^p.

A partir da definição 1.2.1, definiremos espaços L^p mistos

Definição 1.2.2. *Seja* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Definimos*

$$\|f\|_{L_x^p L_t^q} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^q dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p}.$$

e

$$L_x^p L_t^q = \{\text{f mensurável: } \|f\|_{L_x^p L_t^q} < \infty\}$$

é denominado espaços de Lebesgue misto.

Teorema 1.2.1. *(Desigualdade de Hölder)*
Seja $1 < p < \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$*. Se* $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$*, então* $fg \in L^r$ *e*

$$\|fg\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Observação 1.2.2. *Quando* $p = q = 2$ *e* $r = 1$ *a desigualdade recebe o nome de Cauchy-Schwarz.*

Demonstração. Veja referencia [4] □

Observação 1.2.3. *A desigualdade de Hölder também é válida para espaços* L^p *mistos, isto é,*

$$\|fg\|_{L_x^p L_t^q} \leqslant \|f\|_{L_x^{p_1} L_t^{q_1}} \|g\|_{L_x^{p_2} L_t^{q_2}}.$$

Onde, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *e* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.

Teorema 1.2.2. *(Desigualdade de Minkowski)*
Se $1 \leqslant p < \infty$ *e* $f, g \in L^p$, *então*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Demonstração. Veja [4]. □

Teorema 1.2.3. *(Desigualdade de Minkowski para integral) Sejam* (X, μ) *e* (Y, κ) *espaços de medidas* σ*-finitos e seja* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Se* $f(\cdot, y) \in L^p(x, \mu)$ *para quase todo* $y \in Y$, *então* $x \to \int_Y f(x, y) d\kappa(y) \in L^p(x, \mu)$ *e*

$$\| \int_Y f(\cdot, y) d\kappa(y) \|_{L^p} \leqslant \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p} d\kappa(y)$$

Observação 1.2.4. *A desigualdade de Minkowski ainda é válida para espaços Lebesgue mistos.*

Demonstração. Veja [4]. □

Teorema 1.2.4. *(Hardy-Littlewod-Sobolev)*
Dados $0 < \alpha < n, 1 \leqslant p < q < \infty$ *com* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. *Seja* I_α *o potencial de Riesz de ordem* α, *definido por*

$$I_\alpha f(x) = c_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy = k_\alpha * f(x)$$

onde $c_\alpha = \pi^{-n/2} 2^{-\alpha} \Gamma(n/2 - \alpha/2)/\Gamma(\alpha/2)$.

1. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *então a* $I_\alpha f(x)$ *é absolutamente convergente quase sempre em* $\mathbb{R}^n$

2. Se $p > 1$, *então* I_α *é do tipo forte* (p, q), *isto é,*

$$\|I_\alpha(f)\|_q \leqslant c_{p,\alpha,n}\|f\|_p$$

Demonstração. Veja [11]. □

Teorema 1.2.5. *(Interpolação de Stein) Sejam a faixa* $R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *e* $\{T_z\}_z \in R$ *uma família de operadores lineares admissíveis satisfazendo*

$$\|T_{iy}f\|_{L^{q_0}} \leqslant M_0(y)\|f\|_{L^{p_0}} \text{ e } \|T_{1+iy}f\|_{L^{q_1}} \leqslant M_1(y)\|f\|_{L^{p_1}},\ y \in \mathbb{R}^n$$

para toda função simples em L^1 *onde* $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty, M_j(y), j = 0, 1$ *não dependem de* f *e satisfaz*

$$\sup_{\infty < y < \infty} e^{-b|y|} \log M_j(y) < \infty$$

para algum $b < \pi$. *Então, para cada* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *existe uma constante* M_t *tal que*

$$\|T_t f\|_{L^{q_t}} \leqslant M_t\|f\|_{L^{p_t}}.$$

para toda função simples f *com*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{(1-t)}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{(1-t)}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Demonstração. Veja a referência [17]. □

1.3 Transformada de Fourier

Vamos definir e apresentar algumas propriedades das Transformada de Fourier nos espaços $L^1(\mathbb{R}^n)$ e schwartz denotado por $S(\mathbb{R}^n)$. Essas propriedades serão essenciais para a definição dos espaços onde o PVI (I) está bem posto, isto é , espaço de Sobolev, Bougain, onde são representados por $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$, $X_{s,b}$.

1.3.1 Transformada de Fourier em L^1

Definição 1.3.1. *A transformada de Fourier é um operador* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R})$ *definido por*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2i\pi x\cdot\xi}dx$$

onde $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$.

Além da notacão $\mathcal{F}(f)(\xi)$, também é comum o uso de $\widehat{f}(\xi)$ para designar a transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sendo esta a que será utilizada no decorrer desse texto.

A transformada de Fourier de funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as seguintes propriedades.

Teorema 1.3.1. *Dadas* $f; g \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

1. $\wedge : L^1 \to L^\infty$ *é um operador linear contínuo.*
2. $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *é uma função contínua.*
3. $\widehat{f(x-h)}(\xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi}\widehat{f}(\xi)$.
4. $\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ *(Riemman Lebesgue).*
5. $\widehat{(e^{-2\pi i x \cdot \xi} f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi - h)$.
6. *dado* $a > 0, \widehat{f(a \cdot)} = a^{-n}\widehat{f}(a^{-1}\xi)$.
7. $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$
8. $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} d\xi$

Demonstração. Veja a referência [4] □

1.3.2 Transformada de Fourier em $S(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.3.2. *Chamamos de espaço de funções* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *de decrescimento rápido, também conhecido como espaço de Schwartz, ao espaço,*

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty\}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$$

Proposição 1.3.1. *O espaço de Schwartz satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Dada* $\phi \in S(\mathbb{R}^n), P(x)\phi$ *e* $P(\partial) \in S(\mathbb{R}^n)$ *para qualquer polinômio* $P(x)$*, ou seja,* $S(\mathbb{R}^n)$ *é estável em relação à multiplicação por polinômios e à diferenciação. Em particular, dados quaisquer polinômios* $P(x), Q(x)$ *e qualquer* $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$*, temos que,* $P(x)Q(\partial)\phi \in S(\mathbb{R}^n)$*.*

2. $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p$ *com* $1 \leqslant p < \infty$

3. *Dadas* $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$*. Então,* $\phi * \psi \in S(\mathbb{R}^n)$*, ou seja, o produto de convolução é uma operação em* $S(\mathbb{R}^n)$*.*

Corolário 1.3.1. *Todas as propriedades de* $\mathcal{F}$ *em* L^1 *valem para* $\mathcal{F}|_{S(\mathbb{R}^n)}$ *.*

Então, podemos definir novas propriedade para transformada de Fourier com o adicional que as funções possuem derivadas.

Teorema 1.3.2. *Se* $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$*, então*

1. $\widehat{\partial^\alpha \phi}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\phi}(\xi)$

2. $\widehat{(2\pi i \xi)^\alpha \phi}(\xi) = \partial^\alpha \widehat{\phi}$

3. $\widehat{\phi} \in S(\mathbb{R}^n)$

Demonstração. Veja [4]. □

Proposição 1.3.2. *Seja* $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$*.Então,para* $\widehat{\phi} \in S(\mathbb{R}^n)$ *vale a fórmula de inversão*

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.3.3. *(identidade de Parseval)*
Sejam $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}(\xi)\psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\widehat{\psi}(x) dx.$$

Demonstração. Veja [4]. □

1.3.3 Transformada de Fourier em L^2

Diferentemente das funções em L^1 e $S(\mathbb{R}^n)$, a Transformada de Fourier da função $\phi \in L^2$ não podem ser calculada pela fórmula

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2i\pi x\cdot\xi}dx$$

Para definir, toma -se uma sequencia de funções ϕ_k no espaço de Schwartz **S** e analisa a convergência usando teorema de Plancharel, isto é, o limite dessa sequência é a transformada de fourier em L^2.

Teorema 1.3.3. *(Plancharel)*

Se $\phi \in L^1 \cap L^2$, então $\widehat{\phi} \in L^2$. Além disso, $\mathcal{F}|_{L^1\cap L^2}$ estendem unicamente a um isomorfismo unitário em L^2. Além disso, se $\phi \in L^2$, então

$$\|\widehat{\phi}\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}.$$

Demonstração. Veja [4]. □

Definição 1.3.3. *Seja $\phi \in L^2$. Definiremos a transformada de fourier de $\phi \in L^2$ e a transformada inversa por*

$$\widehat{\phi} = \lim_{k\to\infty} \widehat{\phi}_k \qquad \check{\phi} = \lim_{k\to\infty} \check{\phi}_k$$

onde $\{\phi_k\}$ é uma sequencia de funções em $S(\mathbb{R}^n)$ que converge para $\phi \in L^2$.

1.3.4 Transformada de Fourier em $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$

Nas subseções 1.3.1, 1.3.3 definimos a transformada de fourier em L^1 e L^2 respectivamente. pelo teorama de Plancharel definimos continuamente a transformada de fourier com $1 \leqslant p \leqslant 2$. Por outro lado, não se pode definir a transformada de fourier em espaços de L^p com $p > 2$ via esse mesmo argumento .

Então nesta seção vamos definir distribuição temperada e a transformada de fourier em $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$ para posteriomente definir a transformade fourier em L^p com $p > 2$.

Definição 1.3.4. *Dizemos que o funcional Ψ defini uma distribuição quando*

1. *Ψ é linear.*

2. *Ψ é contínua, isto é, para toda sequência $\{\phi_j\} \subseteq \mathbf{S}(\mathbb{R})$ tal que $\phi_j \to 0$ quando $j \to \infty$ então, a sequência numérica $\Psi(\phi_j) \to 0$ quando $j \to \infty$.*

$\mathbf{S}'(\mathbb{R})$ é conhecido como espaços das distribuições temperadas.

Observação 1.3.1. *Para quaisquer função f limitada podemos definir uma distribuição temperada. De fato,considere*

$$\Psi_f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx.$$

Esta identidade também pode ser usada para definir uma distribuição temperada para toda função em $f \in L^p$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Exemplo 1.3.1. *Um exemplo de distribuição é função $v.p(\phi)$ denominada valor principal de ϕ. Seja $\phi \in \mathbf{S}$, então podemos definir $v.p(\phi)(x)$ como*

$$v.p(\phi)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |x| < 1/\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

A prova que a função valor principal é uma distribuição temperada pode ser vista em [16].

Definição 1.3.5. *Para todo funcional linear $\Psi \in \mathbf{S}'(\mathbb{R})$ a transformada de fourier de $\widehat{\Psi} \in \mathbf{S}'(\mathbb{R})$ é definida por*

$$\widehat{\Psi}(\phi) = \Psi(\widehat{\phi})$$

para toda $\phi \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$.

Agora, pode-se enunciar algumas propriedades da Transformada de Fourier em $\mathbf{S}'(\mathbb{R})$

Teorema 1.3.4. *A Transformada Fourier da função $\Psi :\in \mathbf{S}'(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbf{S}'(\mathbb{R})$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\widehat{(\partial^\alpha \Psi)}(\xi) = (2\pi i)^\alpha \widehat{\Psi}(\xi)$, *para qualquer multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

2. $\widehat{(-2\pi x)^\alpha \Psi}(\xi) = \partial_\xi^\alpha \widehat{\Psi}(\xi)$.

3. $\widehat{(\Psi(x-h))}(\xi) = e^{2\pi i h \xi} \widehat{\Psi}(\xi)$.

4. $\widehat{(e^{2\pi x h} \Psi)}(\xi) = \widehat{\Psi}(\xi - h)$.

Demonstração. Veja a referência [14]. □

1.4 Espaço de Sobolev

Nesta seção, vamos introduzir a teoria de espaço de Sobolev do tipo $\mathbf{H}^s$, denotado por $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Este espaço é importante na prova da boa colocação do PVI (I). Para simplificar a notação, vamos utilizar $\mathbf{H}^s$ ao invés de $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$.

Definição 1.4.1. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço de Sobolev $\mathbf{H}^s$ como o conjunto*

$$\mathbf{H}^s = \{f \in \mathbf{S}'(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

com a norma definida por

$$\|f\|_{s,2} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Proposição 1.4.1. *Sejam $f, g \in \mathbf{H}^s$. Então,*

1. *Se $0 \leqslant s < r$, então $\mathbf{H}^r \subsetneq \mathbf{H}^s$.*

2. *$\mathbf{H}^s$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno*
$$\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi)\overline{(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

3. *Para to do $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathbf{H}^s$.*

4. *Se $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, com $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, então*
$$\|f\|_{\mathbf{H}^s} \leqslant \|f\|_{\mathbf{H}^{s_1}}^{\theta}\|f\|_{\mathbf{H}^{s_2}}^{(1-\theta)}, \quad \forall f \in \mathbf{H}^{s_2}.$$

Demonstração. Veja a referência [16]. □

Teorema 1.4.1. *Se $s > \frac{n}{2} + k$, então $\mathbf{H}^s \hookrightarrow C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$. Em outros termos, se $f \in \mathbf{H}^s$ então $f \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f\|_{C^k} \leqslant C_s\|f\|_{s,2}.$$

Demonstração. Veja a referência [16]. □

Teorema 1.4.2. *(Imersão de Sobolev) Se $s \in (0, n/2)$, então $\mathbf{H}^s \hookrightarrow L^p$ com $p = 2n/(n-2s)$, i.e, $s = n(1/2 - 1/p)$. Além disso, para $f \in \mathbf{H}^s, s \in (0, n/2)$*

$$\|f\|_{L^p} \leqslant c_{n,s}\|D^s f\|_2 \leqslant c\|f\|_{s,2}.$$

onde

$$D^s f = (-\Delta)^{s/2} f = ((2\pi|\xi|)^s\widehat{f})^\vee.$$

Demonstração. Veja a referência [16]. □

1.5 Espaços de Bourgain

Nesta seção, vamos enunciar algumas propriedades de um espaço criado por Jean Bougain e que recebeu seu nome em sua homenagem e será denotado por, $X_{s,b}$. Este espaço e algumas estimativas provadas nele são utilizados na demostração do PVI (I). Para definir-lo, toma-se funções no espaço de Schwartz.

Definição 1.5.1. *Para* $s, b \in \mathbb{R}$ *e* $f \in S'(\mathbb{R})$ *dizemos que* $f \in X_{s,b}$, *se*

$$\|f\|_{X_{s,b}} < \infty,$$

onde, $\|f\|_{X_{s,b}} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\tau - \xi^3|)^{2b} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{f}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}$

Observação 1.5.1. *Sendo* $\widehat{J^s f}(\xi) = (1 + |\xi|)^s \widehat{f}(\xi)$ *e* $\widehat{\Lambda^b f}(\tau) = (1 + |\tau - \xi^3|)^b \widehat{f}(\tau)$ *então, podemos redefinir a norma em* $X_{s,b}$ *por :*

$$\|f\|_{X_{s,b}} = \|\Lambda^b J^s V(-t) f\|_{L^2_\xi L^2_\tau}$$

Corolário 1.5.1. *Se* $b > \frac{1}{2}$, *então*

$$X_{s,b} \subset C((-\infty, \infty) : \boldsymbol{H}^s(\mathbb{R}))).$$

Demonstração. Veja [16]. □

Lema 1.5.1. *Se* $l > \frac{1}{2}$, *então existe* $c > 0$ *tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + |x - \alpha|)^{2l} (1 + |x - \beta|)^{2l}}) \leqslant \frac{c}{(1 + |\alpha - \beta|)^{2l}} \tag{1.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + |x|)(\sqrt{|a - x|})} \leqslant \frac{c}{(1 + |a|)^{1/2}} \tag{1.2}$$

Demonstração. veja [16] □

1.6 Transformada de Hilbert

Vamos definir transformada de Hilbert para funções no espaço de Schwartz. Essa importante ferramenta vai auxiliar na mudança da derivada do tipo usual para derivada fracionária em espaço de Sobolev do tipo $\mathbf{H}^s$.

Definição 1.6.1. *(Função valor principal de $\frac{1}{x}$)*
A função valor principal de $\frac{1}{x}$ denotado por $v.p.\frac{1}{x}$ é definida pela expressão

$$v.p.\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx$$

onde ϕ é uma distribuição.

Definição 1.6.2. *A transformada de Hilbert é a distribuição temperada $\mathcal{H} : S \to \mathbb{C}$ definida pela convolução do funcional $v.p.\frac{1}{x}$ por funções de S. Ou seja, dada uma função $\phi \in S(\mathbb{R})$ definimos sua transformada de Hilbert pela seguinte expressão:*

$$\mathcal{H}\phi(y) = \frac{1}{\pi}v.p.\frac{1}{x} * \phi(y) = \frac{1}{\pi}v.p.\frac{1}{x}((\phi)(-y))$$

Teorema 1.6.1. *$\mathcal{H}$ é do tipo forte (p, p), se $1 < p < \infty$, ou seja,*

$$\|\mathcal{H}\phi\|_{L^p} \leqslant C_p\|\phi\|_{L^p}, \quad \forall\phi \in L^p(\mathbb{R}).$$

Demonstração. A demostração pode ser vista no capítulo 3 da referência [13]. □

Capítulo 2

Estimativas lineares

2.1 Estimativas lineares para equação KdV

Neste capítulo, vamos estabelecer estimativas para soluções do PVI homogêneo e não-homogêneo:

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v = f, \quad x, t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $f \in C(\mathbb{R} : \mathbf{S})$. Primeiramente, considere $f \equiv 0$, então aplicando a transformar de Fourier no PVI (2.1) transformaremos a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária (EDO). De fato, para cada ξ fixo,temos

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{v}(\cdot, t) + (2i\pi\xi)^3 \widehat{v}(\cdot, t) = 0 \\ \widehat{v}(\xi, 0) = \widehat{v}_0(\xi). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira parte da EDO por $e^{(2i\pi\xi)^3 t}$.

$$\partial_t \widehat{v}(\cdot, t) e^{(2i\pi\xi)^3 t} + (2i\pi\xi)^3 \widehat{v}(\cdot, t) e^{(2i\pi\xi)^3 t} = 0$$

Assim,

$$\partial_t (\widehat{v}(\cdot, t).e^{(2i\pi\xi)^3 t}) = 0 \tag{2.1}$$

Pelo teorema fundamental cálculo

$$\widehat{v}.e^{(2i\pi\xi)^3 t} = c \tag{2.2}$$

Substituindo $t = 0$ em (2.2) obtemos que $c = \widehat{v}_0 \in \mathbf{S}$ e aplicando a formula de inversão para transformada de fourier obtemos

$$v(x,t) = \left(e^{(2i\pi\xi)^3 t}\right)^{\vee} * v_0(x) = (e^{8\pi i t\xi^3}\widehat{v}_0)^{\vee}(x) \tag{2.3}$$

Logo podemos definir uma solução para o PVI (2.1) no caso linear homogêneo da seguinte maneira

$$v(x,t) = V(t)v_0(x) \tag{2.4}$$

Considerando a função f não identicamente nula no PVI (2.1) procedemos de modo análogo caso ao anterior para obter

$$\partial_t \widehat{v} e^{(2i\pi\xi)^3 t} + (2i\pi\xi)^3 \widehat{v} e^{(2i\pi\xi)^3 t} = e^{(2i\pi\xi)^3 t}\widehat{f},$$

Assim,

$$\widehat{v}(\xi,t)e^{2\pi i\xi^3 t} = \widehat{v}_0(\xi) + \int_0^t e^{2\pi i\xi^3\tau}\widehat{f}(\xi,\tau)d\tau. \tag{2.5}$$

Multiplicando por $e^{-2\pi i\xi^3 t}$ e aplicando a fórmula de inversão da transformada de fourier em (2.5), definiremos formalmente que v é solução do PVI (2.1) e satisfaz (2.6):

$$v(x,t) = V(t)v_0(x) + \int_0^t V(t-\tau)f(x,\tau)d\tau \tag{2.6}$$

Agora temos determinar as seguintes estimativa lineares para o grupo $V(t)$ definido em (2.3).

Lema 2.1.1. *O grupo* $\{V(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ *satisfaz:*

1.

$$\|\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant c\|v_0\|_2, \tag{2.7}$$

2.

$$\|\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} V(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^2} \leqslant c\|f\|_{L_x^1 L_t^2}, \tag{2.8}$$

3.

$$\|\partial_x^2 \int_0^t V(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant c\|f\|_{L_x^1 L_t^2}. \tag{2.9}$$

Demonstração. 1.) Para simplificar os cálculos vamos omitir o fator 2π da transformada de fourier.

Note que a solução do PVI. (2.1) é dada por $v(t) = V(t)v_0(x) = S_t * v_0(x)$, onde

$$S_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x\xi} e^{8\pi i t\xi^3} d\xi,$$

Omitindo 2π, isto é, podemos definir a transformada de fourier sem o fator 2π e fazendo a mudança de variável $\xi^3 = \eta$ temos,

$$\partial_x V(t)v_0(x) = \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\eta+t\xi^3)}\widehat{v}_0(\xi)d\xi = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta}e^{ix\eta^{1/3}}\eta^{(-2/3+1/3)}\widehat{v}_0(\eta^{1/3})d\eta$$

Assim pela identidade de Plancherel na variável t, temos:

$$\begin{aligned}\|\partial_x V(tv_0)\|_{L_t^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta^{1/3}}\eta^{-2/3+1/3}\widehat{v}_0(\eta^{1/3})d\eta\right|^2 dt \\ &= \frac{1}{9}\int_{-\infty}^{\infty} |e^{ix\eta^{1/3}}\eta^{-2/3+1/3}\widehat{v}_0(\eta^{1/3})|^2 d\eta \\ &\leqslant c\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{v}_0|^2 d\xi = c\|v_0\|_2.\end{aligned}$$

2.)

Para provar (2.8) usaremos o argumento de dualidade,propriedade do grupo, integral por partes, desigualdade de Hölder, Teorema de Fubini e estimativa (2.7). Então dada $g \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned}\|\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} V(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^2} &= \|\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} V(-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^2} \\ &= \sup_{\|g\|_{L_x^2}=1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\left(\int_{-\infty}^{\infty} V(-\tau)f(x,\tau)d\tau\right)g(x)dx\right|\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\int_{-\infty}^{\infty}V(-\tau)f(x,\tau)d\tau g(x)dx\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\int_{-\infty}^{\infty}V(-\tau)f(x,\tau)g(x)d\tau dx\right|\\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\tau)V(\tau)g(x)d\tau dx\right|\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,\tau)\partial_x V(\tau)g(x)|d\tau dx\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\|f(\cdot)\|_{L^2_t}\|\partial_x V(\tau)g(\cdot)\|_{L^2_t}dx\\ &\leqslant \|f\|_{L^1_xL^2_t}\|\partial_x V(\tau)g\|_{L^\infty_xL^2_t}\\ &\leqslant c\|f\|_{L^1_xL^2_t}\|g\|_{L^2_x}.\end{aligned}$$

Portanto pelo argumento de dualidade e sabendo que $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ é denso em L^2_x obteremos o resultado.

3.)

Analogamente ao caso 2.) e usando a estimativa da observação (2.9) temos:

$$\|\partial_x^2\int_0^t V(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L^\infty_xL^2_t} = \sup_{\|g\|_{L^1_xL^2_t}=1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x^2\int_0^t V(t-\tau)f(x,\tau)d\tau g(x,t)dxdt\right|$$

Daí,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x^2\int_0^t V(t-\tau)f(x,\tau)d\tau g(x,\tau)dxdt\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 \int_0^t V(-\tau)f(x,\tau)d\tau V(-t)g(x,t)dxdt \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 \left(\int_0^t V(-\tau)f(x,\tau)d\tau \right) \int_{-\infty}^{\infty} V(-t)g(x,t)dtdx \right| \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \partial_x \int_0^t v(-\tau)f(x,\tau)d\tau \right| \left| \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} V(-t)g(x,t)dt \right| dx \\
&\leqslant \|\partial_x \int_0^t V(-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^2} \|\partial_x \int_{-\infty}^{\infty} V(-t)g(\cdot,t)dt\|_{L_x^2} \\
&\leqslant c\|f\|_{L_x^1 L_t^2} \|g\|_{L_x^1 L_t^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto por dualidade e argumento de densidade segue o resultado. □

Lema 2.1.2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$
|I^t(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\xi + t\xi^3)} \frac{d\xi}{|x|^{1/2+i\gamma}} \right| \leqslant c \frac{(1+|\gamma|)}{|x|^{1/2}} \tag{2.10}
$$

para γ real.

Demonstração. Veja a referência [16] □

Lema 2.1.3. *Dado $\lambda \in \mathbb{R}$,temos que existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$
\|V(t)v_0\|_{Lx^4 L_t^\infty} \leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 \tag{2.11}
$$

$$
\|D_x^{-\frac{1}{2}+i\lambda} \int_0^t V(t-\tau)f(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leqslant c\|f\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_t^1} \tag{2.12}
$$

Demonstração. Para provar (2.11) é suficiente mostrar que $\|D_x^{-\frac{1}{4}} V(t)V_0\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leqslant c\|v_0\|_2$. De fato, pelo de argumento dualidade, temos que

$$
\|D_x^{-\frac{1}{4}} V(t)v_0\|_{L_x^4 L_t^\infty} = \sup_{\|u\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_t^1}=1} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}} V(t)v_0(x)u(x,t)dxdt \right|
$$

Ora, Pela propriedades do grupo solução, teorema de Fubini e pela desigualdade de Hölder temos:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(t)v_0(x)\psi(x,t)dxdt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} v_0(x)\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(-t)\psi(x,t)dtdx\right|$$
$$\leqslant \|v_0\|_2 \, \|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(-t)\psi(\cdot,t)\|_{L_x^2} \qquad (2.13)$$

Resta estimar (2.3). Então pela definição da norma em L_x^2, teorema de Fubini e desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned}
\|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(-t)\psi(\cdot,t)dt\|_{L_x^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(-t)\psi(x,t)dt\,\overline{\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(-\tau)\psi(x,\tau)dxd\tau}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(-t)\psi(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(-\tau)\overline{\psi(x,\tau)}d\tau dxdt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} V(-t)\psi(x,t)dxdt\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{2}}V(-\tau)\overline{\psi(x,\tau)}dxd\tau\\
&\leqslant \|\psi\|_{L_x^{4/3}L_t^1}\|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{2}}V(t-\tau)\psi(x,\tau)\|_{L_x^4L_t^\infty}. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Veja que, usando a definição da derivada fracionária e a estimativa (2.10) temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{2}}V(t-\tau)\psi(x,\tau)d\tau\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}((2\pi\xi)^{-\frac{1}{2}}) * V(t-\tau)\psi(x,\tau)]d\tau\right|\\
&= \left|\int_{-\infty}^{\infty} I^{t-\tau} * \psi(\cdot.\tau)d\tau\right|\\
&\leqslant |I^{t-\tau}| * \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\cdot,\tau)|d\tau \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Então de (2.14), (2.15) e da desigualdade de Hard-Littlewood=Sobolev obtemos que:

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{-\frac{1}{4}}V(-t)\psi(\cdot,t)dt\right\|_{L_x^2}^2 &\leqslant \|\phi\|_{L_x^{4/3}L_t^1}\left\||I^{t-\tau}| * \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\cdot,\tau)|d\tau\right\|_{L_x^4L_t^\infty}\\
&\leqslant \|\psi\|_{L_x^{4/3}L_t^1}\left\|\frac{c}{|x|^{\frac{1}{2}}} * \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\cdot,\tau)|d\tau\right\|_{L_x^4L_t^\infty}\\
&\leqslant c\|\psi\|_{L_x^{4/3}L_t^1}^2. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Portanto, De (2.13), (2.16) e por dualidade chegaremos ao resultado, isto é,

$$\|D_x^{-\frac{1}{4}}V(t)v_0\|_{L_x^4L_t^\infty} \leqslant c\|v_0\|_2$$

A demostração da desigualdade (2.12) é análoga a (2.11). □

Lema 2.1.4. *Valem as seguintes estimativas.*

1). Se $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$*, então*

$$\|V(t)v_0\|_{L_x^5L_t^{10}} \leqslant c\|v_0\|_{L^2} \tag{2.17}$$

2). Se $g \in L_x^{5/4}L_t^{10/9}$*, então*

$$\|\int_0^t V(t-\tau)g(\tau)d\tau\|_{L_x^5L_t^{10}} \leqslant c\|g\|_{L_x^{5/4}L_t^{10/9}}. \tag{2.18}$$

Demonstração. Para provar (2.17), vamos usar o teorema de interpolação de Stein. Então,vamos considerar uma família analítica de operadores,dada por

$$T_z v_0 = D_x^{-z/4}D_x^{(1-z)}V(t)v_0$$

com $z \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant \mathcal{R}ez \leqslant 1$. Daí, tomando $z = i\lambda$,

$$T_{i\lambda}v_0 = \partial_x V(t)D_x^{-i5\lambda/4}\mathcal{H}v_0$$

Pela estimativa (2.7).

$$\|T_{i\lambda}v_0\|_{L_x^\infty L_t^2} = \|\partial_x V(t)D_x^{-i5\lambda/4}\mathcal{H}v_0\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant c\|D_x^{-i5\lambda/4}\mathcal{H}v_0\|_2 \leqslant \|v_0\|_2$$

. Por outro lado, tomando $z = 1 + i\lambda$, então

$$T_z v_0 = D_x^{-z/4}D_x^{(1-z)}V(t)v_0 = D_x^{-1+i\lambda/4}D_x^{(i\lambda)}V(t)v_0$$

Logo pela estimativa (2.11), temos

$$\|T_{1+i\lambda}v_0\|_{L_x^4L_t^\infty} = \|D_x^{-1/4-i\lambda/4}D_x^{-i\lambda}V(t)v_0\|_{L_x^4L_t^\infty} \leqslant c\|v_0\|_2$$

Portanto escolhendo $z = 4/5$ o esultado segue do teorema de interpolação de Stein. Argumentando de maneira similar a prova de (2.17) obtém-se uma demostração para (2.18). Veja o corolário 3.8 em [11] □

Lema 2.1.5. *Se* $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$, *então*

$$\|D_x V(t)v_0\|_{L^{20}_x L^{5/2}_t} \leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 \tag{2.19}$$

Demonstração. Veja Linares e Ponce [16]. □

Lema 2.1.6. *Se* $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$, *então*

$$\|D_x^{\frac{1}{4}} V(t)v_0\|_{L^4_t L^\infty_x} \leqslant c\|v_0\|_2 \tag{2.20}$$

Demonstração. Veja Kenig, Ponce e Vega [11]. □

Lema 2.1.7. *Seja* $s > 3/4$. *Então, para todo* $v_0 \in \mathbf{H}^s$ *e* $\rho > 3/4$

$$\|V(t)v_0\|_{L^2_x L^\infty_T} \leqslant c\|v_0\|_2 \tag{2.21}$$

Demonstração. veja [10]. □

Lema 2.1.8. *(* ***Regra de Leibniz*** *)*
Sejam $\alpha \in (0,1), \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ *com* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. *Sejam*
$q, p, p_1, q_2 \in (1,\infty), q_1 \in (1,\infty]$ *tal que* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *e* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.
Seja $f = f(x,t), g = g(x,t)$.*Então,*

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L^p_x L^q_t} \leqslant c\|D_x^{\alpha_1} f\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T}\|D_x^{\alpha_2} g\|_{L^{\rho_2}_x L^{q_2}_T} \tag{2.22}$$

Além disso, se $\alpha_1 = 0$ *o resultado é válido para* $q_1 = \infty$.

Demonstração. Veja [11]. □

Lema 2.1.9. *(****Regra da Cadeia****) Seja* $\alpha \in (0,1)$ *e* $p, q, p_1, p_2, q_2 \in (1,\infty]$ *tal que*
$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *e* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.*Então,*

$$\|D^\alpha F(f)\|_{L^p_x L^q_T} \leqslant c\|F'(f)\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T}\|D^\alpha f\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_T} \tag{2.23}$$

Demonstração. Veja [11]. □

Lema 2.1.10. *Seja* $k \geqslant 4$,$s_k = (k-4)/2k$ *e* p, q, α_k, β_k *definidos por:*
$\alpha_k = \frac{1}{10} - \frac{2}{5k}, \beta_k = \frac{3}{10k} - \frac{6}{5k}, \frac{1}{p} = \frac{2}{5k} + \frac{1}{10}, \frac{1}{q} = \frac{3}{10} - \frac{4}{5k}$, *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$.
Seja $\alpha, \beta > 0$ *e* $u_0 \in \boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ *e* $g \in \mathcal{D}_\otimes(\mathbb{R}^2)$.*Então*

$$\|D_x^\alpha D_t^{\beta/3} D_x^{\alpha_k} D_t^{\beta_k} V(t)u_0\|_{L^p_x L^q_t} \leqslant c\|D^{\alpha+\beta} D^{s_k} u_0\|_2. \tag{2.24}$$

$$\left\| D_t^{\beta/3} D_x^{\alpha_k} D_t^{\beta_k} \int_0^t V(t-\tau) g(\tau) \right\|_{L_x^p L_t^q} \leqslant c\{\|D_x^{\beta} g\|_{L_x^{p'} L_t^{q'}} + \|D_t^{\beta/3} g\|_{L_x^{p'} L_t^{q'}}\} \tag{2.25}$$

Demonstração. Veja [11]. □

2.2 Estimativas Lineares em espaços de Bourgain

O objetivo dessa seção é estabelecer estimativas necessárias para estudar a boa colocação para equação KdV (i.é, caso $k = 1$) usando espaços de Bourgan.

No que segue consideraremos para cada $\rho > 0$ a função $\theta_\rho : \mathbb{R} \to [0, 1]$ que é denominada por função molificadora observe que θ_ρ satisfaz as seguintes propriedades: $\mathrm{supp}\theta_\rho \subset [1, 2]$ e $\theta_\rho \equiv 1$ para $t \to 0$.

Lema 2.2.1. *Para todo* $b > \frac{1}{2}$ *e* $s \in \mathbb{R}$

$$\|\theta_\rho V(t) v_0\|_{X_{s,b}} \leqslant c\rho^{(1-2b)/2} \|v_0\|_{s,2} \tag{2.26}$$

Demonstração. Seja $v_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ e uma função molificadora definida acima. Para facilitar os cálculos vamos considerar a transformada inversa de Fourier sem o fator 2π. Então, considerando

$$\begin{aligned} \theta_\rho(t) V(t) v_0 &= \theta_\rho(t) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{it\tau} \delta(\tau - \xi^3) \widehat{v}_0 d\xi d\tau \\ &= \theta\left(\frac{t}{\rho}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{it\tau} \delta(\tau - \xi^3) \widehat{v}_0 d\xi d\tau \end{aligned} \tag{2.27}$$

Tem-se que $\widehat{\theta_\rho(t) V(t) v_0}(\xi, \tau) = \rho \widehat{\theta}(\rho(\tau - \xi^3)) \widehat{v}_0(\xi)$. Então,
$\|\theta_\rho(t) V(t) v_0\|^2_{X_{s,b}}$

$$\begin{aligned} &= c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - \xi^3|)^{2b} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{\theta_\rho(t) V(t) v_0}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - \xi^3|)^{2b} (1 + |\xi|)^{2s} |\rho \widehat{\theta}(\rho(\tau - \xi^3)) \widehat{v}_0(\xi)|^2 d\xi d\tau \\ &= c \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|)^{2s} |\widehat{v}_0(\xi)|^2 \left(\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - \xi^3|)^{2b} |\widehat{\theta}(\rho(\tau - \xi^3))|^2 d\tau \right) d\xi \end{aligned} \tag{2.28}$$

Denotemos

$$\mathbf{I} = \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - \xi^3|)^{2b} |\widehat{\theta}(\rho(\tau - \xi^3))|^2 d\tau.$$

Para completar a demostração de (2.26), resta estimar $\mathbf{I}$. Daí, como $\frac{1}{2} < b < 1$, $\rho \in (0,1]$ e usando o fato que a função molificadora tem $supp \theta_\rho \subseteq [0,1]$ bem como o teorema de Plancharel, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &\leqslant c\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\theta}(\rho(\tau - \xi^3))|^2 d\tau + c\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \xi^3|^{2b} |\widehat{\theta}(\rho(\tau - \xi^3))|^2 d\tau \\
&= c\rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\theta}(\rho(\tau - \xi^3))|^2 d\tau + c\rho^{2-2b} \int_{-\infty}^{\infty} |\rho(\tau - \xi^3)|^{2b} |\widehat{\theta}(\rho(\tau - \xi^3))|^2 d\tau \\
&\leqslant c\rho + c\rho^{1-2b} \leqslant c\rho^{1-2b}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Portanto, de (2.28) e (2.29) obtem-se (2.26) □

Lema 2.2.2. *Para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e* $\frac{1}{2} < b \leqslant 1$

$$\|\theta_\rho v\|_{X_{s,b}} \leqslant c\rho^{(1-2b)/2} \|v\|_{X_{s,b}}. \tag{2.30}$$

Demonstração. Para toda função $v \in X_{s,b}$ tem-se que $\widehat{\theta_\rho(t) v(x,t)}^{(t)}(\tau) = \widehat{v} * (\widehat{\rho\theta(\rho\cdot)})^{(t)}(\tau)$. Usando a definição do conjunto $X_{s,b}$ podemos reduzir a prova de (2.30) para caso $s = 0$ e $a \in \mathbb{R}$, ou seja, basta provarmos

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - a|)^{2b} |\widehat{\theta_\rho(t) v(\tau)}|^2 d\tau \leqslant c\rho^{(1-2b)/2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - a|)^{2b} |\widehat{v(\tau)}|^2 d\tau$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho\widehat{\theta}(\rho\tau)| d\tau < \infty.$$

temos pela desigualdade de Young para convolução que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau - a|)^{2b} |\widehat{\theta_\rho(t) v_0}(\tau)|^2 d\tau &\leqslant c \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\theta_\rho(t) v}(\tau)|^2 d\tau + c \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - a|^{2b} |\widehat{\theta_\rho(t) v}(\tau)|^2 d\tau \\
&\leqslant c \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{v}(\tau)|^2 d\tau + c \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - a|^{2b} |\widehat{\rho\theta(\rho\cdot)} * \widehat{v}(\tau)|^2 d\tau
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau - a|^{2b} |\widehat{\rho\theta(\rho\cdot)} * \widehat{v}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |D_t^b (e^{iat} v(t)) \theta(\frac{t}{\rho})|^2 dt.$$

Então, pela estimativa (2.22) e sabendo que $\|\theta\|_{L^\infty_t} \leqslant c$ segue que

$\|D^b_t(e^{iat}v(t)\theta(\frac{t}{\rho}))\|_{L^2_t}$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \| \|D^b_t\left(e^{iat}v(t)\theta\left(\frac{t}{\rho}\right)\right) - e^{iat}v(t)D^b_t\left(\theta\left(\frac{t}{\rho}\right)\right)\|_{L^2_t} + \|e^{iat}v(t)D^b_t(\theta(\frac{t}{\rho}))\|_{L^2_t}\\
&\leqslant \|\theta(\frac{t}{\rho})\|_{L^\infty_t}\|D^b_t(e^{ait}v)\|_{L^2_t} + \|e^{iat}v(t)D^b_t\left(\theta\left(\frac{t}{\rho}\right)\right)\|_{L^2_t}\\
&\leqslant c\|D^b_t(e^{ait}v)\|_{L^2_t} + \|e^{iat}v(t)D^b_t\left(\theta\left(\frac{t}{\rho}\right)\right)\|_{L^2_t}. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hólder, imersão de Sobolev e identidade Plancharel, temos que

$$\begin{aligned}
\|e^{iat}v(t)D^b_t\left(\theta\left(\frac{t}{\rho}\right)\right)\|_{L^2_t} &\leqslant \|e^{iat}v\|_{L^\infty_t}\|D^b_t\theta(\rho^{-1})\|_{L^2_t}\\
&\leqslant \|e^{iat}v\|_{b,2}\|\theta\|_{\mathbf{H}^s}\\
&\leqslant c\rho^{1-2b}\|v\|_{X_{0,b}}\|\theta\|_{\mathbf{H}^s}. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Isso conclui a demostração. □

Lema 2.2.3. *Seja* $w(x,t) = \int\limits_0^t V(t-\tau)h(\tau)d\tau$. *Se* $\frac{1}{2} < b \leqslant 1$, *então*

$$\|\theta_0 w\|_{X_{s,b}} \leqslant c\rho^{(1-2b)/2}\|h\|_{X_{s,b-1}} \qquad (2.33)$$

Demonstração. Primeiramente notemos que

$$\begin{aligned}
\theta_\rho(t)\int\limits_0^t V(t-\tau)h(\tau)d\tau &= \theta_\rho(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\frac{e^{it\tau}-e^{it\xi^3}}{\tau-\xi^3}\widehat{h}(\xi,\tau)d\xi d\tau\\
&= \theta_\rho(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\frac{e^{it\tau}-e^{it\xi^3}}{\tau-\xi^3}\theta(\tau-\xi^3)\widehat{h}(\xi,\tau)d\xi d\tau\\
&+ \theta_\rho(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\frac{e^{it\tau}-e^{it\xi^3}}{\tau-\xi^3}(1-\theta(\tau-\xi^3))\widehat{h}(\xi,\tau)d\xi d\tau\\
&= \mathbf{I}+\mathbf{II}. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Pela expansão de Taylor, temos que

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\theta_\rho(t)t^k\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{it\xi^3}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}(\xi,\tau)(\tau-\xi^3)^{k-1}\theta(\tau-\xi^3)d\tau\right)d\xi$$

Sendo, $t^k\theta_\rho(t) = \rho^k(\frac{t}{\rho})^k\theta(\rho^{-1}t) = \Phi_k(t)$ e $b < 1$, fazendo a mudança de variável e usando identidade Plancharel segue que

$$
\begin{aligned}
\|(1+|\tau|)^b\widehat{\Phi}_k\|^2_{L^2_\tau} &= \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\Phi}_k(\rho\tau)|^2(1+|\tau|)^{2b}d\tau \\
&\leqslant \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}_k(\rho\tau)|^2 d\tau + \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}_k(\rho\tau)|^2|\tau|^{2b}d\tau \\
&\leqslant c\rho^{(1-2b)}(\|\widehat{\Phi}_k\|^2_{L^2_\tau} + \|D^b_t\Phi_k\|^2_{L^2_\tau}) \\
&\leqslant c\rho^{(1-2b)}(\|\widehat{\Phi}_k\|^2_{L^2_\tau} + \|D_t\Phi_k\|^2_{L^2_\tau}) \\
&\leqslant \rho^{(1-2b)}(1+k)^2.
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Daí, por (2.35), argumentando de maneira semelhante a prova de (2.26), teorema de Fubini e a transformada inversa, temos

$$
\begin{aligned}
I &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\theta_\rho(t)t^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{it\xi^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\xi,\tau)(\tau-\xi^3)^{k-1}\theta(\tau-\xi^3)d\tau\right)d\xi \right\|_{X_{s,b}} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\phi_k(\rho\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{it\xi^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(\xi,\tau)(\tau-\xi^3)^{k-1}\theta(\tau-\xi^3)d\xi\right)d\tau \right\|_{X_{s,b}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+k)^2}{k!}\rho^k\rho^{(1-2b)} \left\| \left(\int_{\infty} \widehat{h}(\xi,\tau)(\tau-\xi^3)^{k-1}\theta(\tau-\xi^3)d\tau\right)^{\vee} \right\|^2_{\mathbf{H}^s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+k)^2}{k!}\rho^k\rho^{(1-2b)} \int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}\left(\int_{\infty}^{\infty} |\widehat{h}(\xi,\tau)(\tau-\xi^3)^{k-1}\theta(\tau-\xi^3)|d\tau\right)^2 d\xi \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+k)^2}{k!}\rho^k\rho^{(1-2b)} \int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}\left(\int_{|\tau-\xi^3|<1} |\widehat{h}(\xi,\tau)|d\tau\right)^2 d\xi.
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Como $b > 1/2$ e $(1+|\tau-\xi^3|)^b > 1$ então, de (2.36) segue que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+k)^2}{k!}\rho^k\rho^{(1-2b)} \int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{h}(\xi,\tau)|}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b}}\frac{1}{(1+|\tau-\xi^3|)^b}d\tau\right)^2 d\xi \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+k)^2}{k!}\rho^k\rho^{(1-2b)} \int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{h}(\xi,\tau)|}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b}}d\tau\right)^2 d\xi.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Sabendo que a série

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+k)^2}{k!}\rho^k\rho^{(1-2b)}
$$

converge, segue que

$$\mathbf{I} \leqslant c\|h\|_{X_{s,b-1}}. \tag{2.38}$$

Vamos analisar agora **II**. Para isto, escrevemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{II} = \theta_\rho(t) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{it\tau}\frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{\tau-\xi^3}\widehat{h}(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
+ \theta_\rho(t) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{it\xi^3}\frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{\tau-\xi^3}\widehat{h}(\xi,\tau)d\xi d\tau \\
= \mathbf{II}_1 + \mathbf{II}_2
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Pela estimativa (2.30) e definição de transformada inversa temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{II}_1 &= \left\|\theta_\rho(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{i\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{(\tau-\xi^3)}\widehat{h}(\tau,\xi)d\tau d\xi\right\|_{X_{s,b}} \\
&\leqslant c\rho^{(1-2b)/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}(1+|\tau-\xi^3)^{2b}\left|\frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{(\tau-\xi^3)}\widehat{h}\tau,\xi)\right|^2 d\tau d\xi\right)^{1/2} \\
&= c\rho^{(1-2b)/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}\frac{(1+|\tau-\xi^3)^{2b-2}}{(1+|\tau-\xi^3)^{-2}}\left|\frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{(\tau-\xi^3)}\widehat{h}(\tau,\xi)\right|^2 d\tau d\xi\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Note que, $(1-\theta)=0$ para $|\tau-\xi^3| << 1$ e $(1-\theta)\leqslant 1$ para $\frac{1}{2} < |\tau-\xi^3|$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{II}_1\|_{X_{s,b}} &\leqslant c\rho^{(1-2b)/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\frac{1}{2}<|\tau-\xi^3|}(1+|\xi|)^{2s}(1+|\tau-\xi^3)^{2b-2}|\widehat{h}(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi\right)^{1/2} \\
&\leqslant c\rho^{(1-2b)/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|)^{2s}(1+|\tau-\xi^3)^{2b-2}|\widehat{h}(\tau,\xi)\big|^2 d\tau d\xi\right)^{1/2} \\
&\leqslant c\rho^{(1-2b)/2}\|h\|_{X_{s,b-1}}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Resta analisar $\mathbf{II}_2$. Para fazer tanto, veja pela estimativa (2.26), definição de $X_{s,b}$ e a definição da fórmula de inversão da transformada de Fourier, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{II}_2\|_{X_{s,b}} &= \left\|\theta_\rho(t)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{it\xi^3}\frac{(1-\theta)(\tau-\xi^3)}{\tau-\xi^3}\widehat{h}(\xi,\tau)d\xi d\tau\right\|_{X_{s,b}} \\
&\leqslant c\rho^{(1-2b)/2}\|h\|_{X_{s,b-1}}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Portanto de (2.38),(2.40) e (2.42) segue o resultado. □

Lema 2.2.4. *Dada* $h \in X_{s,b-1}$, *então*

$$\|\theta_0(t)\int_0^t V(t-\tau)h(\tau)d\tau\|_{s,2} \leqslant c\rho^{(1-2b)/2}\|h\|_{X_{s,b-1}}. \tag{2.43}$$

Demonstração. Veja [11]. □

Lema 2.2.5. *Seja* $s \in \mathbb{R}, b', b \in (1/2, 7/8)$ *com* $b < b'$ *e* $\rho \in (0,1)$, *então para* $v \in X_{s,b'-1}$ *temos*

$$\|\theta_0 v\|_{X_{s,b-1}} \leqslant c\rho^{(b'-b)/8(1-b)}\|v\|_{X_{b'-1}}. \tag{2.44}$$

Demonstração. Veja [11]. □

Lema 2.2.6. *Se* $b' \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ *e* $b \in (\frac{1}{2}, b')$, *então existe* $c > 0$ *tal que*

$$\frac{|\xi|}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b'}} \times \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\frac{d\tau_1 d\xi_1}{(1+|\tau_1-\xi_1^3|)^{2b}(1+|(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3|)^{2b}}\right)^{1/2} \leqslant c. \tag{2.45}$$

Demonstração. Seja $b > \frac{1}{2}$. Então,tomando $\alpha = \xi_1^3$ e $\beta = \tau - (\xi - \xi_1)^3$ temos pela estimativa (1.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\frac{d\tau_1 d\xi_1}{(1+|\tau_1-\xi_1^3|)^{2b}(1+|(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3|)^{2b}} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_1}{(1+|(\tau-\xi^3+3\xi\xi_1(\xi-\xi_1)|)^{2b}}$$

fazendo a mudança de variável $u = (\tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)$ logo
$\xi_1 = \frac{1}{2}(\xi \pm \sqrt{\frac{4\tau-\xi^3-4u}{3\xi}}) \iff |\xi(\xi-\xi_1) = \sqrt{|\xi|}|\sqrt{4\tau-\xi^3-4u}|$.
Então,

$$du = 3\xi(\xi - 2\xi_1))d\xi_1 \iff d\xi_1 = \frac{du}{\sqrt{|\xi|}|\sqrt{4\tau-\xi^3-4u}|}$$

Daí, pela estimativa (1.2) que

$$\frac{|\xi|}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b'}} \times \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\frac{d\tau_1 d\xi_1}{(1+|\tau_1-\xi_1^3|)^{2b}(1+|(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3|)^{2b}}\right)^{1/2}.$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{|\xi|}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b'}}\frac{c}{|\xi|^{1/4}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(1+|u|)^{2b}|\sqrt{4\tau-\xi^3-4u}|}\right)^{1/2} \\
&\leqslant c\frac{|\xi|^{3/4}}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b'}}\frac{1}{(1+|4\tau-\xi^3|)^{1/4}}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Como
$$\frac{1}{(1+|4\tau-\xi^3|)^{1/4}}\leqslant 1,$$
E para $b'<\frac{3}{4}$, temos
$$\frac{|\xi|^{3/4}}{(1+|\tau-\xi^3|)^{1-b'}}\leqslant 1.$$
Portanto segue o resultado. $\square$

Capítulo 3

Boa Colocação

Neste capítulo vamos apresentar a demostração da boa colocação para equação k-gKdV. Trataremos os casos $k = 1, 2, 3$ e 4 via argumento ponto fixo. Consiste em provar que o operador integral

$$\Psi_{v_0}(v)(t) = V(t)v_0(x) + \int_0^t V(t-\tau)(v^k \partial_x v)(x,\tau)d\tau$$

possui um único ponto fixo, ou seja, deve-se provar que existe $v \in C([0,T] : \mathbf{H}^s)$ tal que

$$v(t) = V(t)v_0(x) + \int_0^t V(t-\tau)(v^k \partial_x v)(x,\tau)d\tau.$$

Vamos proceder da seguinte maneira; primeiramente definiremos um conjunto $\mathbf{X}_T^a = \{v \in C([-T,T] : \mathbf{H}^s) : |||v|||_T \leqslant a\}$ onde à norma $|||\cdot|||_T$ é definida baseada nas estimativas já determinadas no capítulo anterior. Restringindo o operador Ψ ao conjunto $\mathbf{X}_T^a$, provaremos que Ψ satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo, isto é, a inclusão $\Psi(\mathbf{X}_T^a) \subset \mathbf{X}_T^a$ e que o operador Ψ_{v_0} é uma contração.

3.1 A equação de Kortweg de Vries

Nesta seção vamos estabelecer a boa colocação local do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v\partial_x v = 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases} \qquad (1).$$

$x, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^+$.

Observação 3.1.1. *O teorema acima foi provado por Kening, Ponce e Vega em [9]. Eles demostra que o PVI* (1) *está bem posto em* $\mathbf{H}^s$ *com* $s > 3/4$ *e que a tempo depende do tamanho do valor inicial em* $\mathbf{H}^s$.

Teorema 3.1.1. *Seja* $s > \frac{3}{4}$. *Então, para todo* $v_0 \in \mathbf{H}^s$ *existe um* $T = T(\|v_0\|_{\mathbf{H}^s})$ *tal que* $(T(\rho) \to \infty$ *quando* $\rho \to 0)$ *e uma única solução* $v(t)$ *do PVI* (1) *satisfazendo*

$$v \in C([-T, T] : \mathbf{H}^s), \tag{3.1}$$

$$\partial_x v \in L^4([-T, T] : L^\infty(\mathbb{R})), \tag{3.2}$$

$$\|D_x^s \partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty \tag{3.3}$$

$$\|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty \tag{3.4}$$

Além disso,para todo $T' \in (0, T)$ *existe uma vizinhança* $\mathcal{W}$ *de* $v_0 \in \mathbf{H}^s$ *tal que a aplicação* $\tilde{v}_0 \to \tilde{v}(t)$ *definida de* $\mathcal{W}$ *sobre as classes* (3.1)-(3.4) *com* T' *em vez de* T *é Lipschitz.*

Observação 3.1.2. *O teorema acima foi provado por Kening, Ponce e Vega em [9]. Eles demostra que o PVI* (1) *está bem posto em* $\mathbf{H}^s$ *com* $s > 3/4$ *e que a tempo depende do tamanho do valor inicial em* $\mathbf{H}^s$.

Demonstração. Para simplificar a exposição, vamos restringir a demostração para $s \in (3/4, 1)$. Entretanto, para $s \geqslant 1$, a demostração torna-se bem menos complexa devida a linearidade das altas derivadas quando aplicadas nas normas (3.1)-(3.4).

Para $a, T > 0$ que serão escolhido convenientemente, consideremos o conjunto

$$\mathbf{X}_T^a = \{v \in C([-T, T] : \mathbf{H}^s) : |||v||| \leqslant a\}$$

onde

$$|||v|||_T = \|v\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} + \|\partial_x v\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \|D_x^s \partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + (1+T)^{-\rho} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty}$$

tal que o número ρ seja fixo e maior que 3/4. Além disso, vamos considerar o operador integral Ψ com

$$\Psi_{v_0}(v) = \Psi(v)(t) = V(t)v_0 - \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau$$

Devemos prova que existe $a, T > 0$ tal que o operador Ψ esteja bem definido e satisfaça as hipóteses do teorema do ponto fixo. Primeiramente vamos mostrar a inclusão

$\Psi(\mathbf{X}_T^a) \subset \mathbf{X}_T^a$. Dado $v \in \mathbf{X}_T^a$, temos

$$\|\Psi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} \leqslant \|\Psi(v)\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|D_x^s \Psi(v)\|_{L_T^\infty L_x^2} \tag{3.5}$$

Vamos analisar separadamente a norma em (3.5). Usando a propriedade isométrica do grupo solução, $\{V(t)v_0\}_{t=-\infty}^{\infty}$, as desigualdades de Minkowski e Hölder respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Psi(v)\|_{L_x^2} &\leqslant \|V(t)v_0\|_{L_x^2} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\ &\leqslant \|v_0\|_2 + \int_0^t \|V(t-\tau)(v\partial_x v)(\cdot)\|_{L_x^2} d\tau \\ &\leqslant \|v_0\|_2 + T^{\frac{1}{2}} \|v\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por outro lado, usando novamente a desigualdade de Hölder no último fator de (3.6), segue que

$$\begin{aligned} \|v\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} &\leqslant \|v\|_{L_T^\infty L_x^2} \|\partial_x v\|_{L_T^2 L_x^\infty} \\ &\leqslant T^{\frac{1}{4}} \|v\|_{L_T^\infty L_x^2} \|\partial_x v\|_{L_T^4 L_x^\infty} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Como $T^{\frac{1}{4}} \leqslant (1+T)^{\frac{3}{4}}$ e $\rho \geqslant \frac{3}{4}$, então de (3.6), (3.7) e passando sup para $t \in [-T, T]$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Psi(v)\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leqslant c\|v_0\|_2 + T^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho \|v\|_{L_T^\infty L_x^2} \|\partial_x v\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ &\leqslant c\|v_0\|_2 + T^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho |||v|||_T^2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Analogamente ao caso anterior, usamos a desigualdade de Minkowski para integrais junto com a propriedade de isometria do grupo $\{V(t)\}$ para obter

$$\|D_x^s \Psi(v)\|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}} \|D_x^s (v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2} \tag{3.9}$$

Usando a desigualdade (2.22), e depois desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} \|D_x^s (v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2} &\leqslant \|D_x^s (v\partial_x v) - vD_x^s \partial_x v - D_x^s (v)\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} \\ &\quad + \|vD_x^s \partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} + \|D_x^s (v)\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} \\ &\leqslant c\|D_x^s v\|_{L_T^\infty L_x^2} \|\partial_x v\|_{L_T^2 L_x^\infty} + c\|vD_x^s \partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} \\ &\leqslant c(1+T)^\rho \left[\|D_x^s v\|_{L_T^\infty L_x^2} \|\partial_x v\|_{L_T^4 L_x^\infty} + (1+T)^{-\rho} \|v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \|D_x^s \partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} \right] \\ &\leqslant c(1+T)^\rho |||v|||_T^2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Logo, de (3.9) e (3.10) concluímos

$$\|D_x^s\Psi(v)\|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho |||v|||_T^2. \tag{3.11}$$

Portanto de (3.8) e (3.11)

$$\|\Psi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} \leqslant c\|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho |||v|||_T^2. \tag{3.12}$$

Para analisar a norma $\|\partial_x\Psi(v)\|_{L_T^4 L_x^\infty}$, vamos usar primeiramente a desigualdade de Minkowski para integral e depois a estimativa (2.20) e desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
\|\partial_x\Psi(v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} &\leqslant \|\partial_x V(t)v_0\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \left\|\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v\partial v)(\tau)d\tau\right\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\
&\leqslant \|V(t)\partial_x v_0\|_{L_t^4 L_x^\infty} + \int_0^t \|V(t-\tau)\partial_x(v\partial v)(\cdot)\|_{L_t^4 L_x^\infty} d\tau \\
&\leqslant c\|\partial_x D_x^{-\frac{1}{4}} v_0\|_2 + \int_0^t \|D_x^{-\frac{1}{4}}\partial_x(v\partial v)(\cdot)\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leqslant c\|\partial_x D_x^{-\frac{1}{4}} v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|\partial_x D_x^{-\frac{1}{4}}(v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_t^2}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Considerando em (3.13) a igualdade $\partial_x v = \mathcal{H}^{-1}D_x v$, então pela limitação da transformada de Hilbert nos espaços L^p com $1 < p < \infty$ e pela propriedade dos espaços de Sobolev $\mathbf{H}^s \subseteq \mathbf{H}^{\frac{3}{4}}$, obteremos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x\Psi(v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} &\leqslant c\|\mathcal{H}^{-1}D_x D_x^{-\frac{1}{4}} v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|\mathcal{H}^{-1}D_x D_x^{-\frac{1}{4}}(v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leqslant c\|\mathcal{H}^{-1}D_x D_x^{-\frac{1}{4}} v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{3}{4}}(v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leqslant \|D_x^s v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^s(v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Usando em (3.14) a estimativa já obtida em (3.10), concluímos

$$\|\partial_x\Psi(v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} \leqslant \|D_x^s v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho |||v|||_T^2. \tag{3.15}$$

Passamos agora à norma $\|D_x^s\partial_x\Psi(v)\|_{L_x^\infty L_T^2}$. Pela desigualdade de Minkowski para integral, estimativa (2.7), desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\|D_x^s\partial_x\Psi(v)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant \|D_x^s\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left\| D_x^s\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + \int_0^t \|\partial_x V(t-\tau)D_x^s(v\partial_x v)(\cdot)\|_{L_x^\infty L_T^2} d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + c\int_0^t \|D_x^s(v\partial_x v)(\cdot)\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^s(v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2}.
\end{aligned}
$$

Logo, usando novamente a estimativa (3.10)

$$
\|D_x^s\partial_x\Psi(v)\|_{L_x^\infty L_T^2} \leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho |||v|||_T^2. \tag{3.16}
$$

Note que a última norma é definida por $(1+T)^{-\rho}\|\cdot\|_{L_x^2 L_T^\infty}$. Novamente pela desigualdade de Minkowski para integral, estimativa (2.21) e desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
\|\Psi(v)\|_{L_x^2 L_T^\infty} &\leqslant c\|V(t)v_0\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)(v\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
&\leqslant c(1+T)^\rho\|v_0\|_2 + \int_0^t \|V(t-\tau)(v\partial_x v)(\cdot)\|_{L_x^2 L_T^\infty} d\tau \\
&\leqslant c(1+T)^\rho\|v_0\|_2 + c(1+T)^\rho\int_0^t \|(v\partial_x v)(\cdot)\|_{L_x^2 L_T^\infty} d\tau \\
&\leqslant c(1+T)^\rho\|v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho\|v\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2}.
\end{aligned}
$$

Logo, usando a estimativa já obtida em (3.7)

$$
(1+T)^{-\rho}\|\Psi(v)\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leqslant \|v_0\|_2 + +cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho |||v|||_T^2. \tag{3.17}
$$

Portanto de (3.11),(3.15),(3.16) e (3.17)

$$
|||\Psi(v)|||_T \leqslant \|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + c + cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho |||v|||_T^2.
$$

Tomando $a = 2c\|v_0\|_{\mathbf{H}^s}$ e escolhendo $T > 0$ tal que

$$
2cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho a < 1
$$

temos que

$$|||\Psi(v)|||_T \leqslant a,$$

Ou seja,

$$\Psi(X_T^a) \subset X_T^a.$$

Argumentando de maneira análoga à prova da inclusão acima podemos provar a que o operador Ψ é uma contração. De fato, dados $u, v \in \mathbf{X}_T^a$. Temos,

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} = \|\int_0^t V(t-\tau)(u\partial_x u - v\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s}$$

Escrevendo $u\partial_x u - v\partial_x v = (u-v)\partial_x v + u\partial_x(u-v)$ e em seguida usando isometria do grupo solução e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obteremos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L_x^2} &= \left\| \int_0^t V(t-\tau)((u-v)\partial_x v + u\partial_x(u-v))(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2} \\
&\leqslant \int_0^t \|((u-v)\partial_x v + u\partial_x(u-v))(\cdot)\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}[\|(u-v)\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} + \|u\partial_x(u-v)\|_{L_x^2 L_T^2}].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em (3.18) e argumentando do mesmo modo que fizemos em (3.7), obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x v\|_{L_T^2 L_x^\infty} + \|v\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x(u-v)\|_{L_T^2 L_x^\infty} \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho[\|u-v\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x v\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \|v\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty}] \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}(1+T)^\rho[\|u-v\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty}][|||v|||_T + |||u|||_T].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Analogamente a demostração de (3.18), porém com o acréscimo da derivada fracionária, obtém-se

$$\|D_x^s(\Psi(u) - \Psi(v))\|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant cT^{\frac{1}{2}}[\|D_x^s((u-v)\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2} + \|D_x^s(u\partial_x(u-v))\|_{L_x^2 L_T^2}]. \tag{3.20}$$

Faremos a demostração de apenas uma das normas em (3.20), pois a outra segue de maneira análoga. Então, pela estimativa (2.22) (regra de Leibniz) e desigualdade de

Hölder

$$\begin{aligned}\|D_x^s((u-v)\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2} &\leqslant \|D_x^s((u-v)\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x v\|_{L_T^2 L_x^\infty} + \|(u-v)D_x^s\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} \\ &\leqslant c(1+T)^\rho[\|D_x^s(u-v)\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x v\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ &+ (1+T)^{-\rho}\|u-v\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|D_x^s\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^\infty}] \end{aligned} \tag{3.21}$$

Analogamente ao que foi feito para obter (3.10), obteremos

$$\begin{aligned}\|D_x^s(u\partial_x(u-v))\|_{L_x^2 L_T^2} &\leqslant c(1+T)^\rho\left[\|D_x^s u\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty}\right. \\ &\left.+ (1+T)^{-\rho}\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^2 L_T^\infty}\right] \end{aligned} \tag{3.22}$$

Logo de (3.21) e (3.22)

$$\begin{aligned}\|D_x^s(\Psi(u)-\Psi(v))\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leqslant c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}}[\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ &+ (1+T^{-\rho}\|u-v\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|D_x^s(u-v)\|_{L_T^\infty L_x^2}][|||u|||_T + |||v|||_T] \end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto de (3.19) e (3.23), concluímos que

$$\begin{aligned}\|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} &\leqslant c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}}[\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ &+ (1+T)^{-\rho}\|u-v\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|u-v\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s}][|||u|||_T + |||v|||_T]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Para analisar a norma $\|\partial_x(\Psi(u)-\Psi(v))\|_{L_T^4 L_x^\infty}$ usamos a desigualdade de Minkowski para integral e em seguida a estimativa (2.20) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|\partial_x(\Psi(u)-\Psi(v))\|_{L_T^4 L_x^\infty} &= \|\partial_x\int_0^t V(t-\tau)(u\partial_x u - v\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ &\leqslant \int_0^t \|V(t-\tau)\partial_x(u\partial_x u - v\partial_x v)(\tau)\|_{L_t^4 L_x^\infty}d\tau \\ &\leqslant \int_0^t \|\partial_x D_x^{-\frac{1}{4}}(u\partial_x u - v\partial_x v)(\tau)\|_{L_x^2}d\tau \\ &\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^s(u\partial_x u - v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Por (3.21) e (3.22), concluímos que

$$\begin{aligned}\|\partial_x(\Psi(u)-\Psi(v))\|_{L_T^4 L_x^\infty} &\leqslant c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}}[\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\ &+ (1+T^{-\rho}\|u-v\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|D_x^s(u-v)\|_{L_T^\infty L_x^2}][|||u|||_T + |||v|||_T]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Pela desigualdade de Minkowski para integral e estimativa (2.7)

$$
\begin{aligned}
\|D_x^s\partial_x(\Psi(u)-\Psi(v))\|_{L_x^\infty L_t^2} &= \left\| D_x^s\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(u\partial_x u - v\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant \int_0^t \|\partial_x V(t-\tau)D_x^s(u\partial_x u - v\partial_x v)(\cdot)\|_{L_x^\infty L_t^2} d\tau \\
&\leqslant c\int_0^t \|D_x^s(u\partial_x u - v\partial_x v)(\cdot)\|_{L_x^2} d\tau \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^s(u\partial_x u - v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2}. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

De (3.27), (3.21) e (3.22) e

$$
\begin{aligned}
\|D_x^s\partial_x(\Psi(u)-\Psi(v))\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}}[&\|D_x^s(u-v)\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x v\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\
&+ \|u-v\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|D_x^s\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
&+ \|D_x^s u\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\
&+ (1+T)^{-\rho}\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^2 L_T^\infty}]
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\|D_x^s\partial_x(\Psi(u)-\Psi(v))\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}}[&\|D_x^s(u-v)\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|u-v\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \\
&\|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^2 L_T^\infty}][|||u|||_T + |||v|||_T]. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Analogamente a prova da inclusão vamos omitir o fator $(1+T)^{-\rho}$. Então, pela desigualdade de Minkowski e estimativa (2.21)

$$
\begin{aligned}
\|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{L_x^2 L_T^\infty} &= \left\| \int_0^t V(t-\tau)(u\partial_x u - v\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^2 L_T^\infty} \\
&\leqslant \int_0^t \|V(t-\tau)(u\partial_x u - v\partial_x v)(\cdot)\|_{L_x^2 L_T^\infty} d\tau \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}[\|u\partial_x u - v\partial_x v\|_{L_x^2 L_T^2} + \|D_x^s(u\partial_x u - v\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2}]. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Por (3.19),(3.21),(3.22) e (3.23)

$$
\begin{aligned}
(1+T)^{-\rho}\|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{L_x^2 L_T^\infty} \leqslant c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}}[&\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|\partial_x(u-v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\
&+ \|u-v\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|u-v\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s}][|||u|||_T + |||v|||_T]. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.24),(3.26),(3.28) e (3.30) concluímos que

$$|||\Psi(u) - \Psi(v)|||_T \leqslant c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}}[|||u|||_T + |||v|||_T]|||u - v|||_T$$

Sendo $u, v \in \mathbf{X}_T^a$ e $T > 0$ tal que

$$2c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}} a < 1$$

temos que o operador Ψ é uma contração. Portanto, pelo teorema do ponto fixo existe um único $v \in \mathbf{X}_T^a$ tal que

$$\Psi(v)(t) = v(t),$$

ou seja, existe uma unica solução para o PVI (1).

Para provar a unicidade da solução do PVI (1), suponha que esxita uma outra solução $\tilde{u}$ satisfazendo (3.1)-(3.4). Então,

$$|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_T = |||\Psi(\tilde{u}) - \Psi(\tilde{v})|||_T = |||\int_0^t V(t-\tau)(\tilde{v}\partial_x\tilde{v} - \tilde{u}\partial_x\tilde{u})d\tau|||_T \quad (*)$$

Pelo argumento apresentado acima na prova de contração concluímos que a a norma $(*)$ é estimada da seguinte maneira:

$$|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_T \leqslant c(1+T)^\rho T^{\frac{1}{2}}[|||\tilde{u}|||_T + |||\tilde{v}|||_T]|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_T.$$

Escolhendo $0 < T << 1$ como já foi feito na prova de contração, obtemos que

$$|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_T \leqslant \frac{1}{2}|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_T.$$

Consequentemente, concluímos que

$$\tilde{u} = \tilde{v}.$$

Resta provar a dependência contínua, ou seja, que a aplicação $\tilde{v}_0 \to \tilde{v}$ com $\tilde{v}$ a correspondente solução do PVI(1) é lipschtiziana. Como na prova de que o operador Ψ é uma contração ja foi analisada a parte não-linear do operador integral, logo só é preciso analisar a parte linear.

Consideremos $\tilde{u}, \tilde{v}$ as soluções correspondentes aos dados iniciais $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0$ respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} |||\tilde{u} - \tilde{v}|||_{T'} = |||\Psi_{\tilde{u}_0}(\tilde{u}) - \Psi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v})|||_{T'} &\leqslant |||V(t)\tilde{u}_0 - V(t)\tilde{v}_0|||_{T'} \\ &+ |||\int_0^t V(t-\tau)(\tilde{u}\partial_x\tilde{u} - \tilde{v}\partial_x\tilde{v})d\tau|||_{T'}. \end{aligned}$$

Como já foi visto na demostração que o operador Ψ é contração, obtém-se similarmente que

$$|||\int_0^t V(t-\tau)(\tilde{u}\partial_x\tilde{u} - \tilde{v}\partial_x\tilde{v})d\tau|||_{T'} \leqslant c(1+T')^{\rho}T'^{\frac{1}{2}}[|||\tilde{u} + |||\tilde{v}|||_{T'}]|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_{T'}. \tag{3.31}$$

Além disso, pela isometria do grupo solução $\{V(t)\}$ e pelas estimativas lineares (2.7), (2.24) e (2.21), temos que

$$|||V(t)\tilde{u}_0 - V(t)\tilde{v}_0|||_{T'} \leqslant c\|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^s} \tag{3.32}$$

Portanto, de (3.31) e (3.32) concluímos que

$$|||\Psi_{\tilde{u}_0}(\tilde{u}) - \Psi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v})|||_{T'} \leqslant \|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^s} + c(1+T')^{\rho}T'^{\frac{1}{2}}[|||\tilde{u} + |||\tilde{v}|||_{T'}]|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_{T'}.$$

Escolhendo $0 < T' < T$ tal que $c(1+T')^{\rho}2a < \frac{1}{2}$ e sabendo que as funções $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbf{H}^s$ são imagens do operador Ψ, concluímos que

$$|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_{T'} \leqslant c\|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^s}.$$

Ou seja, a solução depende continuamente do valor inicial.

Corolário 3.1.1. *Assumindo as Hipóteses do teorema 3.1.1. Suponha que a função* $v\partial_x v$ *é suave, então existe uma vizinhança* $\mathcal{V}$ *em* $\mathbf{H}^s$ *tal que a aplicação* $\tilde{v}_0 \to \tilde{v}$ *definida da vizinhança* $\mathcal{V}$ *sobre o conjunto* $\mathbf{X}_T^a$ *é suave.*

Além disso,usando o mesmo argumneto da prova do corolário 3.1.1 obtém-se que a solução v do PVI (1) é suave. □

Observação 3.1.3. *Embora o resultado de boa colocação acima tenha sido provado somente para o caso* $k = 1$ *, podemos ver que o argumento apresentado acima nos leva a concluir que o PVI* (I) *com* $k > 1$ *ainda é bem posto nos espaços de Sobolev* $\mathbf{H}^s$ *para* $s > \frac{3}{4}$*. Agora, com intuito de melhorar o resultado de boa colocação, enunciaremo e provaremo nas próximas seções resultados de boa colocação com índice* $s < \frac{3}{4}$ *nos casos* $k = 2$ *e 4.*

3.2 KdV Modificada $(k = 2)$

Considere o PVI (2.1) quando $k = 2$, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v^2 \partial_x = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

Pela observação 3.1.3, temos que o PVI (2) é bem posto nos espaços de Sobolev $\mathbf{H}^s$ para $s > \frac{3}{4}$. Com o objetivo de melhorar o resultado para boa colocação, estabeleceremos nesta seção tal resultado para o PVI (2) nos espaços de Sobolev $\mathbf{H}^s$ com $s \geqslant \frac{1}{4}$. A ideia da prova é a mesma do Teorema 3.1.1, ou seja, usar estimativas lineares adicionado ao argumento de ponto fixo.

Teorema 3.2.1. *Seja* $s \geqslant \frac{1}{4}$. *Então para toda* $v_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ *existe* $T = (\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2^{-4})$ *e uma única solução* $v(t)$ *do PVI* (2) *satisfazendo*

$$v \in C([-T,T] : \mathbf{H}^s(\mathbb{R})) \tag{3.33}$$

$$\|D_x^s \partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} = \sup_{\infty < x < \infty} \left(\int_{-T}^{T} |D_x^s \partial_x v(x,t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{3.34}$$

$$\|D_x^{s-\frac{1}{4}} \partial_x\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \|D_x^s v\|_{L_x^4 L_T^\infty} < \infty. \tag{3.35}$$

$$\|v\|_{L_x^4 L_t^{10}} < \infty \tag{3.36}$$

Além disso, existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ *de* v_0 *em* $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ *tal que a aplicação* $\tilde{v}_0 \to \tilde{v}(t)$ *definida da vizinhança* $\mathcal{V}$ *sobre as classes definidas por* (3.33)-(3.36) *é suave.*

Demonstração. Primeiramente vamos definir os conjuntos,

$$\mathbf{X}_T^a = \{v \in C([-T,T] : \mathbf{H}^s(\mathbb{R})); |||v|||_T \leqslant a\}$$

Onde,

$$|||v|||_T = \|v\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} + \|D_x^s \partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|D_x^{s-\frac{1}{4}} v\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} + \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{10}} + \|v\|_{L_x^4 L_T^\infty}$$

Devemos provar que para valores apropriados de a e T o operador ϕ defini uma contração sobre o conjunto $\mathbf{X}_T^a$ e que $\phi(\mathbf{X}_T^a) \subset \mathbf{X}_T^a$ onde ϕ é definido por,

$$\phi_{v_0}(v)(t) = \phi(v)(t) = V(t)v_0(t) - \int_0^t V(t-\tau)(v^2 \partial_x v)(\tau) d\tau.$$

Vamos considerar somente o caso $s = \frac{1}{4}$. o caso $s > \frac{1}{4}$, ou seja, o resultado segue da linearidade das normas (3.33)-(3.36).

Começaremos analisando a norma $\|\phi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s}$. Veja que a norma em $\mathbf{H}^{\frac{1}{4}}$ pode ser estimada por:

$$\|\phi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^{\frac{1}{4}}} \leqslant \|\phi(v)\|_{L_T^\infty L_X^2} + \|D_x^{\frac{1}{4}}\phi(v)\|_{L_T^\infty L_x^2}.$$

Vamos primeiramente analisar a norma $\|\phi(v)(t)\|_{L_T^\infty L_X^2}$ e em seguida analisaremos esta mesma norma,porém, contendo derivada . Assim, usando as desigualdades de Minkowski para integral, isometria de grupo e desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\|\phi(v)\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leqslant \|V(t)v_0\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + \|\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^3)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + c\|v^3\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&\leqslant \|v_0\|_2 + c\|v^2\|_{L_x^2 L_T^\infty}\|v\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L_x^4 L_T^\infty}\|v\|_{L_T^\infty L_x^2}. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Por último, argumentando da mesma maneira da prova anterior,porém, sabendo que a norma está acrescentada da derivada fracionária ($D_x^{\frac{1}{4}}$). Con efeito, pela desigualdades de Minkowski para integral, isometria de grupo e desigualdade de Hölder obteremos

$$\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{4}}\phi(v)\|_{L_t^\infty L_x^2} &\leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}V(t)v_0\|_{L_\infty L_x^2} + \|D_x^{\frac{1}{4}}\int_0^t V(t-\tau)(v^2\partial_x v(\tau)\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + \|\int_0^t V(t-\tau)D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v\|_2 + \int_0^t \|V(t-\tau)(D_x^{\frac{1}{4}}v^2\partial_x v)(\tau)\|_{L_T^\infty L_x^2}d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + c\int_0^t \|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)(\tau)\|_{L_x^2}d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L_x^2 L_T^2}. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Finalmente, das estimativas (3.37),(3.38) e (3.41) obtemos que:

$$\|\phi(v)\|_{L^\infty_T \mathbf{H}^{\frac{1}{4}}} \leqslant c\|v_0\|_{\frac{1}{4},2} + cT^{\frac{1}{2}}|||v|||_T^3. \tag{3.39}$$

Veja que, usando a desigualdade de Minkowski para integral, propriedades de grupo,estimativa (2.7) e desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x\phi(v)(t)\|_{L^\infty_x L^2_T} &\leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x V(t)v_0\|_{L^\infty_x L^2_T} + \left\| D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x \int_0^T V(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + \int_0^T \|\partial_x(V(t-\tau)(D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L^\infty_x L^2_T} d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + c\int_0^T \|(D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L^2_T} d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L^2_x L^2_T}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Vamos estimar $\|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L^2_x L^2_T}$. Então,para provar estimativa (3.40) iremos combinar a regra de Leibniz (2.22) e regra da Cadeia (2.23) com a desigualdade de Hölder para obtermos :

$$\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x)\|_{L^2_x L^2_T} &\leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2)\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} + \|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2)\partial_x v + v^2 D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x v\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}v^2\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} + \|v^2\|_{L^2_x L^\infty_T}\|D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_t} \\
&\leqslant \|v\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|v\|_{L^4_x L^\infty_T}\|D_x^{\frac{1}{4}}v\|_{L^5_x L^{10}_T}\|\partial_x v\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\
&\leqslant |||v|||_T^3.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Então, segue que

$$\|D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x\phi(v)(t)\|_{L^\infty_x L^2_T} \leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}|||v|||_T^3. \tag{3.42}$$

Vamos analisar as outras normas. Usando a desigualdade de Minkowski para integral, (2.19) e a desigualdade de Hölder respectivamente, temos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x \phi(v)\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} &\leqslant \|\partial_x V(t)v_0\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} + \left\| \partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^2\partial_x v)d\tau \right\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 + c\int_0^t \|\partial_x V(t-\tau)(v^2\partial_x v)d\tau\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}\|_2 + c\int_0^t \|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L^2_x} d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L^2_x L^2_T}. \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

De (3.41) e (3.43), obtemos

$$
\|\partial_x \phi(v)(t)\|_{L^{20}_x L^{5/2}_T} \leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}|||v|||^3_T. \qquad (3.44)
$$

Novamente, usando as desigualdades de Minkowski para integral, estimativa (2.17) e desigualdade de Hölder,podemos mostrar que:

$$
\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{4}} \phi(v)(t)\|_{L^5_x L^{10}_T} &\leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}} V(t)v_0\|_{L^5_x L^{10}_T} + \left\| D_x^{\frac{1}{4}} \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L^5_x L^{10}_T} \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 + \int_0^t \|V(t-\tau)(D_x^{\frac{1}{4}} v^2\partial_x v)(\tau)\|_{L^5_x L^{10}_T} d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 + c\int_0^t \|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)(\tau)\|_{L^2_x} d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L^2_x L^2_T}.
\end{aligned}
$$

Portanto de (3.41), concluímos que

$$
\|D_x^{\frac{1}{4}} \phi(v)\|_{L^5_x L^{10}_T} \leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_2 + cT^{\frac{1}{2}}|||v|||^3_T. \qquad (3.45)
$$

Para estimar a norma $\|\phi(v)\|_{L^4_x L^\infty_T}$ usamos desigualdade de Minkowski para integral, estimativa (2.17) e desigualdade de Hölder para obtemos,

$$
\begin{aligned}
\|\phi(v)(t)\|_{L^4_xL^\infty_T} &\leqslant \|V(t)v_0\|_{L^4_xL^\infty_T} + \left\|\int_0^t V(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\right\|_{L^4_xL^\infty_T} \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + \int_0^t \|V(t-\tau)(v^2\partial_x)(\tau)\|_{L^4_x}d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + c\int_0^t \|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)(\tau)\|_{L^2_xL^\infty_T}d\tau \\
&\leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\| + cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x v)\|_{L^2_xL^2_T}.
\end{aligned}
$$

Logo, pela estimativa (3.41) obtemos que,

$$
\|\phi(v)(t)\|_{L^4_xL^\infty_T} \leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}v_0\|_2 + c|||v|||_T^3. \tag{3.46}
$$

Portanto de (3.42),(3.44),(3.45),(3.46) e (3.39)

$$
|||\phi(v)(t)||| \leqslant c\|v_0\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{4}}} + cT^{\frac{1}{2}}|||v|||_T^3.
$$

Escolhendo $a = 2c\|v_0\|_{\frac{1}{4},2}$ tal que $ca^2T^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}$ obteremos que

$$
|||\phi(v)(t)||| \leqslant a
$$

Portanto, concluímos que

$$
\phi(\mathbf{X}_T^a) \subset \mathbf{X}_T^a.
$$

Provaremos agora que o operador ϕ é uma contração no conjunto $\mathbf{X}_T^a$. Como na prova do teorema 3.1.1, a provar de que o operador ϕ é uma contração usará a mesma argumentação da prova de inclusão. De fato, note que

$$
\begin{aligned}
\|\phi(u) - \phi(v)\|_{L^\infty_T\mathbf{H}^{\frac{1}{4}}} &\leqslant \|\phi(u)(t) - \phi(v)\|_{L^\infty_TL^2_x} + \|D_x^{\frac{1}{4}}(\phi(u) - \phi(v))\|_{L^\infty_TL^2_X} \\
&= \mathbf{I}+\mathbf{II}.
\end{aligned}
$$

Primeiramente vamos estimar norma **I**. Como argumentado em (3.37) temos por (2.9) que:

$$\begin{aligned}\|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\|_{L_T^\infty L_X^2} &= \|\int_0^t V(t-\tau)(u^2\partial_x u - v^2\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_X^2}\\ &= \|\partial_x\int_0^t V(t-\tau)(u^3-v^3)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}\\ &\leqslant c\|u^3-v^3\|_{L_x^1 L_T^2}\end{aligned}$$

Escrevendo $u^3-v^3=(u-v)(u^2+vu+v^2)$ e usando a desigualdade de Hölder obtemos:

$$\begin{aligned}\|u^3-v^3\|_{L_X^1L_T^2} &\leqslant \|u-v\|_{L_x^2L_T^2}\|u^2+vu+v^2\|_{L_x^2L_T^\infty}\\ &\leqslant \|u-v\|_{L_x^2L_T^2}\left[\|u^2\|_{L_x^2L_T^\infty}+\|uv\|_{L_x^2L_T^\infty}+\|v^2\|_{L_x^2L_T^\infty}\right]\\ &\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{L_T^\infty L_x^2}\left[\|u\|^2_{L_x^4L_T^\infty}+\|u\|_{L_x^4L_T^\infty}\|v\|_{L_x^4L_T^\infty}+\|v\|^2_{L_x^2L_T^\infty}\right]\\ &\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{L_T^\infty L_x^2}\left[|||v|||_T^2+|||u|||_T^2\right]. \qquad (3.47)\end{aligned}$$

Assim, da estimativa (3.47) concluímos que,

$$\|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\|_{L_T^\infty L_x^2}\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{L_T^\infty L_x^2}\left[|||v|||_T^2+|||u|||_T^2\right]. \qquad (3.48)$$

Agora vamos analisar **II**. Agora argumentando da mesma maneira que (3.38). Então, segue que

$$\begin{aligned}\|D_x^{\frac{1}{4}}\int_0^t V(t-\tau)(u^2\partial_x u-v^2\partial_x v)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leqslant \int_0^t \|V(t-\tau)D_x^{\frac{1}{4}}(u^2\partial_x u-v^2\partial_x v)\|_{L_T^\infty L_x^2}d\tau\\ &\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{4}}(u\partial_x u-v^2\partial_x v)\|_{L_x^2L_T^2}. \qquad (3.49)\end{aligned}$$

Para estimar (3.49), primeiramente escrevamos

$$u^2\partial_x u-v^2\partial_x v=(u^2-v^2)\partial_x u+v^2\partial_x(u-v)$$

Daí,

$$\|D_x^{\frac{1}{4}}(u^2\partial_x u-v^2\partial_x v)\|_{L_x^2L_T^2}\leqslant\|D_x^{\frac{1}{4}}((u^2-v^2)\partial_x u)\|_{L_x^2L_T^2}+\|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2\partial_x(u-v))\|_{L_x^2L_T^2} \qquad (3.50)$$

O mesmo argumento apresentado em (3.40) nos fornece

$$\begin{aligned}\|D_x^{\frac{1}{4}}((u^2-v^2)\partial_x u)\|_{L_x^2L_T^2} &\leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}(v^2)\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}\|\partial_x(u-v)\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}}\\ &\quad+\|v^2\|_{L_x^2L_T^\infty}\|D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}\\ &\leqslant |||v|||_T^2|||u-v|||_T \qquad (3.51)\end{aligned}$$

Argumentando da mesma maneira que (3.40)

$$\begin{aligned}\|D_x^{\frac{1}{4}}((u^2-v^2)\partial_x u)\|_{L_x^2L_T^2} &\leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}(u^2-v^2)\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}}\|\partial_x u\|_{L_x^{20}L_T^{5/2}} \\ &+ \|u^2-v^2\|_{L_x^2L_T^\infty}\|D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2} \end{aligned} \tag{3.52}$$

Escrevendo $u^2-v^2=(u-v)(u+v)$ obtemos pela desigualdade Hölder

$$\|u^2-v^2\|_{L_x^2L_T^\infty} \leqslant \|u-v\|_{L_x^4L_T^\infty}\|u+v\|_{L_x^4L_T^\infty}$$

Por (2.23) combinado a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\|D_x^{\frac{1}{4}}(u^2-v^2)\|_{L_x^{20/9}L_T^{10}} &\leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\|u+v\|_{L_x^4L_T^\infty} \\ &+ \|D_x^{\frac{1}{4}}(u+v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\|u-v\|_{L_x^4L_T^\infty} \\ &\leqslant \left[|||u|||_T^2+|||v|||_T^2\right]|||u-v|||_T. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Potanto, segue de (3.49) que

$$\|D_x^{\frac{1}{4}}\int_0^t V(t-\tau)(u^2\partial_x u-v^2\partial_x v)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant cT^{\frac{1}{2}}\left[|||u|||_T^2+|||v|||_T^2\right]|||u-v|||_T. \tag{3.54}$$

Consequentemente, concluímos que

$$\|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^{\frac{1}{4}}} \leqslant cT^{\frac{1}{2}}\left[|||u|||_T^2+|||v|||_T^2\right]|||u-v|||_T. \tag{3.55}$$

Veja que se denotarmos por η uma das normas restantes que defini $|||\cdot|||_T$. Então,

$$\begin{aligned}\eta(\phi(u)-\phi(v)) &= \eta\Big(\int_0^t V(t-\tau)\partial_x(u^3-v^3)d\tau\Big) \\ &\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{4}}\partial_x(u^3-v^3)\|_{L_x^2L_T^2} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Observe que estimativa (3.56) ja foi analisada. Logo,

$$\eta(\phi(u)-\phi(v)) \leqslant cT^{\frac{1}{2}}(|||u|||_T^2+|||u|||_T^2)|||u-v|||_T \tag{3.57}$$

Portanto, repetindo o argumento para todas as normas restantes obtemos que,

$$|||\phi(u)-\phi(v)|||_T \leqslant cT^{\frac{1}{2}}(|||u|||_T^2+|||u|||_T^2)|||u-v|||_T \leqslant 2ca^2T^{\frac{1}{2}}|||u-v|||_T.$$

Escolhendo $2ca^2T^{\frac{1}{2}} \leqslant 1$ segue que ϕ é uma contração em $\mathbf{X}_T^a$. Daí, como ϕ satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo Banach então, existe um única função $v \in \mathbf{X}_T^a$ tal que

$$\phi(v) = v,$$

Ou seja,

$$v(t) = V(t-\tau) - \int_0^t V(t-\tau)(v^2\partial_x v)(\tau)d\tau.$$

Provemos agora a suavidade da aplicação dado solução para o PVI (2). Vamos usar corolário 3.1.1 em [16], ou seja, é suficiente mostrar que a aplicação $\tilde{v}_0 \to \tilde{v}$ é Lipschitz, onde tal aplicação é definida da vizinhança $\mathcal{V}$ centrada em $\tilde{v}_0$ sobre o conjunto $\mathbf{X}_T^a$. Então, argumentando de maneira similar a demostração que o operador ϕ é uma contração e tomando $T_1 \in (0, T)$, obtemos que

$$|||\phi_{\tilde{u}_0}(\tilde{u}) - \phi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v})||| \leqslant c\|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{4}}} + cT_1^{\frac{1}{2}}(|||\tilde{v}|||_{T_1}^2 + |||\tilde{v}|||_{T_1}^2)|||v - \tilde{v}|||_{T_1}$$

Como as funções $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathbf{X}_T^a$ são pontos fixos do operador ϕ, então, escolhendo $0 < T_1$ tal que

$$2cT_1^{\frac{1}{2}}a < 1$$

Obtemos,

$$|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_{T_1} \leqslant c\|\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{4}}}$$

Consequentemente a aplicação

$$\tilde{v}_0 \to \tilde{v}$$

é lipstchiz . Portanto pelo corolário 3.1.1 a solução $\tilde{v}$ é suave. □

3.3 Equação KdV com k=3

Analogamente aos demais casos $k = 1$ e $k = 2$, Kening, Ponce e Vega também provaram em [11] que o PVI (I) com $k = 3$ é bem posto em $\mathbf{H}^s$ com $s \geqslant \frac{1}{12}$. E para tornar este trabalho mais completo, enunciaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1. *Seja* $k = 3$ *e* $s \geqslant \frac{1}{12}$. *Então, para qualquer* $v_0 \in \mathbf{H}^s$ *existe* $T = T(\|v_0\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{12}}}) > 0$ *com* $(T(\rho) \to 0, \rho \to 0$ *e uma única solução forte* $u(t)$ *do PVI* (I) *com*

$k = 3$ *satisfazendo*

$$v \in C([-T, T] : \mathbf{H}^s), \tag{3.58}$$

$$\|v\|_{L_x^{60/13} L_T^{15}} + \|v\|_{L_x^{10/13} L_T^{21/4}} < \infty, \tag{3.59}$$

$$\|D_x^s v\|_{L_x^{10/13} L_T^{21/4}} + \|v\|_{L_x^{10/13} L_T^{21/4}} < \infty, \tag{3.60}$$

$$\|D_x^s \partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty. \tag{3.61}$$

Além disso, para todo $T' \in (0, T)$ *existe uma vizinhança* $\mathcal{V}$ *de* $\mathbf{H}^s$ *centrada em* v_0 *tal que a aplicação* $\tilde{v}_0 \to \tilde{v}(t)$ *definida de* $\mathcal{V}$ *sobre as classes definidas em* (3.58)-(3.61) *com* T' *em vez de* T *é Lipschitz.*

Observação 3.3.1. *Embora a prova desse teorema seja feita de maneira análoga aos casos anteriores, isto é, a boa colocação do PVI* (I) *com* $k = 1, 2$ *não apresentaremos tal demostração devido a complexidade dos cálculos e a aplicação da teoria dos espaço BMO. Caso o leitor queira se aprofundar mais sobre esse caso, recomendo a leitura do artigo principal usada na elaboração dessa dissertação. Veja Kenig, Ponce e Vega em [11]*

3.4 Equação KdV com k=4

Nas últimas seções já ficou estabelecido a boa colocação para equação KdV com $k = 1, 2$ com s menor possível. O objetivo desta seção é estabelecer a boa colocação local da equação KdV generalizada $k = 4$. Além disso, como o scalling da equação é dado por $s = \frac{1}{2} - \frac{2}{k}$ com $k \geqslant 4$, então estabeleceremos ainda a boa colocação para os casos críticos da equação KdV generalizada. Considere o PVI

$$\begin{cases} \partial_t v + \partial_x^3 v + v^4 \partial_x v = 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \qquad (3).$$

com $x, t \in \mathbb{R}$. Como a boa colocação do PVI (3) será estabelecida nos espaços de Sobolev iremos usar as mesma técnicas das demostrações dos Teoremas 3.1.1 e 1.3.2, isto é, usar estimativas lineares para provar a existência de um ponto fixo para o operador integral satisfazendo o PVI (3). Quanto ao caso crítico, vamos usar o argumento de ponto fixo, porém, enunciaremos dois lemas que auxiliarão nas demostrações.

Observação 3.4.1.

$$D_t^{s/3}V(t)v_0 = D_x^s V(t)v_0. \tag{3.62}$$

Para facilitar os cálculos na demostração, vamos desconsiderar os fatores 2π *na transformada de fourier e* $8\pi^3$ *da definição do grupo solução.*

De fato,

$$D_t^{s/3}V(t)v_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{s/3}\widehat{(V(t)v_0(x))}^{(\tau)}(\tau)e^{it\tau}d\tau$$

Pela definição do grupo solução e fazendo a mudança de variável,$\xi^3 = \tau$*, então*

$$\begin{aligned} D_t^{s/3}V(t)v_0(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^s e^{ix\xi}\widehat{v}_0(\xi)e^{it\xi^3}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (D_x V(t)v_0)(\xi)e^{ix\xi}d\xi \\ &= D_x^s(V(t)v_0). \end{aligned}$$

Lema 3.4.1. *Considere* v *como na observação 3.4.2, então pela desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev no tempo com* $\frac{s}{3} < \frac{1}{2}$*, temos que*

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_x^5 L_T^{10}} &\leqslant T^\lambda \|v\|_{L_x^4 L_T^q} \\ &\leqslant T^\lambda \|D_t^{s/3} v\|_{L_x^5 L_t^{10}} \\ &= T^\lambda \|D_t^{s/3} v\|_{L_x^5 L_T^{10}} \end{aligned} \tag{3.63}$$

Onde,$\lambda = \lambda(s) > 0$ *e* $q = q(s) \in (10, \infty)$.

Lema 3.4.2. ***(Lema Auxiliar)***

Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$*. Então,para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $T = T(u_0\epsilon)$ *e* $\delta = \delta(u_0, \epsilon) > 0$ *tal que se* $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_2 < \delta$ *então,*

$$\|\partial_x V(t)\tilde{u}_0\|_{L_x^\infty L_T^2}$$

Demonstração. Seja $\phi_j(\cdot) = j\phi(\frac{\cdot}{j})$ uma função molificadora em $L^1(\mathbb{R})$. Então,

$$\begin{aligned} \|\partial_x V(t)\|_{L_x^\infty L_T^2} \leqslant{}& \|\partial_x V(t)(\tilde{u}_0 - u_0)\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x W(t)(\tilde{u}_0 - \phi_j * u_0)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &+ \|\partial_x V(t)\phi_j * u_0\|_{L_x^\infty L_T^2}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Logo, por hipótese, desigualdade de Hölder, imersão de sobolev e fazendo $j \to \infty$ em (3.64) ,temos que

$$\begin{aligned}
\|\partial_x V(t)\|_{L^\infty_x L^2_T} &\leqslant c\delta + co(1) + cT^2 \|\partial_x V(t)\phi_j * u_0\|_{L^\infty_x L^\infty_T} \\
&\leqslant c(\delta + o(1) + \|D^s_x V(t)\partial_x \phi_j * u_0\|_{L^\infty_T L^2_x}) \\
&\leqslant c(\delta + o(1) + T^{1/2} j^2 \|\phi * u_0\|_{2,2}) \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

escolhendo T suficientemente pequeno e j grande em (3.65) tal que

$$T^{1/2} j^2 \|\phi * u_0\|_{2,2} < \frac{\epsilon}{3c}$$

Então prova se o lema. □

Lema 3.4.3. *Seja* $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. *Então, para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $T = T(u_0, \epsilon) > 0$ *e* $\delta = \delta(u_0, \epsilon) > 0$ *tal que, se* $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_T} < \delta$ *então,*

$$\|V(t)u_0\|_{L^5_x L^{10}_T} < \epsilon.$$

Demonstração. Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Então, para $\tilde{u}_0 \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\|u_0 - \tilde{u}_0\|_2 < \delta$. Pela estimativa (2.17)

$$\begin{aligned}
\|V(t)u_0\|_{L^5_x L^{10}_T} &\leqslant \|V(t)(u_0 - \tilde{u}_0)\|_{L^5_x L^{10}_T} + \|V(t)(u_0 - \phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_T} \\
&\quad + \|V(t)\phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_T} \\
&\leqslant c\|u_0 - \tilde{u}_0\|_2 + c\|u_0 - \phi_j \tilde{u}_0\|_2 + \|V(t)\phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_T}. \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

Fazendo $j \to \infty$ e usando a hipótese em (3.66),temos

$$\|V(t)u_0\|_{L^5_x L^{10}_T} \leqslant c\delta + co(1) + \|V(t)\phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_T} \qquad (3.67)$$

Para finalizar a demostração de (3.67) vamos considerar que $suppV(t)\tilde{u}_0 \subseteq (0, T)$ e calcular as normas com o tempo variando em toda a reta.

$$\begin{aligned}
\|V(t)\phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_T} &\leqslant \|V(t)phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_t} \\
&\leqslant T^\lambda \|V(t)\phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^q_t} \\
&\leqslant T^\lambda \|D^{s/3}_t V(t)\phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_t} \\
&= T^\lambda \|D^s_x V(t)\phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_t}. \qquad (3.68)
\end{aligned}$$

Novamente, aplicando estimativa (2.17) em (3.68)

$$\begin{aligned}\|V(t)\phi_j * \tilde{u}_0\|_{L^5_x L^{10}_T} &\leqslant T^\lambda \|D^s_x \phi_j * \tilde{u}_0\|_2 \\ &\leqslant T^\lambda \|\phi_j * \tilde{u}_0\|_{2,2}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Tomando T tal que $T^\lambda \|\phi_j * \tilde{u}_0\|_{2,2} < \frac{\epsilon}{3c}$. Portanto, de (3.67) e (3.69) prova se o lema 3.4.3. $\square$

Teorema 3.4.1. *Seja* $s > 0$.*Então, para todo* $v_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ *existe* $T = T(\|v_0\|_{s,2})$ *com* $(T(\rho, s) \to \infty)$ *quando* $\rho \to 0$ *e uma única solução do PVI* (3) *satisfazendo:*

$$v \in C([-T, T] : \mathbf{H}^s(\mathbb{R})) \tag{3.70}$$

$$\|v\|_{L^5_x L^{10}_T} + \|D^s_x v\|_{L^5_x L^{10}_T} + \|D^{s/3}_t v\|_{L^5_x L^{10}_T} < \infty \tag{3.71}$$

$$\|\partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|D_x \partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|D^{s/3}_t \partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_T} < \infty. \tag{3.72}$$

Tomando $T' \in (0, T)$*, existe uma vizinhança* $\mathcal{W}$ *de* v_0 *pertencente ao conjunto* $\boldsymbol{H}^s(\mathbb{R})$ *tal que a aplicação* $\bar{v}_0 \to \bar{v}(t)$ *de* $\mathcal{W}$ *sobre a classe definida por* (3.70)*,* (3.71) *e* (3.72) *com* T' *em vez de* T *é suave.*

Demonstração. Os argumentos usados nesta demostração são análogos aos da prova do caso $k = 1, 2$.

Para $a, T > 0$, escolhido posteriormente definimos o conjunto

$$\mathbf{X}^a_T = \{v \in C([-T, T] : \mathbf{H}^s(\mathbb{R})) : |||v|||_T \leqslant a\}$$

onde,

$$|||v|||_T = \|v\|_{L^\infty_T \mathbf{H}^s} + \|v\|_{L^5_x L^{10}_T} + \|D^s_x v\|_{L^5_x L^{10}_T} + \|D^{s/3}_t v\|_{L^5_x L^{10}_T} + \|\partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|D^s_x \partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|D^{s/3}_t \partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_T}$$

Considere o operador $\psi : \mathbf{X}^a_T \to \mathbf{X}^a_T$ com

$$\psi_{v_0}(v)(t) = \psi(v)(t) = V(t)v_0 - \int_0^t V(t-\tau)(v^4 \partial_x v)(\tau) d\tau$$

Provaremos que o operador ψ satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo.

Dado $v \in \mathbf{X}_T^a$, então pela isometria de grupo

$$
\begin{aligned}
\|\psi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} &\leqslant \|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} \\
&\leqslant \|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&+ \left\| D_x^s \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2}
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Daí, usando a estimativa (2.9), temos que

$$
\begin{aligned}
\|\psi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} &\leqslant \|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + \left\| \partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^5)(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&+ \left\| \partial_x \int_0^t V(t-\tau)D_x^s(v^5)(\tau)d\tau \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant \|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + c\|v^5\|_{L_x^1 L_T^2} + c\|D_x^s(v^5)\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&\leqslant \|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + c\|v\|_{L_x^5 L_T^{10}}^5 + c\|D_x^s(v^5)\|_{L_x^1 L_T^2}
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

Aplicando a regra da cadeia, estimativa (2.23), na norma $\|D_x^s(v^5)\|_{L_x^1 L_T^2}$ em (3.74), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|D_x^s(v^5)\|_{L_x^1 L_T^2} &\leqslant \|v^4\|_{L_x^{5/4} L_T^{10/4}} \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\
&\leqslant \|v\|_{L_x^5 L_T^{10}}^4 \|D_x^s v\|_{L_x^5 L_T^{10}}
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

Observação 3.4.2. *Observe que em* (3.74) *e* (3.75) *já obtemos as normas desejadas, entretanto temos que obter o fator de contração. Como o* $\operatorname{supp} v \subset [-T, T]$*, então estenderemos a função* v *em toda reta real, isto é, basta definir a função* v *da seguinte maneira:*

$$
v(t) = \mathcal{X}_{[-T,T]}(t)v(t), \quad t \in \mathbb{R}
$$

Onde $\mathcal{X}_{[-T,T]}$ *é a função característica no intervalo* $[-T, T]$*. Daí, pode-se usar a transformada de Fourier para definir a derivada fracionaria na variável t.*

Observação 3.4.3. *Nas estimativas preliminares definimos a derivada fracionária* D^s *de uma função* f *no espaço. A derivada fracionária de uma função* f *no tempo pode ser* *definida da mesma maneira, entretanto a transformada de fourier e calculada no tempo.*

$$D_t^s f(t) = (|\tau|^s \widehat{f}(\tau))^{\vee(t)}.$$

Portanto, de (3.74), (3.75) e (3.63) concluímos que

$$\|\psi(\nu)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} \leqslant c\|\nu_0\|_{\mathbf{H}^s} + cT^{4\lambda}|||\nu|||_T^5 \tag{3.76}$$

Usando a desigualdade de Minkowski para integral,(2.17), (2.18) e desigualdade de Hölder que:

$$\begin{aligned} \|\psi(\nu)(t)\|_{L_x^5 L_T^{10}} &\leqslant \|V(t)\nu_0\|_{L_x^5 L_T^{10}} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)(\nu^4 \partial_x \nu)(\tau) d\tau \right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\ &\leqslant c\|\nu_0\|_2 + c\|\nu^4 \partial_x \nu\|_{L_x^{5/4} L_T^{10/9}} \\ &\leqslant c\|\nu_0\|_2 + \|\nu\|^4_{L_x^5 L_T^{10}} \|\partial_x \nu\|_{L_x^\infty L_T^2}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Portando de (3.77), (3.63) obtemos:

$$\|\psi(\nu)(t)\|_{L_x^5 L_T^{10}} \leqslant c\|\nu_0\|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R})} + cT^{4\lambda}|||\nu|||_T^5 \tag{3.78}$$

Analogamente ao caso anterior e usando as estimativas (2.22) e(2.23). temos:

$$\begin{aligned} &\|D_x^s \psi(\nu)(t)\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\ &\leqslant \|D_x^s V(t)\nu_0\|_{L_x^5 L_T^{10}} + \left\| D_x^s \int_0^t V(t-\tau)(\nu^4 \partial_x)(\tau) d\tau \right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\ &\leqslant c\|D_x^s \nu_0\|_2 + c\|D_x^s(\nu^4 \partial_x \nu)\|_{L_x^{5/4} L_T^{10/9}} \\ &\leqslant c\|D_x^s \nu_0\|_2 + c\|\nu\|^4_{L_x^5 L_T^{10}} \|D_x^s \partial_x \nu\|_{L_x^\infty L_T^2} + c\|D_x^s(\nu^4)\partial_x \nu\|_{L_x^{5/4} L_T^{10/9}} \\ &\leqslant c\|D_x^s \nu_0\|_2 + c\big(\|\nu\|^4_{L_x^5 L_T^{10}} \|D_x^s \partial_x \nu\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\nu\|^3_{L_x^5 L_T^{10}} \|D_x^s \nu\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|\partial_x \nu\|_{L_x^\infty L_T^2}\big). \end{aligned} \tag{3.79}$$

Portanto de (3.63), (3.79) concluímos que

$$\|D_x^s \psi(\nu)(t)\|_{L_x^5 L_T^{10}} \leqslant c\|\nu_0\|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R})} + cT^{4\lambda}|||\nu|||_T^5. \tag{3.80}$$

Pela desigualdade de Minkowski, (3.62), (2.17) e tomando $k = 4$ em (2.24) obtém-se:

$$\begin{aligned} &\|D_t^s \psi(\nu)(t)\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\ &\leqslant \|D_t^s V(t)\nu_0\|_{L_x^5 L_T^{10}} + \left\| D_t^s \int_0^t V(t-\tau)(\nu^4 \partial_x)(\tau) d\tau \right\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\ &\leqslant c\|D_x^s V(t)\nu_0\|_{L_x^5 L_T^{10}} + \big(\|D_x^s(\nu^4 \partial_x \nu)\|_{L_x^{5/4} L_T^{10/9}} + \|D_t^s(\nu^4 \partial_x \nu)\|_{L_x^{5/4} L_T^{10/9}}\big) \\ &\leqslant c\|D_x^s \nu_0\|_2 + \big(\|D_x^s(\nu^4 \partial_x \nu)\|_{L_x^{5/4} L_T^{10/9}} + \|D_t^s(\nu^4 \partial_x \nu)\|_{L_x^{5/4} L_T^{10/9}}\big). \end{aligned} \tag{3.81}$$

Resta analisar somente $\|D_t^s(v^4\partial_x v)\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}}$, pois a outra norma com derivada fracionária no espaço ja foi estimado em (3.79). Então, vamos considerar a função v como na obervação 3.4.2. Daí,pela estimativa (2.22) e desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
\|D_t^s(v^4\partial_x v)\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} &= \|D_t^s(v^4\partial_x v)\|_{L_x^{5/4}L_t^{10/9}} \\
&\leqslant \|v\|^3_{L_x^5L_t^{10}}\|D_t^s v\|_{L_x^5L_t^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_t^2} + \|v\|^4_{L_x^5L_t^{10}}\|D_t^s\partial_x v\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&= \|v\|^3_{L_x^5L_T^{10}}\|D_t^s v\|_{L_x^5L_T^{10}}\|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v\|^4_{L_x^5L_T^{10}}\|D_t^s\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leqslant T^{4\lambda}|||v|||_T^5 \qquad (3.82)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|D_t^s\psi(v)(t)\|_{L_x^5L_T^{10}} \leqslant \|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + cT^{4\lambda}|||v|||_T^5 \qquad (3.83)$$

Usando a desigualdade de Minkowski para integral,(2.7), (2.8) e (2.23), temos

$$\begin{aligned}
\|D_x^s\partial_x\psi(v)(t)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant \|D_x^s\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left\|D_x^s\partial_x\int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leqslant \|\partial_x V(t)D_x^s v_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left\|\partial_x^2\int_0^t V(t-\tau)D_x^s(v^5)(\tau)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + c\|D_x^s(v^5)\|_{L_x^1L_T^2} \\
&\leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + c\|v^4\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/4}}\|D_x^s v\|_{L_x^5L_T^{10}} \\
&\leqslant \|D_x^s v_0\|_2 + c\|v\|_{L_x^5L_T^{10}}\|D_x^s v\|_{L_x^5L_T^{10}} \qquad (3.84)
\end{aligned}$$

Logo, de (3.84) e (3.63) obteremos a estimativa desejada, ou seja,

$$\|D_x^s\partial_x\psi(v)(t)\|_{L_x^\infty L_T^2} \leqslant c\|D_x^s v_0\|_2 + cT^{4\lambda}|||v|||_T^5 \qquad (3.85)$$

Argumentando de maneira análoga a estimativa anterior e usando (3.62) pode-se estimar a norma à seguir, isto é, $\|D_t^{s/3}\partial_x\psi(v)(t)\|_{L_x^\infty L_T^2}$ .Entretanto, para usar (2.23) deve-se considerar a função v como na observação 3.4.2. Daí, as normas podem ser calculadas com o tempo variando em toda a reta. Então, usando a igualdade (3.62) e as estimativas

(2.7) e (2.8), temos que

$$
\begin{aligned}
\|D_t^{s/3}\partial_x\psi(v)(t)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant \|D_t^{s/3}\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_t^2} + \left\| D_t^{s/3}\partial_x \int_{-\infty}^{t} V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant \|\partial_x D_t^{s/3} V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_t^2} + \left\| \partial_x^2 \int_{-\infty}^{t} V(t-\tau)D_t^{s/3}(v^5)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant \|\partial_x D_x^{s} V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_t^2} + c\|D_t^{s/3}v^5\|_{L_x^1 L_t^2}
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

Pela regra da cadeia, estimativa (2.23), temos que

$$
\begin{aligned}
\|D_t^{s/3}\partial_x\psi(v)(t)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant c\|D_x^s v_0\|_{L_x^2} + \|D_t^{s/3}v\|_{L_x^5 L_t^{10}}\|v^4\|_{L_x^{5/4}L_t^{10/4}} \\
&\leqslant c\|D_x^s v_0\|_{L_x^2} + \|D_t^{s/3}v\|_{L_x^5 L_t^{10}}\|v\|^4_{L_x^5 L_t^{10}}.
\end{aligned} \tag{3.87}
$$

Portanto, de (3.87), (3.63)

$$
\|D_t^{s/3}\partial_x\phi(v)(t)\|_{L_x^\infty L_T^2} \leqslant c\|D_x^s v_0\|_{L_x^2} + cT^{4\lambda}|||v|||_T^5. \tag{3.88}
$$

Finalmente pela desigualdade de Minkowski, (2.7), (2.8) e (3.63) temos que:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x\psi(v)(t)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant \|\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left\| \partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leqslant \|\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \left\| \partial_x^2 \int_0^t V(t-\tau)(v^5)(\tau)d\tau \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + \|v^5\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + \|v\|^1_{L_x^5 L_T^{10}}0 \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + T^{4\lambda}|||v|||_T^5
\end{aligned} \tag{3.89}
$$

Assim, De (3.76), (3.78), (3.80), (3.83), (3.85), (3.88) e (3.89) segue que

$$
|||\psi(v)|||_T \leqslant c\|v_0\|_{\mathbf{H}^s} + T^{4\lambda}|||v|||_T^5
$$

Escolhendo $a = 2c\|v_0\|_{\mathbf{H}^s}$ e tomando $2cT^{4\lambda}a^4 < 1$ obtemos que

$$
|||\psi(v)|||_T \leqslant a
$$

Portanto

$$
\psi(\mathbf{X}_T^a) \subset \mathbf{X}_T^a
$$

Provaremos agora que o operador ψ é uma contração. Os argumentos que serão utilizados durante a demostração são análogos aos usados anteriormente na prova da inclusão $\psi(\mathbf{X}_T^a) \subset \mathbf{X}_T^a$.

Sejam $u, v \in \mathbf{X}_T^a$. Com efeito, usando o mesmo argumento apresentado na prova de inclusão.

$$\begin{aligned}
\|\psi(u)-\psi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} &= \|\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u - v^4\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} \\
&\leqslant \|\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u - v^4\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&+ \|D_x^s\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u - v^4\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant \|u^5-v^5\|_{L_x^1 L_T^2} + \|D_x^s(u^5-v^5)\|_{L_x^1 L_T^2} \qquad (3.90)
\end{aligned}$$

Agora, escrevemos

$$u^5 - v^5 = (u-v)\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i} \qquad (3.91)$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^5-v^5\|_{L_x^1 L_T^2} &\leqslant \sum_{i=0}^{4} \|(u-v)u^i v^{4-i}\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{4} \|(u-v)\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|u^i\|_{L_x^{\frac{5}{i}} L_T^{\frac{10}{4-i}}} \|v^{4-i}\|_{L_x^{\frac{5}{4-i}} L_T^{\frac{10}{4-i}}} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{4} \|(u-v)\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|u^i\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|v\|_{L_x^5 L_T^{10}}^{4-i} \qquad (3.92)
\end{aligned}$$

Daí, pela estimativa (3.63) temos que

$$\|u^5-v^5\|_{L_x^1 L_T^2} \leqslant T^{4\lambda}\|(u-v)\|_{L_x^5 L_T^{10}}\,[|||u|||_T + |||v|||_T]^4 \qquad (3.93)$$

Para tratar da norma $\|D_x^s(u^5-v^5)\|_{L_x^1 L_T^2}$ usemos a igualdade (3.91) combinada a regra de Leibniz, isto é, estimativa (2.22). Como segue,

$$\begin{aligned}
\|D_x^s(u^5-v^5)\|_{L_x^1 L_T^2} &\leqslant \sum_{i=0}^{4} \|D_x^s(u-v)\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|u^i v^{4-i}\|_{L_x^{\frac{5}{4}} L_T^{\frac{10}{4}}} \\
&+ \sum_{i=0}^{4} \|(u-v)\|_{L_x^5 L_T^{10}} \|D_x^s(u^i v^{4-i})\|_{L_x^{\frac{5}{4}} L_T^{\frac{10}{4}}} \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia (2.23), em (3.94)

$$\begin{aligned}\|D_x^s(u^i)\|_{L_x^{\frac{5}{i}}L_T^{\frac{10}{i}}} &\leqslant \|u^{i-1}\|_{L_x^{\frac{5}{i-1}}L_T^{\frac{10}{i-1}}}\|D_x^s u\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\ &\leqslant \|u\|_{L_x^5 L_T^{10}}^{i-1}\|D_x^s u\|_{L_x^5 L_T^{10}} \\ &\leqslant T^{i\lambda}|||u|||_T^i \end{aligned} \tag{3.95}$$

De modo similar, obtemos que

$$\|D_x^s(v^{4-i})\|_{L_x^{\frac{5}{4-i}}L_T^{\frac{10}{4-i}}} \leqslant T^{\lambda(4-i)}|||v|||_T^{4-i} \tag{3.96}$$

Portanto, vale que

$$\begin{aligned}\|D_x^s(u^i v^{4-i})\|_{L_x^{\frac{5}{4}}L_T^{\frac{10}{4}}} &\leqslant T^{i\lambda}|||u|||_T^i\|v\|_{L_x^5 L_T^{10}}^{4-i} + T^{\lambda(4-i)}|||v|||_T^{4-i}\|u\|_{L_x^5 L_T^{10}}^i \\ &\leqslant T^{4\lambda}\left[|||u|||_T + |||v|||_T\right]^4 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Portanto, concluímos que

$$\|\psi(u)-\psi(v)\|_{L_T^\infty \mathbf{H}^s} \leqslant T^{4\lambda}|||u-v|||_T\left[|||u|||_T + |||v|||_T\right]^4 \tag{3.98}$$

Então, pela estimativa (2.8), temos

$$\begin{aligned}\|\partial_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^\infty L_T^2} &= \left\|\partial_x\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u - v^4\partial_x v)(\tau)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &= \left\|\partial_x^2\int_0^t V(t-\tau)(u^5 - v^5)(\tau)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\leqslant c\|u^5 - v^5\|_{L_x^1 L_T^2} \end{aligned} \tag{3.99}$$

Usando (3.92), obtemos que

$$\|\partial_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^\infty L_T^2} \leqslant cT^{4\lambda}\|u-v\|_{L_x^5 L_T^{10}}\big(|||u|||_T^4 + |||v|||_T^4\big). \tag{3.100}$$

Usando a estimativa (2.18) e a desigualdade de Minkowski, temos

$$
\begin{aligned}
&\|\psi(u)-\psi(v)\|_{L^5_xL^{10}_T}\\
&\quad=\left\|\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u-v^4\partial_x v)(\tau)\right\|_{L^5_xL^{10}_T}\\
&\quad\leqslant c\|\partial_x(u^5-v^5)\|_{L^{5/4}_xL^{10/9}_T}\\
&\quad\leqslant c\|\partial_x(u-v)\sum_{i=0}^{4}u^{4-i}v^i\|_{L^{5/4}_xL^{10/9}_T}+c\|(u-v)\sum_{i=0}^{4}\partial_x(u^{4-i}v^i)\|_{L^{5/4}_xL^{10/9}_T} \qquad (3.101)\\
&\quad=\mathrm{I}+\mathrm{II}. \qquad (3.102)
\end{aligned}
$$

Vamos analisar separadamente I e II. Então, pela desigualdade de Hölder e pela estimativa (3.63)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}&\leqslant\|\partial_x(u-v)\|_{L^\infty_xL^2_T}\sum_{i=0}^{4}\|u^{4-i}v^i\|_{L^{5/4}_xL^{10/4}_T} \qquad (3.103)\\
&\leqslant T^{4\lambda}\|\partial_x(u-v)\|_{L^\infty_xL^2_T}\left[|||u|||^4_T+|||v|||^4_T\right] \qquad (3.104)
\end{aligned}
$$

Usando em II um argumento em semelhante ao usado na demostração da estimativa (3.104) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}\leqslant c\|u-v\|_{L^5_xL^{10}_T}\Bigg(&\sum_{i=0}^{3}\|u\|^{3-i}_{L^5_xL^{10}_T}\|\partial_x u\|_{L^\infty_xL^2_T}\|v\|^i_{L^5_xL^{10}_T}\\
&+\sum_{i=1}^{4}\|u\|^{4-i}_{L^5_xL^{10}_T}\|\partial_x v\|_{L^\infty_xL^2_T}\|v\|^{i-1}_{L^5_xL^{10}_T}\Bigg). \qquad (3.105)
\end{aligned}
$$

Consequentemente, de (3.105) e (3.63)

$$
\mathrm{II}\leqslant cT^{4\lambda}\|u-v\|_{L^5_xL^{10}_T}\left[|||u|||^4_T+|||v|||^4_T\right]. \qquad (3.106)
$$

Logo, de (3.104) e (3.106) concluímos que

$$
\|\psi(u)-\psi(v)\|_{L^5_xL^{10}_T}\leqslant cT^{4\lambda}\left(\|u-v\|_{L^5_xL^{10}_T}+\|\partial_x(u-v)\|_{L^\infty_xL^2_T}\right)\left(|||u|||^4_T+|||v|||^4_T\right) \qquad (3.107)
$$

Agora passamos a estimativa $\|D^s_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L^5_xL^{10}_T}$. Então, pela estimativa (2.18) , temos

$$
\begin{aligned}
\|D^s_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L^5_xL^{10}_T}&\leqslant c\|D^s_x\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u-v^4\partial_x v)(\tau)\|_{L^5_xL^{10}_T}\\
&\leqslant c\|D^s_x(u^4\partial_x u-v^4\partial_x v)\|_{L^{5/4}_xL^{10/9}_T}. \qquad (3.108)
\end{aligned}
$$

Sabendo que

$$D_x^s(u^4\partial_x u - v^4\partial_x v) = D_x^s\partial_x((u-v)\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i})$$

Segue que

$$\|D_x^s(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^5L_T^{10}} \leqslant \sum_{i=0}^{4}\|D_x^s\partial_x((u-v)u^{4-i}v^i)\|_{L_x^5L_T^{10}} \tag{3.109}$$

Usando a estimativa (2.22), temos

$$\|D_x^s(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^5L_T^{10}} \leqslant c\|D_x^s\partial_x(u-v)\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} \tag{3.110}$$

$$+\|\partial_x(u-v)D_x^s\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} \tag{3.111}$$

$$+\|D_x^s(u-v)\partial_x\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} \tag{3.112}$$

$$+\|(u-v)D_x^s\partial_x\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}}. \tag{3.113}$$

Veja que o argumento usado dividiu (3.108) em outras quatro normas diferentes.

Analisaremos primeiramente (3.110). Pela desigualdade de Hölder e argumentando de maneira semelhante a usada para mostrar (3.104) tem-se que

$$\|D_x^s\partial_x(u-v)\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} \leqslant T^{4\lambda}\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}\left[|||u|||_T^4+|||v|||_T^4\right]. \tag{3.114}$$

Para tratar (3.111), vamos usar a desigualdade de Hölder, (2.22), (2.23) e desigualdade de Minkowski. Assim,

$$\|\partial_x(u-v)D_x^s\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}}$$

$$\leqslant \|\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}\|D_x^s\sum_{i=0}^{4} u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/4}}$$

$$\leqslant \|\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}\Bigg(\sum_{i=0}^{4}\|D_x^s(u^i)\|_{L_x^{\frac{5}{i}}L_T^{\frac{10}{i}}}\|v^{4-i}\|_{L_x^{\frac{5}{4-i}}L_T^{\frac{10}{4-i}}}$$

$$+\sum_{i=0}^{4}\|u^i\|_{L_x^{\frac{5}{i}}L_T^{\frac{10}{i}}}\|D_x^s(v^{4-i})\|_{L_x^{\frac{5}{4-i}}L_T^{\frac{10}{4-i}}}\Bigg) \tag{3.115}$$

$$\leqslant \|\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}\Bigg(\sum_{i=0}^{4}\|u\|_{L_x^5L_T^{10}}\|D_x^s u\|_{L_x^\infty L_T^2}^{i-1}\|v\|_{L_x^5L_T^{10}}^{4-i} \tag{3.116}$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\|u\|_{L_x^5L_T^{10}}^{i}\|D_x^s v\|_{L_x^\infty L_T^2}\|v\|_{L_x^5L_T^{10}}^{3-i}\Bigg). \tag{3.117}$$

Logo, de (3.116), (3.117) e (3.63) concluímos que

$$\|\partial_x(u-v)D_x^s\sum_{i=0}^{4}u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} \leqslant T^{4\lambda}\|\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}\big[|||u|||_T+|||v|||_T\big]^4. \tag{3.118}$$

A demostração de (3.112) é análoga à (3.110). Logo,

$$\|D_x^s(u-v)\partial_x\sum_{i=0}^{4}u^i v^{4-i}\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} \leqslant T^{4\lambda}\|D_x^s(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\big[|||u|||_T+|||v|||_T\big]^4 \tag{3.119}$$

Usando a desigualdade de Hólder e regra de Leibniz (3.113), para obtermos

$$\|(u-v)\sum_{i=0}^{4}D_x^s\partial_x(u^iv^{4-i})\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}}$$

$$\leqslant c\|(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\Big(\|\sum_{i=0}^{4}D_x^s((\partial_xu)u^{i-1}(v^{4-i}))\|_{L_x^{5/43}L_T^{10/8}} \tag{3.120}$$

$$+\|\sum_{i=1}^{3}D_x^s(u^i(\partial_xv)v^{3-i})\|_{L_x^{5/3}L_T^{10/8}}\Big) \tag{3.121}$$

É suficiente mostrar apenas (3.121), pois a demostração de (3.120) é análoga. A demostração de (3.121) será feita para $1\leqslant i\leqslant 3$, pois os casos $i=0, i=4$ ja foram feitos em (3.79) Considera as funçoes u e v como na demostração apresentada em (3.63). Então, pela estimativas (2.22), (2.23) e Imersão de Sobolev na variável t. Logo,

$$\|\sum_{i=1}^{3}D_x^s((u^i\partial_xu)v^{4-i})\|_{L_x^{5/3}L_T^{10/8}}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i=1}^{3}\|D_x^s(u^i\partial_xu)\|_{L_x^{\frac{5}{3-i}}L_T^{\frac{10}{i}}}\|v^i\|_{L_x^{\frac{5}{4-i}}L_T^{\frac{10}{4-i}}}+\|u^i\partial_xuD_x^s(v^{4-i})\|_{L_x^{5/3}L_T^{10/8}}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{3}\big(\|D_x^s(u^i)\|_{L_x^{\frac{5}{i}}L_T^{\frac{10}{i}}}\|\partial_xu\|_{L_x^\infty L_T^2}+\|u^iD_x^s\partial_xu\|_{L_x^{\frac{5}{i}}L_T^{\frac{10}{i}}}\big)\|v\|_{L_x^5L_T^{10}}^{4-i}\\
&+\|u^i\partial_xu\|_{L_x^{\frac{5}{i}}L_T^{\frac{10}{i}}}\|D_x^s(v^{4-i})\|_{L_x^{\frac{5}{4-i}}L_T^{\frac{10}{4-i}}}
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Como os argumentos que finalizam a demostração de (3.122) são análogos aos usados em (3.79), vamos omitir a parte final. Portanto, de (3.120),(3.121), (3.122) e (3.63)

$$\|(u-v)\sum_{i=0}^{4}D_x^s\partial_x(u^iv^{4-i})\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} \leqslant cT^{4\lambda}\|(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\big[|||u|||_T+|||v|||_T\big]^4 \tag{3.123}$$

Assim, de (3.118), (3.119), (3.122) e (3.123)

$$\begin{aligned}
\|D_x^s(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^5L_T^{10}} &\leqslant cT^{4\lambda}\big(\|(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}+\|\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}+\\
&\|D_x^s(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}+\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}\big)[||u|||_T^4+|||v|||_T^4].
\end{aligned} \tag{3.124}$$

Sabendo que

$$\|D_x^s\partial_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^\infty L_T^2} = \left\|\partial_x^2\int_0^t V(t-\tau)D_x^s(u^5-v^5)(\tau)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}$$

Então, por (2.8) e (2.22)

$$\begin{aligned}\|D_x^s\partial_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant c\|D_x^s(u^5-v^5)\|_{L_x^1L_T^2}\\ &\leqslant c\|D_x^s(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\sum_{i=0}^{4}\|u^iv^{4-i}\|_{L_x^{\frac{5}{4}}L_T^{\frac{10}{4}}}\\ &+c\|(u-v)\sum_{i=0}^{4}D_x^s(u^iv^{4-i})\|_{L_x^1L_T^2}\\ &\leqslant c\|D_x^s(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\sum_{i=0}^{4}\|u^iv^{4-i}\|_{L_x^{\frac{5}{4}}L_T^{\frac{10}{4}}} &(3.125)\\ &+c\|(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\sum_{i=0}^{4}\|D_x^s(u^iv^{4-i})\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/4}}. &(3.126)\end{aligned}$$

Os últimos fatores de (3.125), (3.126) já foram estimados nas demostrações de (3.110) e (3.111). Logo,

$$\begin{aligned}\|D_x^s\partial_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant cT^{4\lambda}\big(\|D_x^s(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\\ &+\|u-v\|_{L_x^5L_T^{10}}\big)\left[|||u|||_T^4+|||v|||_T^4\right]\\ &\leqslant cT^{4\lambda}|||u-v|||_T\left[|||u|||_T+|||v|||_T\right]^4 &(3.127)\end{aligned}$$

Vamos agora analisar a norma $\|D_t^{s/3}(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^5L_T^{10}}$, temos que

$$\|D_t^{s/3}(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^5L_T^{10}} = \left\|D_t^{s/3}\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_xu-v^4\partial_xv)(\tau)\right\|_{L_x^5L_T^{10}}$$

Então, fazendo $\alpha_k=\beta_k=0$ em (2.25) temos

$$\begin{aligned}\|D_t^{s/3}(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^5L_T^{10}} &\leqslant c\|D_x^s\partial_x(u^5-v^5)\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} &(3.128)\\ &+c\|D_t^{s/3}\partial_x(u^5-v^5)\|_{L_x^{5/4}L_T^{10/9}} &(3.129)\end{aligned}$$

O termo em (3.128) é o mesmo em (3.108), como já foi demostrado, então vamos omitir a demostração de (3.128). Por outro lado, os passos da demostração de (3.129) são os mesmo da demostração de (3.108). Assim, basta considerar as funções u, v satisfazendo a observação 3.4.2. Portanto, vamos omitir a demostração de (3.129). Assim,

$$
\begin{aligned}
&\|D_t^{s/3}(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^5L_T^{10}} \\
&\quad\leqslant cT^{4\lambda}\big(2\|(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}+2\|\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}+\|D_x^s(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}} \\
&\quad+\|D_x^s\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2}+\|D_t^{s/3}\partial_x(u-v)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\quad+\|D_t^{s/3}(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\big)\left[|||u|||_T^4+|||v|||_T^4\right] \\
&\quad\leqslant cT^{4\lambda}|||u-v|||_T\left[|||u|||_T+|||v|||_T\right]^4.
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

Considerando as ditas funções u, v nas condições da observação 3.4.2. Então, pela estimativa (2.8)

$$
\begin{aligned}
\|D_t^{s/3}\partial_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^\infty L_t^2} &= \left\|D_t^{s/3}\partial_x\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u-v^4\partial_x v)(\tau)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant c\|D_t^{s/3}(u^5-v^5)\|_{L_x^1L_t^2}
\end{aligned}
\tag{3.131}
$$

Considerando $u^5-v^5=(u-v)\sum_{i=0}^{4}u^{4-i}v^i$ e usando as estimativas (2.22), desigualdade de Minkowski e (2.23) em (3.131), temos:

$$
\|D_t^{s/3}(u^5-v^5)\|_{L_x^1L_t^2} \leqslant \|D_t^{s/3}(u-v)\|_{L_x^5L_t^{10}}\sum_{i=0}^{4}\|u^{4-i}v^i\|_{L_x^{5/4}L_t^{10/4}} \tag{3.132}
$$

$$
+\|(u-v)\sum_{i=0}^{4}D_t^{s/3}(u^{4-i}v^i)\|_{L_x^1L_t^2} \tag{3.133}
$$

Usando em (3.132), a desigualdade de Höder e a propriedade das funções u, v descrita na observação 3.4.2

$$
\begin{aligned}
&\|D_t^{s/3}(u-v)\|_{L_x^5L_t^{10}}\sum_{i=0}^{4}\|u^{4-i}v^i\|_{L_x^{5/4}L_t^{10/4}} \\
&\qquad\leqslant \|D_t^{s/3}(u-v)\|_{L_x^5L_t^{10}}\sum_{i=0}^{4}\|u^{4-i}\|_{L_x^{\frac{5}{4-i}}L_t^{\frac{10}{4-i}}}\|v^i\|_{L_x^{\frac{5}{i}}L_t^{\frac{10}{i}}} \\
&\qquad\leqslant \|D_t^{s/3}(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\sum_{i=0}^{4}\|u\|_{L_x^5L_t^{10}}^{4-i}\|v\|_{L_x^5L_T^{10}}^{i}.
\end{aligned}
\tag{3.134}
$$

Novamente, usando a desigualdade de Hólder e as estimativas

(2.22), (2.23) em (3.133), temos

$$
\begin{aligned}
\|(u-v)\sum_{i=0}^{4} D_t^{s/3}(u^{4-i}v^i)\|_{L_x^1L_t^2} &\leqslant \|u-v\|_{L_x^5L_t^{10}}\sum_{i=0}^{4}\|D_t^{s/3}(u^{4-i}v^i)\|_{L_x^{5/4}L_t^{10/4}}\\
&\leqslant \|u-v\|_{L_x^5L_t^{10}}\Bigg(\sum_{i=0}^{4}\|D_t^{s/3}(u^{4-i})\|_{L_x^{\frac{5}{4-i}}L_t^{\frac{10}{4-i}}}\|v^i\|_{L_x^{\frac{5}{i}}L_t^{\frac{10}{i}}}\\
&+\sum_{i=0}^{4}\|u^{4-i}D_t^{s/3}(v^i)\|_{L_x^{5/4}L_t^{10/4}}\Bigg)\\
&\leqslant \|u-v\|_{L_x^5L_t^{10}}\Bigg(\sum_{i=0}^{3}\|u\|_{L_x^5L_t^{10}}^{3-i}\|D_t^{s/3}u\|_{L_x^5L_t^{10}}\|v\|_{L_x^5L_t^{10}}^{i}\\
&+\sum_{i=1}^{4}\|u\|_{L_x^5L_t^{10}}^{4-i}\|D_t^{s/3}v\|_{L_x^5L_t^{10}}\|v\|_{L_x^5L_t^{10}}^{i-1}\Bigg). \qquad (3.135)
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.134),(3.135) e (3.63)

$$
\begin{aligned}
\|D_t^{s/3}\partial_x(\psi(u)-\psi(v))\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant \big(\|u-v\|_{L_x^5L_T^{10}}\\
&+\|D_t^{s/3}(u-v)\|_{L_x^5L_T^{10}}\big)\left[|||u|||_T^4+|||v|||_T^4\right]. \qquad (3.136)
\end{aligned}
$$

Finalmente de (3.100) ,(3.107), (3.124), (3.127), (3.130) e (3.136)

$$
|||\psi(u)-\psi(v)|||_T \leqslant cT^{4\lambda}\left[|||u|||_T+|||v|||_T\right]^4|||u-v|||_T \qquad (3.137)
$$

Como $u, v \in \mathbf{X}_T^a$, então

$$
|||\psi(u)-\psi(v)|||_T \leqslant cT^{4\lambda}(2a)^4|||u-v|||_T
$$

Logo, para $T > 0$ tal que $cT^{4\lambda}(2a)^4 < 1$ temos que o operador ψ é uma contração em $\mathbf{X}_T^a$. Assim, ψ satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Portanto, existe $v \in \mathbf{X}_T^a$ tal que

$$
\psi(v)(t) = v(t)
$$

Ou seja,

$$
v(t) = V(t)v_0 - \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau.
$$

Portanto existe uma única solução $v \in \mathbf{X}_T^a$ para o PVI.

Sejam $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbf{H}^s$. Considere $\overline{u}, \overline{v}$ as soluções a estes dados iniciais. Então, usando o mesmo argumento da prova que o operador ψ é uma contração, prova-se também que para $T_1 \in (0, T)$

$$
|||\psi_{\overline{u}_0}(\overline{u})-\psi_{\overline{v}_0}(\overline{v})|||_{T_1} \leqslant \|v_0-\overline{v}_0\|_{\mathbf{H}^s} + cT_1^{1/2}(|||v|||_{T_1}^4+|||\overline{v}|||_{T_1}^4)|||\overline{u}-\overline{v}|||_{T_1}
$$

. Tomando $T_1 \in (0, T)$ tal que $cT_1(2a)^4 < 1$ segue que

$$|||\tilde{u} - \tilde{v}|||_T \leqslant \|v_0 - \bar{v}_0\|_{\mathbf{H}^s}$$

Ou seja, a aplicação $\bar{v}_0 \to \bar{v}$ onde é definida sobre uma vizinhança $\mathcal{W}$ centrada em $\bar{v}_0$ dependendo de T_1 para $\mathbf{X}_T^a$ é lipschitz. Analogamente ao caso $k = 2$ tem se que v é suave. □

Teorema 3.4.2. *Dado* $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\|v_0\|_2 < \delta$$

para algum existe $\delta > 0$. *Então, existe uma única solução* $v(\dot{})$ *para o PVI*(3) *satisfazendo*

$$v \in C(\mathbb{R} : L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R} : L^2(\mathbb{R})) \tag{3.138}$$

$$\|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_t^2} \tag{3.139}$$

$$\|v\|_{L_x^5 L_t^{10}} \tag{3.140}$$

Além disso, a aplicação $v_0 \to v(t)$ *de* $\{v_0 \in L_2(\mathbb{R}) : \|v_0\|_2 < \delta\}$ *sobre as classes definida em* (3.138)-(3.140) *é suave.*

Demonstração. A demostração do corolário 3.4.2 é semelhante a prova do teorema 3.4.1.

Considere o conjunto

$$\mathcal{Y}_a = \{u \in C(\mathbb{R} : L^2(\mathbb{R})) : |||u||| \leqslant a\},$$

onde a norma

$$|||u||| = \|\partial_x u\|_{L_x^\infty L_t^2} + \|u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_x^5 L_t^{10}}$$

Então, para cada $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ vamos definir o operador $\phi : \mathcal{Y}_a \to \mathcal{Y}_a$ com

$$\phi_{v_0}(v)(t) = \phi(v)(t) = V(t)v_0 - \int_0^t V(t-\tau)(v^4 \partial_x v)(\tau) d\tau.$$

Provaremos primeiramente que $\phi(\mathcal{Y}_a) \subset \mathcal{Y}$. Então,pelas estimativas (2.7), (2.9)

$$\begin{aligned}
\|\partial_x \phi(v)\|_{L_x^\infty L_t^2} &\leqslant \|V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_t^2} + \|\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^4 \partial_x v)(\tau) d\tau\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + \|\partial_x^2 \int_0^t V(t-\tau) v^5(\tau) d\tau\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + c\|v^5\|_{L_x^1 L_t^2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + c\|v\|_{L_x^5 L_t^{10}}^5.
\end{aligned} \tag{3.141}$$

Portanto,

$$\|\partial_x \phi(v)\|_{L^\infty_x L^2_t} \leqslant \|v_0\|_2 + |||v|||^5 \tag{3.142}$$

Por isometria e pela estimativa (2.9)

$$\begin{aligned}
\|\phi(v)\|_{L^\infty_t L^2_x} &\leqslant \|V(t)v_0\|_{L^\infty_t L^2_x} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)(v^4 \partial_x v)(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty_t L^2_x} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + \left\| \partial_x \int_0^t V(t-\tau) v^5(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty_t L^2_x} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + c\|v^5\|_{L^1_x L^2_t} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + c\|v\|^5_{L^5_x L^{10}_t}.
\end{aligned} \tag{3.143}$$

Logo,

$$\|\phi(v)\|_{L^\infty_t L^2_x} \leqslant \|v_0\|_2 + c|||v|||^5. \tag{3.144}$$

Finalmente, por (2.17), (2.18) e desigualdade de Hólder, temos

$$\begin{aligned}
\|\phi(v)\|_{L^5_x L^{10}_t} &\leqslant \|V(t)v_0\|_{L^5_x L^{10}_t} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)(v^4 \partial_x v)(\tau) d\tau \right\|_{L^5_x L^{10}_t} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + c\|v\partial_x v\|_{L^{5/4}_x L^{10/9}_t} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + c\|v^4\|_{L^{5/4}_x L^{10/4}_t} \|\partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_t} \\
&\leqslant c\|v_0\|_2 + c\|v\|_{L^5_x L^{10}_t} \|\partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_t}.
\end{aligned} \tag{3.145}$$

Logo, de (3.143)

$$\|\phi(v)\|_{L^5_x L^{10}_t} \leqslant c\|v_0\|_2 + c|||v|||^5. \tag{3.146}$$

Portanto de (3.142),(3.144) e (3.146)

$$|||\phi(v)||| \leqslant c\|v_0\|_2 + c|||v|||^5. \tag{3.147}$$

Tomando $a = 2c\|v_0\|_2$ e sendo $v \in \mathcal{Y}_a$ então, de (3.147)

$$ca^4 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Daí, escolhendo $\delta > 0$ tal que

$$c(4c\delta)^4 < \tfrac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad a \in (2c\delta, 3c\delta)$$

Então,

$$\phi(\mathcal{Y}_a) \subset \mathcal{Y}_a.$$

Provaremos que o operador é uma contração. O argumento que vai ser utilizado é igual ao anterior.

Dadas $u, v \in \mathcal{Y}_a$. Note que $u^5 - v^5 = (u - v) \sum_{i=0}^{4} u^{4-i} v^i$.
Então, pela estimativa (2.9) e argumentando de maneira similar a prova de (3.99), obtém-se

$$\begin{aligned}
\|\phi(u) - \phi(v)\|_{L_t^\infty L_x^2} &\leqslant \|\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u - v^4 \partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&= \|\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(u^5 - v^5)(\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant c\|u^5 - v^5\|_{L_x^1 L_t^2} \\
&\leqslant c\|u - v\|_{L_x^5 L_t^{10}} \sum_{i=0}^{4} \|u\|^{4-i}_{L_x^5 L_t^{10}} \|v\|^{i}_{L_x^5 L_t^{10}}.
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Assim, de (3.148)

$$\|\phi(u) - \phi(v)\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant c\|u - v\|_{L_x^5 L_t^{10}} \left[|||u|||^4 + |||v|||^4\right]. \tag{3.149}$$

Usando (2.18) e argumentando similar a (3.149) tem-se

$$\|\partial_x(\phi(u) - \phi(v))\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant c\|u - v\|_{L_x^5 L_t^{10}} \left[|||u|||^4 + |||v|||^4\right]. \tag{3.150}$$

Agora, por (2.18) tem-se

$$\begin{aligned}
\|\phi(u) - \phi(v)\|_{L_x^5 L_t^{10}} &= \|\int_0^t V(t-\tau)(u^4\partial_x u - v^4 \partial v)(\tau)d\tau\|_{L_x^5 L_t^{10}} \\
&\leqslant c\|\partial_x(u^5 - v^5)\|_{L_x^1 L_t^2} \\
&\leqslant c\|\partial_x(u - v)\sum_{i=0}^{4} u^{4-i}v^i\|_{L_x^{5/4} L_t^{10/9}} \qquad (3.151)\\
&+ c\|(u - v)\sum_{i=0}^{4} \partial_x(u^{4-i}v^i)\|_{Lx^{5/4} L_t^{10/9}}. \qquad (3.152)
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder e Minkowski em (3.151), temos

$$\begin{aligned}\|\partial_x(u-v)\sum_{i=0}^{4}u^{4-i}v^i\|_{L_x^1L_t^2} &\leqslant \|u-v\|_{L_x^\infty L_t^2}\sum_{i=0}^{4}\|u\|^{4-i}_{L_x^5L_t^{10}}\|v\|^{i}_{L_x^5L_t^{10}}\\ &\leqslant \|u-v\|_{L_x^\infty L_t^2}\big[|||u|||^4+|||v|||^4\big]. \qquad (3.153)\end{aligned}$$

Derivando o somatório em (3.152), então de modo similar a (3.151), temos que

$$\|(u-v)\sum_{i=0}^{4}\partial_x(u^{4-i}v^i)\|_{Lx^{5/4}L_t^{10/9}} \leqslant \|u-v\|_{L_x^5L_t^{10}}\big[|||u|||^4+|||v|||^4\big]. \qquad (3.154)$$

Portanto, de (3.151), (3.152), (3.153) e (3.154)

$$\|\phi(u)-\phi(v)\|_{L_x^5L_t^{10}} \leqslant c\big(\|u-v\|_{L_x^\infty L_t^2}+\|u-v\|_{L_x^5L_t^{10}}\big)\big[|||u|||^4+|||v|||^4\big]. \qquad (3.155)$$

Assim, de (3.149),(3.153)e (3.155)

$$\begin{aligned}|||\phi(u)-\phi(v)||| &\leqslant c\big(\|u-v\|_{L_x^\infty L_t^2}+\|u-v\|_{L_x^5L_t^{10}}\big)\big[|||u|||^4+|||v|||^4\big]\\ &\leqslant 2ca^4|||u-v|||. \qquad (3.156)\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta > 0$ tal que

$$2c\delta^4 < 1.$$

Então para $a < \delta$ implica que ϕ é uma contração. Logo, ϕ satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo, daí existe uma função $v \in \mathcal{Y}_a$ tal que $\phi(v) = v$, ou seja, existe uma única solução para o pvi (3).

Seja o conjunto $\mathcal{Z} = \{v_0 \in L^2(\mathbb{R}) : \|v_0\|_2 < \delta\}$ e aplicação $\tilde{v}_0 \to \tilde{v}$ definida em $\mathcal{Z}$ sobre $\mathcal{Y}_a$. Então, para v_0 , $\tilde{v}_0 \in \mathcal{Z}$ tem-se pelo mesmo argumento da prova da contração de ϕ e propriedade do grupo solução que

$$|||\phi_{v_0}(v)-\phi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v})||| \leqslant c\|v_0-\tilde{v}_0\|_2 + c\big[|||v|||^4+|||\tilde{v}|||^4\big]|||v-\tilde{v}|||.$$

Portanto, pelo mesmo argumento da prova do corolário 3.1.1 segue que v é suave. □

Teorema 3.4.3. ***(Caso Crítico)*** *Seja K=4. Para todo $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ existe $T = T(v_0)$ e uma única solução para o PVI satisfazendo*

$$v \in C([-T,T] : L^2(\mathbb{R})), \qquad (3.157)$$

$$\|v\|_{L_x^5L_T^{10}} < \infty, \qquad (3.158)$$

$$\|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty. \qquad (3.159)$$

Tomando $T' \in (0,T)$, existe uma vizinhança $\mathcal{W}$ centrada em $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ tal que aplicação $\tilde{v}_0 \to \tilde{v}$ de $\mathcal{W}$ sobre as classes definidas em (3.157)-(3.159) com T' em vez de T é suave.

Observação 3.4.4. *Se* $v_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ *com* $s > 0$, *o resultado anterior extende para classe*

$$v \in C([-T,T] : \mathbf{H}^s(\mathbb{R})), \tag{3.160}$$

$$\|D_x^s \partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty, \tag{3.161}$$

sobre o intervalo de tempo $[-T,T]$.

Demonstração. Seja $\mathcal{J} = \{v \in C([-T,T] : L^2(\mathbb{R})) : |||v||| \leqslant a\}$ onde

$$|||v||| = \|v - V(t)v_0\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|\partial_x v\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v\|_{L_x^5 L_T^{10}}.$$

Considere o operador

$$\Psi_{v_0}(v) = V(t)v_0 - \int_0^t V(t-\tau)(v^4 \partial_x v)(\tau)d\tau.$$

Afirmamos que o operador Ψ tem um único ponto fixo. De fato, pela estimativa (2.9)

$$\begin{aligned}
\|\Psi(v) - V(t)\Psi(v)(0)\|_{L_T^\infty L_x^2} &= \|V(t)v_0 - \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau - V(t)v_0\|_{L_T^\infty L_T^2} \\
&= \|\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^5)(\tau)d\tau\|_{L_T^\infty L_T^2} \\
&\leqslant c\|v^5\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&= c\|v\|_{L_x^5 L_T^{10}}.
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Portanto,

$$\|\Psi(v) - V(t)\Psi(v)(0)\|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant c|||v|||^5. \tag{3.163}$$

Agora, pela desigualdade de Minkowski, estimativa (2.18) e lema 3.4.2

$$\begin{aligned}
\|\partial_x \psi(v)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant \|\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&= \|\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|\partial_x^2 \int_0^t V(t-\tau)(v^5)(\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leqslant \|\partial_x V(t)v_0\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|v\|_{L_x^5 L_T^{10}} \qquad (3.164)\\
&< c\epsilon + c|||v|||^5. \qquad (3.165)
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, chega se que

$$\|\partial_x \psi(v)\|_{L^\infty_x L^2_T} \leqslant c|||v|||^5. \tag{3.166}$$

Finalmente, pela desigualdade de Minkowski, estimativa (3.4.3), desigualdade de Hólder e 3.4.3.

$$\begin{aligned}
\|\Psi(v)\|_{L^5_x L^{10}_T} &\leqslant \|V(t)v_0\|_{L^5_x L^{10}_T} + \|\int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v)(\tau)d\tau\|_{L^5_x L^{10}_T} \\
&\leqslant \|V(t)v_0\|_{L^5_x L^{10}_T} + c\|v^4\partial_x v\|_{L^{5/4}_x L^{10/9}_T} \\
&< c\epsilon + c\|v\|^4_{L^5_x L^{10}_T}\|\partial_x v\|_{L^\infty_x L^2_T}. \qquad (3.167)
\end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, temos

$$\|\Psi(v)\|_{L^5_x L^{10}_T} \leqslant c|||v|||^5. \tag{3.168}$$

consequentemente de (3.163), (3.166) e (3.168)

$$|||\psi(v)||| \leqslant c|||v|||^5$$

Ou seja,

$$\Psi(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$$

Provaremos que o operador Ψ é uma contração. Analisaremos somente a norma $\|\Psi(v) - V(t)\Psi(v)(0)\|_{L^\infty_T L^2_x}$, pois as outras normas utiliza os mesmos argumentos da prova de contração do operador ϕ no teorema 3.4.1, veja que,

$\|\Psi(v) - \Psi(u) - V(t)(\Psi(v)(0) - \Psi(u)(0))\|_{LT^\infty L^2_x}$

$$\begin{aligned}
&= \|\int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v - u^4\partial_x u)(\tau)\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&= \|\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^5 - u^5)(\tau)\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\leqslant c\|v^5 - u^5\|_{L^1_x L^2_T}. \qquad (3.169)
\end{aligned}$$

Portanto, de (3.99) e (**??**)

$$\begin{aligned}
\|\Psi(v) - \Psi(u) - V(t)(\Psi(v)(0) - \Psi(u)(0))\|_{L^\infty_T L^2_x} &\leqslant c\|v-u\|_{L^5_x L^{10}_T} \sum_{i=0}^{4} \|u\|^{4-i}_{L^5_x L^{10}_T}\|v\|^i_{L^5_x L^{10}_T} \\
&\leqslant c\|v-u\|_{L^5_x L^{10}_T}\left[|||v|||^4 + |||u|||^4\right]. \qquad (3.170)
\end{aligned}$$

Assim, por (3.101),(3.103) e (3.105), temos que

$$\|\Psi(v) - \Psi(u)\|_{L^5_x L^{10}_T} \leqslant c\|v - u\|_{L^5_x L^{10}_T}\left[|||v|||^4 + |||u|||^4\right] \tag{3.171}$$

Argumentando de maneira similar a prova de contração no teorema 3.4.1, obtemos de (??)

$$\|\partial_x(\Psi(v) - \Psi(u))\|_{L^\infty_x L^2_T} \leqslant c\|v - u\|_{L^5_x L^{10}_T}\sum_{i=0}^{4}\|v\|^{4-i}_{L^5_x L^{10}_T}\|u\|^i_{L^5_x L^{10}_T}. \tag{3.172}$$

Consequentemente,

$$\|\partial_x(\Psi(v) - \Psi(u))\|_{L^\infty_x L^2_T} \leqslant c\|v - u\|_{L^5_x L^{10}_T}\left[|||v|||^4 + |||u|||^4\right]. \tag{3.173}$$

Portanto de (3.170),(3.171) e (3.173)

$$|||\Psi(v) - \Psi(v)||| \leqslant c|||v - u|||\left[|||v|||^4 + |||u|||^4\right].$$

Sendo $u, v \in \mathcal{J}$, então tomando $2ca^4 < 1$ temos que

$$|||\Psi(v) - \Psi(v)||| \leqslant c|||v - u|||.$$

Ou seja, Ψ é uma contração. Consequentemente Ψ satisfaz as hipóteses do teorema do ponto fixo, daí existe uma única função $v \in \mathcal{J}$ tal que

$$\Psi(v) = v.$$

Assim, existe uma única solução para o PVI (3). Resta provar que a solução do PVI é suave.

Seja $\tilde{v}_0 \in \mathcal{W} \to \tilde{v} \in \mathcal{J}$ uma aplicação tal que

$$\tilde{v}(t) = V(t)\tilde{v}_0 - \int_0^t V(t-\tau)(\tilde{v}^4\partial_x\tilde{v})(\tau)d\tau.$$

Sabendo que a parte não-linear ja foi provada na prova da contração de Ψ. Então, temos pelas estimativas (2.17) e (3.171)

$$\begin{aligned}
&\|\Psi_{v_0}(v) - \Psi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v})\|_{L^5_x L^{10}_T} \\
&\leqslant \|V(t)(v_0 - \tilde{v}_0)\|_{L^5_x L^{10}_T} + \left\|\int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v - \tilde{v}^4\partial_x\tilde{v})(\tau)d\tau\right\|_{L^5_x L^{10}_T} \\
&\leqslant c\|v_0 - \tilde{v}_0\|_2 + c\left(\|\partial_x(v - \tilde{v})\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|v - \tilde{v}\|_{L^5_x L^{10}_T}\right)\left[|||v|||^4 + |||\tilde{v}|||^4\right].
\end{aligned} \tag{3.174}$$

Pelas estimativas (2.7) e (3.173)

$\|\partial_x(\Psi_{v_0}(v)-\psi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v}))\|_{L^\infty_x L^2_T}$

$$\leqslant \|\partial_x V(t)(v_0-\tilde{v}_0)\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|\partial_x \int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v - \tilde{v}^4\partial_x\tilde{v})(\tau)d\tau\|_{L^\infty_x L^2_T}$$
$$\leqslant c\|v_0-\tilde{v}_0\|_2 + c\|v-\tilde{v}\|_{L^5_x L^{10}_T}\big[|||v|||^4 + |||\tilde{v}|||^4\big]. \tag{3.175}$$

Pela estimativa (3.170) e isometria

$\|\Psi_(v)-\Psi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v})-V(t)(\Psi_{v_0}(v)-\Psi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v}))(0)\|_{L^\infty_T L^2_x}$

$$\leqslant \|V(t)(v_0-\tilde{v}_0)\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|\int_0^t V(t-\tau)(v^4\partial_x v - \tilde{v}^4\partial_x\tilde{v})(\tau)d\tau\|_{L^\infty_T L^2_x}$$
$$\leqslant c\|v_0-\tilde{v}_0\|_2 + c\|v-\tilde{v}\|_{L^5_x L^{10}_T}\big[|||v|||^4 + |||\tilde{v}|||^4\big]. \tag{3.176}$$

Logo, de (3.174),(3.175) e (3.176)

$|||\Psi_{v_0}(v)-\Psi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v})|||$

$$\leqslant c\|v_0-\tilde{v}_0\|_2 + c\big(\|\partial_x(v-\tilde{v})\|_{L^\infty_x L^2_T} + \|v-\tilde{v}\|_{L^5_x L^{10}_T}\big)\big[|||v|||^4 + |||\tilde{v}|||^4\big]$$
$$\leqslant c\|v_0-\tilde{v}_0\|_2 + c|||v-\tilde{v}|||\big[|||v|||^4 + |||\tilde{v}|||^4\big]. \tag{3.177}$$

Dado $\epsilon > 0$ tome $0 < T' < T$ tal que $\|v_0-\tilde{v}_0\|_2 < \epsilon$ então, de (3.177)

$$|||\Psi_{v_0}(v)-\Psi_{\tilde{v}_0}(\tilde{v})|||| \leqslant 2a^4c|||v-\tilde{v}|||$$

Portanto v é suave.

$\square$

3.5 Equação de Kortweg de Vries usando espaços de Bourgain

Vamos estabelecer uma outra demostração da boa colocação local do PVI (1). O método usado para estabelecer a boa colocção do PVI (1) é diferente do método utilizado na seção 3.1. Não vamos utilizar efeitos suavizantes e além disso vamos refinar a solução, isto é, provaremos a boa colocação para os espaços de Bougain $X_{s,b}$ com $s < \frac{3}{4}$.

Teorema 3.5.1. *Seja* $s \in (-\frac{3}{4}, 0)$. *Então, existe* $b \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ *tal que para todo* $v_0 \in \boldsymbol{H}^s(\mathbb{R})$ *existe* $T = T(\|v_0\|_{s,2})$ *com* $(T(\rho) \to \infty$ *com* $\rho \to 0)$ *e uma unica solução do PVI* (4) *no intervalo* $[-T, T]$ *satisfazendo*

$$v \in C([-T, T] : \mathbf{H}^s(\mathbb{R})), \tag{3.178}$$

$$v \in X_{s,b} \subset L^p_{x,loc}(\mathbb{R} : L^2_t(\mathbb{R})), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{3.179}$$

$$\partial_x(v^2) \in X_{s,b-1} \tag{3.180}$$

$$\partial_t v \in X_{s-3,b-1} \tag{3.181}$$

Além disso, para qualquer $T' \in (0, T)$ *existe* $R = R(T') > 0$ *tal que a aplicação* $\tilde{v}_0(t) \to \tilde{v}(t)$ *definida do cnjunto* $\{v_0 \in H^s : \|v_0 - \tilde{v}_0\|_{s,2} < R\}$ *sobre o conjunto expressado em* (3.178)-(3.181)

Demonstração. Seja $\mathbf{X}_a = \{v \in X_{s,b} : \|v\|_{X_{s,b}} < a\}$.

Para $v_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$, $s > -\frac{3}{4}$ vamos definir o operador

$$\Psi : \mathbf{X}_a \to \mathbf{X}_a$$

com

$$\Psi_{v_0}(v)(t) = \Psi(v)(t) = \theta_1(t)V(t)v_0 - \theta_1(t)\int_0^t V(t-\tau)\theta_\rho(\tau)\partial_x(v^2)(\tau)d\tau$$

Para mostrar que o PVI(1) tem uma única solução, vamos usar o argumento de ponto fixo. Seja $v \in \mathbf{X}_a$. Pela desigualdade de minkowski e aplicando as estimativas (2.26) e (2.30) para $\rho = 1$

$$\begin{aligned}\|\Psi(v)\|_{X_{s,b}} &\leqslant \|\theta_1 V(t)v_0\|_{X_{s,b}} + \|\theta_1 \int_0^t V(t-\tau)\theta_\rho(\tau)\partial_x v^2(\tau)d\tau\|_{X_{s,b}} \\ &\leqslant c\|v_0\|_{s,2} + c\|\int_0^t V(t-\tau)\theta_\rho(\tau)\partial_x v^2(\tau)d\tau\|_{X_{s,b}} \\ &\leqslant c\|v_0\|_{s,2} + c\|\theta_\rho(t)\partial_x v^2(\cdot,t)^2\|_{X_{s,b-1}}. \end{aligned} \tag{3.182}$$

Tomando $\beta = \frac{(b-b')}{8(1-b')}$ e usando as estimativas (2.44) e (2.45) em (3.182)

$$\|\Psi(v)\|_{X_{s,b}} \leqslant c\|v_0\|_{s,2} + c\rho^\beta \|\partial_x v^2(\cdot, t)\|_{X_{s,b'-1}}. \tag{3.183}$$

Para completar a demostração (3.183), considere $a_1 = (1 + |\tau - \xi^3|)$ e $a_2 = (1 + |(\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3|)$. Sendo,

$$\|\partial_x(v^2)\|_{X_{s,b'}} = \|(1 + |\tau - \xi^3|)^{b'-1}(1 + |\xi|)^{2s}|\widehat{\partial_x(v^2)}\|_{L^2_\xi L^2_\tau}.$$

Para facilitar os cálculos vamos fazer a demostração para $s = 0$. O caso em que $s \neq 0$ segue analogamente.Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, estimativa (2.45), desigualdade de Hölder, temos

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x(v^2)\|_{X_{0,b'}}\\
&\leqslant \left\| |\xi|(1+|\tau-\xi^3|)^{b'-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_1 a_2 \widehat{v}(\xi_1,\tau_1)\widehat{v}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\frac{d\xi_1 d\tau_1}{a_1 a_2} \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\\
&\leqslant c \left\| |\xi|(1+|\tau-\xi^3|)^{b'-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{(1+|\tau-\xi^3|)^{2b}(1+|(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3|)^{2b}} \right)^{1/2} \right.\\
&\times \left. \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_1^{2b} a_2^{2b} |\widehat{v}(\xi_1,\tau_1)|^2 |\widehat{v}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 \right)^{1/2} \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau}\\
&\leqslant c \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_1^{2b} a_2^{2b} |\widehat{v}(\xi_1,\tau_1)|^2 |\widehat{v}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \right)^{1/2}\\
&\leqslant c\|v\|_{X_{0,b}} \|(1+|(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3|)\widehat{v}(-\xi_1,-\tau_1)\|_{L_\xi L_\tau}. \qquad (3.184)
\end{aligned}
$$

Sabendo que a norma no espaço misto $L_\xi L_\tau$ é invariante por translação, temos de (3.183) e (3.184)

$$\|\Psi(v)\|_{X_{s,b}} \leqslant \|v\|_{s,2} + c\rho^\beta \|v\|^2_{X_{s,b}}.$$

Tomando $a = 2c\|v_0\|_{s,2}$ e ρ tal que

$$c\rho^\beta a < \frac{1}{2}$$

Temos,

$$\|\Psi(v)\|_{X_{s,b}} \leqslant a.$$

Portanto

$$\Psi(\mathbf{X}_a) \subset \mathbf{X}_a$$

Analogamente à prova de inclusão e fazendo algumas adaptações prova-se que o operador Ψ é uma contração. Sejam $v, u \in \mathbf{X_a}$ tais que

$$
\begin{aligned}
\|\psi(v)-\Psi(u)\|_{X_{s,b}} &= \left\| \theta_1(t)\int_0^t V(t-\tau)\theta_\rho(v\partial_x v - u\partial_x u)(\tau) \right\|_{X_{s,b}} \\
&\leqslant \|\theta_\rho(t)\partial_x(v^2-u^2)\|_{X_{s,b-1}} \\
&\leqslant c\rho^\beta \|\theta_\rho(t)\partial_x(v^2-u^2)\|_{X_{s,b'-1}} \\
&\leqslant c\rho^\beta \||\xi|(1+|\tau-\xi^3|)^{b'-1}(1+|\xi|^3)^s \widehat{(v-u)} * \widehat{(v+u)}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi L^2_\tau}
\end{aligned} \tag{3.185}
$$

Vamos fazer a demostração para $s = 0$. chamando $a_1 = (1+|\tau_1-\xi_1^3|)$, $a_2 = (1+|(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3|)$

$$
\begin{aligned}
&\||\xi|(1+|\tau-\xi^3|)^{b'-1}\widehat{(v-u)} * \widehat{(v+u)}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\
&= \left\| |\xi|(1+|\tau-\xi^3|) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{(v+u)}(\xi_1,\tau_1) \right. \\
&\left. \widehat{(v-u)}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\
&\leqslant \left\| |\xi|(1+|\tau-\xi^3|)^{b'-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_1^b(v+u)(\xi_1,\tau_1)a_2^b \right. \\
&\left. (v-u)(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)\frac{d\xi_1 d\tau_1}{a_1^b a_2^b} \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau}
\end{aligned} \tag{3.186}
$$

Então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, estimativa (2.45) e torema de Fubini
$\||\xi|(1+|\tau-\xi^3|)^{b'-1}\widehat{(v-u)} * \widehat{(v+u)}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \leqslant$

$$
\begin{aligned}
&\left\| |\xi|(1+|\tau-\xi)^{b'-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi_1 d\tau_1}{(1+|\tau_1-\xi_1^3|)^{2b}(1+|(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3|)^{2b}} \right)^{1/2} \right\|_{L^\infty_\xi L^\infty_\tau} \\
&\times \left\| \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_1^{2b}a_2^{2b}|\widehat{u+v}(\xi_1,\tau_1)|^2|\widehat{(v-u)}(\xi-\xi,\tau-\tau_1)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\
&\leqslant c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_1^{2b}a_2^{2b}|\widehat{(u+v)}(\xi_1,\tau_1)|^2|\widehat{(v-u)}(\xi-\xi_1,\tau-\tau_1)|^2 d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \right)^{1/2}. \\
&\leqslant c\|u+v\|_{X_{0,b}}\|(1+|(\tau-\tau_1)-(\xi-\xi_1)^3|\widehat{(v-u)}(-\xi_1,-\tau_1)\|_{L^2_\xi L^2_\tau}
\end{aligned}
$$

Sabendo que as normas em (3.187) independe de translação, temos pela desigualdade de

Minkowski

$$
\begin{aligned}
\| |\xi| (1+|\tau-\xi^3|)^{b'-1} \widehat{(v-u)} * \widehat{(v+u)}(\xi,\tau) \|_{L^2_\xi L^2_\tau} &\leqslant c\|u+v\|_{X_{0,b}} \|u-v\|_{L^2_\xi L^2_\tau} \\
&\leqslant c(\|v\|_{X_{0,b}} + \|u\|_{X_{0,b}}) \|v-u\|_{X_{0,b}} \\
&\leqslant 2ca\|v-u\|_{X_{0,b}} \qquad (3.187)
\end{aligned}
$$

Daí, de (3.185) e sabendo que a estimativa feita é valido para todo s

$$
\|\Psi(v)-\Psi(u)\|_{X_{s,b}} \leqslant 2ac\rho^{\beta}\|v-u\|_{X_{s,b}}.
$$

Escolhendo T tal que

$$
2ac\rho^{\beta} \leqslant \frac{1}{2}
$$

Chega-se que o operador Ψ é uma contração.

Portanto pelo teorema do ponto fixo existe uma única função $v \in \mathbf{X}_a$ tal que

$$
\Psi(v)(t) = v(t).
$$

Ou seja,

$$
v(t) = \theta_1(t)V(t)v_0 - \frac{\theta_1(t)}{2}\int_0^t V(t-tau)\theta_\rho(\tau)\partial_x(v^2(\tau))d\tau.
$$

Resta provar que a solução v é suave no conjunto $C([0,T]:\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$. Seja $0<\tilde{t}<t\leqslant 1$ e $t-\tilde{t}\leqslant \Delta t$, então podemos escrever a equação integral da seguinte forma:

$$
v(t) = \theta_1(t-\tilde{t})V(t-\tilde{t})v(\tilde{t}) - \theta_1(t-\tilde{t})\int_0^{t-\tilde{t}} V(t-\tilde{t}-\tau)\theta_\rho(\tau)\partial_x(v^2(\tau))d\tau
$$

Então,fazendo a mudança de variável $t'=\tilde{t}+\tau$ e como $\Delta t<\rho$ temos ,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t-\tilde{t}} V(t-\tilde{t}-\tau)\theta_\rho(\tau)\partial_x(v^2)(\tau)d\tau &= \int_{\tilde{t}}^{t} V(t-t')\theta_\rho(t'-\tilde{t})\partial_x(v^2)(t'-\tilde{t})dt' \\
&= \int_{\tilde{t}}^{t} V(t-t')\theta_{\Delta t}(t'-\tilde{t})\partial_x(v^2)(t'-\tilde{t})dt' \qquad (3.188)
\end{aligned}
$$

Logo, de (3.188) e estimativas (2.44), (2.45)

$$
\begin{aligned}
\|v(t)-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s} &\leqslant \|\theta_1(t-\tilde{t})V(t-\tilde{t})v(\tilde{t})-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s}\\
&+c\|\theta_1(t-\tilde{t})\int_0^{t-\tilde{t}} V(t-\tilde{t}-\tau)\theta_\rho(\tau)\partial_x(v^2(\tau))d\tau\|_{\mathbf{H}^s}\\
&=c\|\theta_1(t-\tilde{t})V(t-\tilde{t})v(\tilde{t})-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s}\\
&+c\|\theta_1(t-\tilde{t})\int_{\tilde{t}}^{t} V(t-t')\theta_{\Delta t}(t'-\tilde{t})\partial_x(v^2)(t'-\tilde{t})dt'\|_{\mathbf{H}^s}\\
&\leqslant c\|\theta_1(t-\tilde{t})V(t-\tilde{t})v(\tilde{t})-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s}+c\|\theta(\frac{t'-\tilde{t}}{\Delta t})\partial_x(v^2)\|_{X_{b-1}}\\
&\leqslant c\|\theta_1(t-\tilde{t})V(t-\tilde{t})v(\tilde{t})-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s}+c(\Delta t)^\beta\|\partial_x(v^2)\|_{X_{s,b'-1}}. \qquad (3.189)
\end{aligned}
$$

Como ja foi provado que $\|\partial_x(v^2)\|_{X_{s,b'-1}} \leqslant c\|v\|^2_{X_{\mathbf{H}^s}}$. Logo, por (3.189)

$$
\|v(t)-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s} \leqslant c\|\theta_1(t-\tilde{t})V(t-\tilde{t})v(\tilde{t})-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s}+c(\Delta t)^\beta\|v\|^2_{X_{s,b}}. \qquad (3.190)
$$

Assim, fazendo $\Delta t \to 0$ em (3.190), temos que $\theta_1 \simeq 1$ e $\|\theta_1(t-\tilde{t})V(t-\tilde{t})v(\tilde{t})-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s} \to 0$. Consequentemente

$$
\|v(t)-v(\tilde{t})\|_{\mathbf{H}^s}=o(1).
$$

Portanto, v é suave. $\square$

Capítulo 4

Má colocação da Equação KdV

Nos capítulos anteriores foram feito um estudo sobre a colocação da equação KdV.Kenig, Ponce e Vega provaram que g-KdV é bem posta em $\mathbf{H}^s$ para $s \geqslant s_k$ tal que s_k é definido da seguinte maneira $s_k = \frac{1}{2} - \frac{2}{k}$ para $k \geqslant 4$.Em [2] Kening, Ponce,Vega e Svantede Provaram que a g-KdV é mal posta em $\mathbf{H}^s$ para estudos foram baseados

Teorema 4.0.1. *O PVI* (I) *com* $k \geqslant 4$ *é mal- posto em* $\mathbf{H}^{s_k}$ *com* $s_k = \frac{1}{2} - \frac{2}{k}$ *no sentido que a existência e dependência contínua das soluções não pode ser expressa nos termos do tamanho do dado inicial na norma* $\mathbf{H}^{s_k}$.

Demonstração. Para provar o teorema , vamos considerar somente o caso $k = 4$, pois o argumento utilizado no caso $k > 4$ é exatamente ao que vai ser usado no decorrer desta demostração. Considere a solução da onda solitária

$$\phi_{c,4} = \left[15c\,\mathrm{sech}^2(2\sqrt{c}x)\right]^{\frac{1}{4}} \tag{4.1}$$

que tem decaimento no infinito e é solução da equação diferencial ordinária

$$-c\phi + \partial_x^2\phi + \frac{1}{5}\phi^5 = 0 \tag{4.2}$$

e $v_{c,4} = \phi_{c,k}(x - ct)$ uma solução tal que $v_0 = \phi_{c_k,4}$. Analisaremos separadamente as normas

$$\|\phi_{c_1,4} - \phi_{c_2,4}\|_2^2 \tag{4.3}$$

$$\|v_{c_1,4}(\cdot,t) - v_{c_2,4}(\cdot,t)\|_2^2 \tag{4.4}$$

Para $t \neq 0$. Provaremos que para c_1, c_2 conveniente a norma (4.3) converge para zero qunado $t \to 0$ enquanto a norma (4.4) converge para um número diferente de zero. Ora, escolhemos $c_1 = N + 1$ e $c_2 = N \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\phi_{c_1,4} - \phi_{c_2,4}\|_2^2 &= \|\phi_{c_1,4}\|_2^2 + \|\phi_{c_2,4}\|_2^2 - 2\langle \phi_{c_1,4}, \phi_{c_2,4}\rangle \\
&= \|\phi_{c_1}\|_2^2 + \|\phi_{c_2}\|_2^2 - 2\int \phi_{c_1,4}(x)\phi_{c_2,4}(x)dx \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = \sqrt{c_1}x$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_{c_1,4}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{c_1,4}(x)|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{15c_1}\operatorname{sech}(\sqrt{c_1}x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{15}\operatorname{sech}(y)dy \\
&= \|\phi_{c_2,4}\|_2^2 = a^2 \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Fazendo a mesma mudança de variável feita anteriormente no produto interno, isto é, $y = \sqrt{c_1}x$, temos que

$$\langle \phi_{c_1,4}, \phi_{c_2,4}\rangle = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{4}} \int \phi_{c_1,4}(y)\phi_{c_2,4}\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}y\right)dy$$

fazendo $N \to \infty$, temos que $\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \to 1$, daí,

$$\langle \phi_{c_1}, \phi_{c_2}\rangle \to a^2 \qquad (4.7)$$

Portanto de (4.5),(4.6) e (4.7), temos que

$$\|\phi_{c_1,4} - \phi_{c_2,4}\|_2^2 \to 0 \qquad (4.8)$$

por outro lado analisaremos a norma (4.4). sabendo que a norma L^2 é invariante por translação, temos

$$\begin{aligned}
\|v_{c_1,4}(\cdot,t) - v_{c_2,4}(\cdot,t)\|_2^2 &= \|v_{c_1,4}(\cdot,t)\|_2^2 + \|v_{c_2,4}(\cdot,t)\|_2^2 - 2\langle v_{c_1,4}(\cdot,t), v_{c_2,4}(\cdot,t)\rangle \\
&= \|\phi_{c_1,4}(x - c_1t)\|_2^2 + \|\phi_{c_2,4}(x - c_2t)\|_2^2 \\
&- 2\int \phi_{c_1,4}(x - c_1t)\phi_{c_2,4}(x - c_2t)dx \\
&= \|\phi_{c_1,4}\|_2^2 + \|\phi_{c_2,4}\|_2^2 - 2\int \phi_{c_1,4}(x - c_1t)\phi_{c_2,4}(x - c_2t)dx
\end{aligned}$$

Fazendo aa mudanças de variável $z = \sqrt{c_1}x - c_1^{\frac{3}{2}}t$ respectivamente e sabendo que $a = \|\phi_{c_j,4}\|_2^2$ temos que

$$\begin{aligned}\|v_{c_1,4}(\cdot,t) - v_{c_2,4}(\cdot,t)\|_2^2 &= 2a^2 - 2\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}}\int \phi_{c_1,4}(x - c_1t)\phi_{c_2,4}(x - c_2t)dx \\ &= 2a^2 - 2\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}}\int \phi_4(z)\phi_4(\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}}z - \sqrt{c_2}(c_1 - c_2)t)dx\end{aligned}$$

Fazendo $N \to \infty$, então $\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}} \to 1$ e $\sqrt{c_2}(c_1 - c_2) \to \infty$, daí com a função ϕ_4 tem decaimento no infinito, temos

$$2\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}}\int \phi_{c_1,4}(z)\phi_{c_2,4}(\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}}z - \sqrt{c_2}(c_1 - c_2)t)dx \to 0$$

Consequentemente

$$\sup_{[0.T]} \|v_{c_1,4}(\cdot,t) - v_{c_2,4}(\cdot,t)\|_2^2 \to 2a^2 \tag{4.9}$$

Para quaisquer $T > 0$. Portanto, de (4.8) e (4.9) chegamos a uma contradição. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Angulo, J.,*Existence and Stability of Solitary waves Solution to nonlinear dispersive evoluiton equations*, Publicações matemáticas. IMPA. 2003.

[2] Birnir,Björn et al. *On the ill-posedness of the IVP for the Generalized Korteweg-de Vries and nonlinear Schrödinger equations*, J. London Math. soc. 53 (1996), p. 551-559.

[3] Bougain,J. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equation*,Geom.Funct.3 ,(1993),p.107-156,209-262.

[4] Folland, G.B. - *Real analysis, Modern Techniques and their Application.*2º.ed.New York: Jhon Wiley and Sons,Inc,1999. 181-208 p.

[5] Gardner, C.S et al.*A method for solving the Kortweg-de Vries equation* Phys.Rev. Letters. 19,1967, pp. 1095-1097.

[6] Gardner,C.S et al., *The Kotweg-de Vries and generalizations. VI. Method for exact solution*. Comm. Pure Appl. Math. 27, 1974, p. 97-133

[7] Russel J. S.,*Reportes on Waves*, Rep. 14th Meet. Brit.Assoc. Adv. Sci., York (1844), 311-390

[8] Grujic,Z; Kalisch,H; Goldstein, J.A, *Local Well-Posedness of The Generalized Kortweg-de Vries in Space Analityc Function, Differential and Integral Equations*, 15, Number 11, Nov. 2002, p. 1325-1334.

[9] Kenig,C.E., Ponce,G and Vega, L. *On the (Generalized) Kortweg-de Vries equation*, Duke Math.J. 59,p. 927-945,1989.

[10] Kenig,C.E., Ponce,G., and Vega, L. *Well-posedness of initial value problem for the Kortweg-de vries equation* , J.Amer. Math. Soch 4,1991,p. 323-347.

[11] Kenig C.E; Ponce. and Vega, L. *Well-posedness and scattering results for the generalized Kortweg-de Vries equation via contraction principle*,Comm,pure appl. Math.**46**, ,p. 527-620,1993

[12] Korteweg,D.J., de Vries, G.*On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*,Philos.Mag. 539,1895,p.422-443.

[13] Duoandikoetxea, J.*Fourier Analysis, Graduate Studies in Mathematics*, AMS, Providence, 2001.

[14] Iorio, R; Iorio, V. M., *Fourir Analisys and Partial Dieferential Equations*, Cambridge University Press, 2001.

[15] Lages, E. *Espaços Métricos* 5º ed. Rio de Janeiro: IMPA 2017. 337 p.

[16] Linares, F;,Ponce,G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*,1º.ed.New York: Springer,2009. 151-189 p.

[17] Stein,E.M; Weiss, G. - *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*.New Jersey: Princeton Univ. Press, 1971.