



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Iterações Cíclicas de Douglas Rachford

Pedro Rodrigues da Silva Filho

Teresina - 2020

Pedro Rodrigues da Silva Filho

Dissertação de Mestrado:

Iterações Cíclicas de Douglas Rachford

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2020



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Iterações Cíclicas de Douglas-Rachford

Pedro Rodrigues da Silva Filho

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

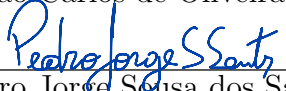
A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 03 de Dezembro de 2020.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes - Orientador


Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza - UFPI


Prof. Dr. Pedro Jorge Sousa dos Santos - UFDPAr

Ficha catalográfica editada pela biblioteca setorial do CCN.

xxxx	Silva Filho, Pedro Rodrigues. Iterações Cíclicas de Douglas Rachford.
	Pedro Rodrigues da Silva Filho – Teresina: 2020.
	Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes. Co-Orientador: Prof. Dr. XXXXXXXXXXXX.
	1. Área de Concentração: Otimização
	CDD 516.36

Dedico à minha mãe, Francinete, meu pai Pedro, minhas irmãs, Laiane e Laís, e a minha namorada Andressa . Também dedico à Minha avó, Onédia(In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço Deus pela vida, saúde e por ter colocado pessoas tão especiais na minha vida.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial, a minha mãe Francinete e meu pai Pedro, que não mediram esforços pela a minha formação, as minhas irmãs, pelo apoio e incentivo e ao meu primo Douglas que sempre me direcionou aos caminhos certos.

Agradeço a família Bezerra, em especial, a minha namorada Andressa Bezerra, que sempre me deu apoio, teve paciência e me incentivou em momentos de dificuldade.

Agradeço a todos os meus amigos, pelo apoio, força e companherismo, em especial Bruno, Chistopher, Francimar, Igor, Lucas Emanuel, Dieme, Pedro Paulo, Márcio, Tharsio, Erisvaldo, João Vinicius, João Santos, Edimison, Ruan, Jean, Thiago Mayson, Jonatas, Marcelo, Leonardo, José Edilson, Silas, Paulo Sérgio, Severino, Michell, Rafael e a todos os amigos que fiz na UFPI nos últimos anos.

Agradeço ao meu orientador Jurandir de Oliveira pela amizade, ensinamentos e paciência.

Agradeço aos professores do departamento de matemática da UFPI, em especial, aos professores João Carlos, Ítalo Dowell, Paulo Alexandre, Halysen Baltazar, Newton Santos, Barnabé Pessoa e Jeferson Leite pelo apoio, amizade e ensinamentos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“A persistência é o menor caminho do êxito”.

Charles Chaplin.

Resumo

Neste trabalho apresentamos o método de Douglas Rachford para solucionar problemas de encontrar zero da soma de operadores monótonos maximais em espaço de Hilbert real. Através da ideia do método de Douglas Rachford apresentamos o método de iteração cíclica e *Versão Média* de Douglas Rachford para solucionar problemas de viabilidade convexa. Em todos os métodos apresentados mostramos a boa definição e provamos a convergência fraca para uma solução dos propostos problemas.

Palavras-chave: Método de Douglas-Rachford; Convergência Fraca; Iterações Cíclicas

Abstract

In this work we present the Douglas-Rachford method to solve problems of finding zero of sum of maximal monotonous operators in a real Hilbert space. Through the idea of the Douglas-Rachford method we present the cyclic iteration method and *Medium Version* of Douglas-Rachford to solve convex viability problems. In all the presented methods we show the well definition and we prove the weak convergence for a solution of the proposed problems.

Key-words: Method Douglas-Rachford; Weak Convergence; Cyclic Iterations

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Noções Preliminares	3
2.1 Operadores Monótonos	3
3 Algoritmo de decomposição para operadores monótonos maximais	10
4 Douglas-Rachford e o problema de Viabilidade Convexa	15
4.1 Operador de Douglas-Rachford	20
4.2 Composição de Operadores	24
4.3 Iterações Cíclicas de Douglas-Rachford.	29
4.4 Reformulação Produto	36
Referências Bibliográficas	40

Capítulo 1

Introdução

Sejam $A, B : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ operadores monótonos maximais. O problema de achar zero da soma de operadores se resume a:

$$\text{Encontrar } z \in \mathcal{H} \text{ tal que } 0 \in (A + B)(z). \quad (1.1)$$

Esse problema possui várias aplicações importantes: na teoria de lubrificação, no problema de filtração, no problema de obstáculo, etc (ver [11]). O método de Douglas-Rachford é aplicado frequentemente na resolução do problema citado acima (ver [21]).

O problema (1.1) para um caso específico de A e B é equivalente ao problema de viabilidade convexa (demonstrado a seguir no Capítulo 3) para dois conjuntos que se resume a:

$$\text{Encontrar } c \in \mathcal{H} \text{ tal que } c \in C_1 \cap C_2, \quad (1.2)$$

onde $C_1, C_2 \subset \mathcal{H}$ são conjuntos convexos e fechados com interseção não vazia. Em geral, dado N conjuntos fechados e convexos com interseção não vazia, o problema de viabilidade convexa dos N conjuntos consiste em encontrar um ponto na interseção dos N conjuntos. O problema de viabilidade convexa é de importância central em diversas áreas da Matemática e Engenharia. Existem diversos métodos propostos para encontrar uma solução deste problema, e a maioria deles envolve naturalmente método de projeção e suas variantes em relação aos conjuntos subjacentes. Alguns métodos de projeção bem conhecidos incluem o método de Von Neumann (ver [31] e [24]), de Douglas-Rachford (ver [12] e [2]) e de Dykstras (ver [13] e [3]). Contudo, o algoritmo de divisão Douglas-Rachford é um método clássico de otimização que possui um bom desempenho em problema de viabilidade convexa. A maioria dos algoritmos de projeção podem ser estendidos de várias

maneiras naturais para o problema de viabilidade convexa para N conjuntos sem modificação significativa. Uma exceção é o método de Douglas-Rachford, para qual, apenas a teoria dos problemas de viabilidade de dois conjuntos foi muito bem investigado. Entretanto para a aplicação envolvendo N conjuntos pode ser adaptado através de composições cíclicas [7].

Esse trabalho, tem como objetivo aplicar o método de iterações cíclicas de Douglas-Rachford para solucionar problemas de viabilidade convexa para N conjuntos. Além disso, apresentaremos uma reformulação para o problema de viabilidade convexa e a *Versão Média* de Douglas-Rachford. A dissertação está organizado da seguinte forma: Capítulo 1: Apresentaremos definições e resultados preliminares. Capítulo 2: Apresentamos e estudamos a convergência do algoritmo de Douglas-Rachford para a soma de dois operadores monótonos maximais. Capítulo 3: Introduzimos o método de iteração cíclica e *Versão Média* de Douglas-Rachford, e mostaremos a análise de convergência de ambos.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados de operadores monótonos maximais, indispensáveis para os nossos estudos [21].

Ao longo deste trabalho \mathcal{H} é um espaço real de Hilbert com norma $\|\cdot\|$ induzido pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

2.1 Operadores Monótonos

Apresentaremos definições e resultados sobre operadores em \mathcal{H} .

Definição 2.1. *Uma aplicação $T : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ é um operador ponto-conjunto que associa a cada $x \in \mathcal{H}$ a um conjunto (possivelmente vazio) $T(x)$ contido em \mathcal{H} .*

Quando $T(x)$ for apenas um ponto, ou seja, T um operador ponto-ponto, denotaremos $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e quando não houver confusão, será denotado $T(x) = Tx$.

Definição 2.2. *Considere um operador $T : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$. Defina-se:*

Domínio de T :

- $D(T) = \{x \in \mathcal{H} \mid T(x) \neq \emptyset\}$

Gráfico de T :

- $G(T) = \{(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid y \in T(x)\}$

Imagem de T :

- $\text{Im}T = \{y \in \mathcal{H} \mid y \in T(x) \text{ para algum } x \in \mathcal{H}\}$

Dizemos que T tem domínio completo se $D(T) = \mathcal{H}$.

Definição 2.3. *Sejam $T_1, T_2 : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ operadores quaisquer e c um número real. Definamos:*

$$T_1(x) + cT_2(x) = \{y + cz \mid y \in T_1(x), z \in T_2(x)\}.$$

Definição 2.4. *Um operador $T : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ é monótono se:*

$$\langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in T(x), y' \in T(x').$$

T é dito maximal se para todo T' monótono tal que $T(x) \subset T'(x), \forall x$, então $T = T'$.

Dois exemplos bem conhecidos de operadores maximamente monótonos são dados a seguir.

Exemplo 2.1. (i) *Seja $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa semicontínua inferiormente. O operador subdiferencial $\partial f : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ definido por*

$$\partial f(x) := \{y \in \mathcal{H} : f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle \quad \forall z \in \mathcal{H}\}$$

é um operador monótono maximal (Ver [5], [Teorema 20.40]).

(ii) *Seja C um subconjunto não vazio, fechado e convexo de \mathcal{H} . O cone normal para C , que é o operador $\mathcal{N}_C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por*

$$\mathcal{N}_C(\bar{x}) = \begin{cases} \emptyset, & \bar{x} \notin C, \\ \{d \in \mathcal{H} : \langle d, x - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C\}, & \bar{x} \in C, \end{cases} \quad (2.1)$$

é um operador monótono maximal (Ver [5], [Exemplo 20.41]).

Proposição 2.1. *Sejam $T_1, T_2 : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ operadores monótonos maximais. Suponha que $D(T_1) \cap \text{Int}(D(T_2)) \neq \emptyset$. Então $T_1 + T_2$ é monótono maximal.*

Demonstração. Ver [16] □

A notação $\text{Int}(C)$ representa o interior topológico de um conjunto C .

O seguinte Teorema, originalmente devido a Minty (ver [17], [18]), fornece uma caracterização crucial dos operadores monótonos maximais.

Teorema 2.1. *Um operador monótono T em \mathcal{H} é maximal se, e somente se a imagem do operador $I + \lambda T$ é todo o espaço de Hilbert, ou seja, $\text{Im}(I + \lambda T) = \mathcal{H}$, para cada $\lambda \geq 0$.*

Para provas alternativas do Teorema 2.1, ou Teoremas relacionados mais fortes, consulte as referências [20, 22, 27, 32].

Dado A um operador e $\lambda > 0$, $J_A^\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ é chamado de resolvente de A . A seguir apresentaremos duas definições restritas a um subconjunto $K \subset \mathcal{H}$ não vazio.

Definição 2.5. *Seja K um subconjunto não vazio de \mathcal{H} . Um operador $T : K \rightrightarrows \mathcal{H}$ é dito não expansivo se, $\forall x, y \in K$:*

$$\|y' - y\| \leq \|x' - x\| \quad \forall y \in Tx, \forall y' \in Tx'.$$

Note que operadores não expansivos são necessariamente valor único, ou seja, ponto-ponto.

Definição 2.6. *Seja $K \subset \mathcal{H}$ um subconjunto não vazio de \mathcal{H} . Um operador $T : K \rightarrow \mathcal{H}$ é dito ser firmemente não expansivo se, $\forall x, y \in K$*

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|(x - y) - (Tx - Ty)\|^2.$$

(Note que firmemente não expansivo \Rightarrow não expansivo).

Observe que se T é um operador firmemente não expansivo, então

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|^2 &\leq \|x - y\|^2 - \|(x - y) - (Tx - Ty)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - \langle (x - y) - (Tx - Ty), (x - y) - (Tx - Ty) \rangle \\ &= \|x - y\|^2 - \|x - y\|^2 - \|Tx - Ty\|^2 + 2\langle x - y, Tx - Ty \rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq 2\langle x - y, Tx - Ty \rangle.$$

Portanto, T é firmemente não expansivo se $\forall x, y \in K$

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \|Tx - Ty\|^2.$$

Teorema 2.2. *Seja λ um escalar positivo. Um operador T em \mathcal{H} é monótono se, e somente se, J_T^λ é firmemente não expansivo. Além disso, T é monótono maximal se, e somente se, J_T^λ é firmemente não expansivo e $D(J_T^\lambda) = \mathcal{H}$.*

Demonstração. Usando as definições básicas de operadores temos que:

$$\mathbf{y} \in T\mathbf{x} \iff \mathbf{x} \in J_T^\lambda(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T \text{ é monótono} &\iff \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \mathbf{y}' - \mathbf{y} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in T(\mathbf{x}), \mathbf{y}' \in T(\mathbf{x}') \\ &\iff \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}' - \lambda\mathbf{y} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in T\mathbf{x}, \mathbf{y}' \in T\mathbf{x}' \\ &\iff \langle \mathbf{x}' - \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}' - \lambda\mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{y} \in T\mathbf{x}, \mathbf{y}' \in T\mathbf{x}' \\ &\iff \langle (\mathbf{x}' + \lambda\mathbf{y}') - (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}), \mathbf{x}' - \mathbf{x} \rangle \geq \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{y} \in T\mathbf{x}, \mathbf{y}' \in T\mathbf{x}' \\ &\iff (I + \lambda T)^{-1} = J_T^\lambda \text{ é firmemente não expansivo.} \end{aligned}$$

Claramente, T é maximal se, e somente se, λT for maximal. Então, pelo Teorema 2.1, T é maximal se, e somente se, $\text{Im}(I + \lambda T) = \mathcal{H}$. Isso é verdade se, e somente se, $(I + \lambda T)^{-1}$ tem domínio igual a \mathcal{H} , estabelecendo assim a segunda afirmação. \square

Definição 2.7. *Seja $\{\mathbf{x}^k\} \subset \mathcal{H}$, dizemos que*

1. *Uma sequência $\{\mathbf{x}^k\} \subset \mathcal{H}$ converge fortemente para $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ ($\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}$) se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}\| = 0$.*
2. *Uma sequência $\{\mathbf{x}^k\} \subset \mathcal{H}$ converge fracamente para $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ ($\mathbf{x}^k \rightharpoonup \mathbf{x}$) se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x}^k - \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{H}$.*

Definição 2.8. *As sequências $\{\mathbf{y}^k\}$ em \mathcal{H} é Fejér convergente a um conjunto não vazio $\mathbf{U} \subset \mathcal{H}$ se*

$$\|\mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{y}^k - \mathbf{u}\|, \forall k \geq 0, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}.$$

Decorrente das definições acima, disporemos o seguinte resultado.

Proposição 2.2. *Se $\{\mathbf{y}^k\}$ é Fejér convergente para $\mathbf{U} \neq \emptyset$, então $\{\mathbf{y}^k\}$ é limitada. Além disso, se todo ponto de acumulação fraca de $\{\mathbf{y}^k\}$ pertence a \mathbf{U} , então \mathbf{y}^k converge fracamente para um ponto de \mathbf{U} .*

Demonstração. Da definição de Fejér convergente segue que

$$\|\mathbf{y}_k\| - \|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{y}^k - \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{y}^{k-1} - \mathbf{u}\| \leq \dots \leq \|\mathbf{y}^0 - \mathbf{u}\|.$$

(2.2)

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{y}_k\| \leq \|\mathbf{y}^0 - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\|.$$

Portanto, $\{\mathbf{y}^k\}$ é limitada. Seja $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbf{U}$ pontos de acumulação fraco de $\{\mathbf{y}^k\}$. Então existem $\{\mathbf{y}^{m_j}\}, \{\mathbf{y}^{l_j}\} \subset \{\mathbf{y}^k\}$, tal que, $\mathbf{y}^{m_j} \rightharpoonup \mathbf{y}$ e $\mathbf{y}^{l_j} \rightharpoonup \mathbf{x}$. Daí, $\|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}\|$ e $\|\mathbf{y}^k - \mathbf{x}\|$ são sequências convergentes, pois são não crescentes e limitadas, decorrente da definição de Fejér convergente. Observe que,

$$2\langle \mathbf{y}^k, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{y}^k - \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{y}^k - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2.$$

Desse modo, $\langle \mathbf{y}^k, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$ converge também, digamos que $\langle \mathbf{y}^k, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \rightarrow \mathbf{l} \in \mathbb{R}$. Passando o limite ao longo de $\{\mathbf{y}^{m_j}\}$ e ao longo de $\{\mathbf{y}^{l_j}\}$ segue que $\mathbf{l} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle$. Então, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 0$, ou seja, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Logo, \mathbf{y}^k converge fracamente para um ponto de \mathbf{U} . \square

Definição 2.9. *Seja $T : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ um operador. Dizemos que T é fracamente fechado se $\mathbf{x}^n \in D(T)$ com $\mathbf{x}^n \rightharpoonup \mathbf{x} \in \mathcal{H}$, tal que exista $\mathbf{y}^n \in T(\mathbf{x}^n)$ com $\mathbf{y}^n \rightharpoonup \mathbf{y} \in \mathcal{H}$, então $\mathbf{x} \in D(T)$ e $\mathbf{y} \in T(\mathbf{x})$.*

Lema 2.1.1. *Seja $\{\mathbf{y}^k\}, \{\mathbf{x}^k\} \subset \mathcal{H}$ e T um operador monótono maximal tais que $\mathbf{y}^k \rightarrow \mathbf{y}$ e $\mathbf{x}^k \rightharpoonup \mathbf{x}$ com $\mathbf{y}^k \in T(\mathbf{x}^k)$, então $\mathbf{y} \in T(\mathbf{x})$.*

Demonstração. Ver [5], Proposição 20.38 \square

Definição 2.10. *Seja $T : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ um operador. Dizemos que $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ é ponto fixo de T , se $\mathbf{x} \in T(\mathbf{x})$.*

Denotemos o conjunto de pontos fixos de T por $\text{Fix}T = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in T(\mathbf{x})\}$ e $T^n \mathbf{x} = \underbrace{T(T(T \dots T(\mathbf{x})))}_{n\text{-fatores}}$.

Proposição 2.3. *Seja $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ não expansivo de \mathbf{K} para \mathbf{K} . Se $\text{Fix}T \neq \emptyset$ e $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{K}, T^{n+1}\mathbf{x} - T^n\mathbf{x} \rightarrow 0$, com $n \rightarrow \infty$, então $T^n\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{K}$, onde $\bar{\mathbf{x}} = T\bar{\mathbf{x}}$.*

Demonstração. Definamos a sequência $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^{n+1} = T\mathbf{x}^n$. Observe que $\mathbf{x}^n = T^n\mathbf{x}$. Além disso, sendo ξ um ponto fixo de T e do fato de T ser não expansivo segue que,

$$\|\mathbf{x}^{n+1} - \xi\| = \|T\mathbf{x}^n - T\xi\| \leq \|\mathbf{x}^n - \xi\|.$$

Portanto $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é Féjer convergente com relação ao conjunto dos pontos fixos de T . Seja \bar{x} um ponto de acumulação fraco de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $x^{n_k} \rightharpoonup \bar{x}$. Desse modo, segue que $x^{n_k} - Tx^{n_k} \rightarrow 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|x^{n_k} - T\bar{x}\|^2 &= \|x^{n_k} - \bar{x} + \bar{x} - T\bar{x}\|^2 \\ &= \|x^{n_k} - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - T\bar{x}\|^2 + 2\langle x^{n_k} - \bar{x}, \bar{x} - T\bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - T\bar{x}\|^2 &= \|x^{n_k} - T\bar{x}\|^2 - \|x^{n_k} - \bar{x}\|^2 - 2\langle x^{n_k} - \bar{x}, \bar{x} - T\bar{x} \rangle \\ &= \|x^{n_k} - Tx^{n_k} + Tx^{n_k} - T\bar{x}\|^2 - \|x^{n_k} - \bar{x}\|^2 - 2\langle x^{n_k} - \bar{x}, \bar{x} - T\bar{x} \rangle \\ &= \|x^{n_k} - Tx^{n_k}\|^2 + \|Tx^{n_k} - T\bar{x}\|^2 + 2\langle x^{n_k} - Tx^{n_k}, Tx^{n_k} - T\bar{x} \rangle \\ &\quad - \|x^{n_k} - \bar{x}\|^2 - 2\langle x^{n_k} - \bar{x}, \bar{x} - T\bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

Como $\|x^{n_k} - \bar{x}\| \geq \|Tx^{n_k} - T\bar{x}\|$, temos

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - T\bar{x}\|^2 &\leq \|x^{n_k} - Tx^{n_k}\|^2 + \|x^{n_k} - \bar{x}\|^2 + 2\langle x^{n_k} - Tx^{n_k}, Tx^{n_k} - T\bar{x} \rangle \\ &\quad - \|x^{n_k} - \bar{x}\|^2 - 2\langle x^{n_k} - \bar{x}, \bar{x} - T\bar{x} \rangle \\ &= \|x^{n_k} - Tx^{n_k}\|^2 + 2\langle x^{n_k} - Tx^{n_k}, Tx^{n_k} - T\bar{x} \rangle - 2\langle x^{n_k} - \bar{x}, \bar{x} - T\bar{x} \rangle \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois $x^{n_k} - \bar{x} \rightarrow 0$ e $x^{n_k} - Tx^{n_k} \rightarrow 0$. Logo $\bar{x} = T\bar{x}$, ou seja, \bar{x} é ponto fixo de T .

Portanto, como $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é Féjer convergente com relação aos pontos fixos de T e seus pontos de acumulação fraco pertence ao mesmo, segue que $x^n \rightharpoonup \bar{x}$.

□

Definição 2.11. *Seja $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Dizemos que T é assintoticamente regular se $T^n x - T^{n+1}x \rightarrow 0$, em norma, para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Uma condição suficiente para operadores firmemente não expansivo sejam assintoticamente regular é o seguinte.

Lema 2.1.2. *Seja $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ firmemente não expansivo com $\text{Fix}T \neq \emptyset$. Então T é assintoticamente regular.*

Demonstração. Sendo $\text{Fix}T \neq \emptyset$, então existe $z \in \mathcal{H}$ tal que $Tz = z$. Daí, construímos a sequência $x^0 = x \in \mathcal{H}$, $x^k = T^k x$. Como T é firmemente não expansivo segue que,

$$\|x^{k+1} - z\| = \|T^{k+1}x - z\| = \|T(T^k x) - Tz\| \leq \|T^k x - z\| = \|x^k - z\|.$$

Logo a sequência x^k é Fejér convergente com relação ao $\text{Fix}T$. Desse modo, $\|x^k - z\| \rightarrow c \in \mathbb{R}$, pois a sequência $\|x^k - z\|$ é monótona e limitada. Daí, usando o fato de T ser firmemente não expansivo,

$$\begin{aligned}\|T^{k+1}x - T^kx\|^2 &= \|Tx^k - x^k\|^2 \\ &= \|Tx^k - x^k + z - z\|^2 \\ &= \|Tx^k - x^k + z - Tz\|^2 \\ &= \|(T - I)x^k - (T - I)z\|^2 \\ &\leq \|x^k - z\|^2 - \|Tx^k - Tz\|^2 \\ &= \|x^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Logo $(T^{k+1}x - T^kx) \rightarrow 0$.

□

Capítulo 3

Algoritmo de decomposição para operadores monótonos maximais

As notações, resultados e as motivações deste capítulos foram retiradas de [21]. Sejam $A, B : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ operadores monótonos maximais, tal que $A + B$ seja monótono maximal. Considere o seguinte problema: Achar $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ tal que $0 \in (A + B)(\mathbf{u})$, ou seja,

$$\exists \mathbf{u} \in \mathcal{H}, \mathbf{a} \in A(\mathbf{u}), \mathbf{b} \in B(\mathbf{u}); \mathbf{a} + \mathbf{b} = 0. \quad (3.1)$$

Denotaremos o conjunto solução de (3.1) por \mathcal{S} . Esse problema inclui, casos especiais: programação convexa, desigualdade varicional e o problema de viabilidade convexa.

Em 1956, Douglas e Rachford [12] propuseram o seguinte algoritmo:

$$\mathbf{u}^{n+1} = (I + \lambda B)^{-1}[(I + \lambda A)^{-1}(I - \lambda B) + \lambda B]\mathbf{u}^n \quad (3.2)$$

para resolver o problema (3.1), no caso em que A e B são ponto-ponto. Em 1979, Lions e Mercier[21] propuseram um novo algoritmo da seguinte maneira:

Alg. de Lions e Mercier

Passo 1. Dado $\mathbf{u}^0 \in D(B)$, escolhemos $\mathbf{b}^0 \in B(\mathbf{u}^0)$ e definimos $\mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^0 + \lambda \mathbf{b}^0$ com $\lambda \geq 0$, de tal maneira que $\mathbf{u}^0 = J_B^\lambda \mathbf{v}^0$.

Passo 2. Definimos por recorrência a sequência \mathbf{v}^n para $n \geq 1$ satisfazendo a seguinte equação,

$$\mathbf{v}^{n+1} = J_A^\lambda (2J_B^\lambda - I)\mathbf{v}^n + (I - J_B^\lambda)\mathbf{v}^n. \quad (3.3)$$

Observe que pelo Teorema de Minty (ver Teorema 2.1) o Algoritmo (3.3) está bem definido, e se A ou B forem iguais a zero, são equivalentes ao algoritmo ponto proximal de Rockafellar [28]. Além disso, no caso de A e B serem ponto-ponto o Alg. de Lions e Mercier é equivalente Algoritmo de Douglas-Rachford (3.2). De fato, supondo que é $\mathbf{u}^n = J_B^\lambda \mathbf{v}^n$ para n , mostremos que é válido para $n + 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B})^{-1} [(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{B}) + \lambda \mathbf{B}] \mathbf{u}^n \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}^{n+1} &= J_B^\lambda [J_A^\lambda (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{B}) + \lambda \mathbf{B}] J_B^\lambda \mathbf{v}^n \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}^{n+1} &= J_B^\lambda [J_A^\lambda (2\mathbf{I} - (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B})) + (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B}) - \mathbf{I}] J_B^\lambda \mathbf{v}^n \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}^{n+1} &= J_B^\lambda [J_A^\lambda (2J_B^\lambda - (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B})) J_B^\lambda + (\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B}) J_B^\lambda - J_B^\lambda] \mathbf{v}^n \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}^{n+1} + \lambda \mathbf{B} \mathbf{u}^{n+1} &= J_A^\lambda (2J_B^\lambda - \mathbf{I}) \mathbf{v}^n + (\mathbf{I} - J_B^\lambda) \mathbf{v}^n = \mathbf{v}^{n+1} \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}^{n+1} &= J_B^\lambda \mathbf{v}^{n+1}. \end{aligned}$$

A seguir estudaremos o Alg. de Lions e Mercier pelo fato de ser mais geral, pela facilidade na análise de convêrgencia e pela sua aplicação em problemas de viabilidade convexa, o qual faremos no próximo capítulo.

Agora veremos a convergência para o Alg. Lions e Mercier.

Precisamos primeiro de alguns resultados.

Lema 3.0.1. *Sejam T_1 e T_2 dois operadores firmemente não expansivo de K para K , então $S = T_1(2T_2 - \mathbf{I}) + \mathbf{I} - T_2$ é firmemente não expansivo. Mais precisamente,*

$$\langle S\mathbf{x} - S\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geq \|S\mathbf{x} - S\mathbf{y}\|^2 + \langle T_2\mathbf{x} - T_2\mathbf{y}, (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{x} - (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{y} \rangle. \quad (3.4)$$

Demonstração. Veja que,

$$\begin{aligned} \|S\mathbf{x} - S\mathbf{y}\|^2 &= \langle T_1(2T_2 - \mathbf{I})\mathbf{x} + (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{x} - T_1(2T_2 - \mathbf{I})\mathbf{y} - (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{y}, \\ &\quad T_1(2T_2 - \mathbf{I})\mathbf{x} + (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{x} - T_1(2T_2 - \mathbf{I})\mathbf{y} - (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{y} \rangle \\ &= \|T_1(2T_2 - \mathbf{I})\mathbf{x} - T_1(2T_2 - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2 + \|(\mathbf{I} - T_2)\mathbf{x} - (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{y}\|^2 \\ &\quad + 2\langle T_1(2T_2 - \mathbf{I})\mathbf{x} - T_1(2T_2 - \mathbf{I})\mathbf{y}, (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{x} - (\mathbf{I} - T_2)\mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Como T_1 é firmemente não expansivo,

$$\begin{aligned}
 \|Sx - Sy\|^2 &\leq \langle T_1(2T_2 - I)x - T_1(2T_2 - I)y, (2T_2 - I)x - (2T_2 - I)y \rangle \\
 &\quad + \|(I - T_2)x - (I - T_2)y\|^2 \\
 &\quad + 2\langle T_1(2T_2 - I)x - T_1(2T_2 - I)y, (I - T_2)x - (I - T_2)y \rangle \\
 &= \langle T_1(2T_2 - I)x - T_1(2T_2 - I)y, x - y \rangle + \|(I - T_2)x - (I - T_2)y\|^2 \\
 &= \langle T_1(2T_2 - I)x - T_1(2T_2 - I)y, x - y \rangle \\
 &\quad + \langle (I - T_2)x - (I - T_2)y, x - T_2x - y + T_2y \rangle \\
 &= \langle T_1(2T_2 - I)x - T_1(2T_2 - I)y, x - y \rangle + \langle (I - T_2)x - (I - T_2)y, x - y \rangle \\
 &\quad + \langle (I - T_2)x - (I - T_2)y, T_2y - T_2x \rangle \\
 &= \langle (T_1(2T_2 - I)x + x - T_2x) - (T_1(2T_2 - I)y + y - T_2y), x - y \rangle \\
 &\quad - \langle (I - T_2)x - (I - T_2)y, T_2x - T_2y \rangle \\
 &= \langle Sx - Sy, x - y \rangle - \langle (I - T_2)x - (I - T_2)y, T_2x - T_2y \rangle.
 \end{aligned}$$

O que prova (3.4).

□

Aplicaremos o Lema 3.0.1 a

$$G(\lambda) = J_A^\lambda(2J_B^\lambda - I) + I - J_B^\lambda, \quad (3.5)$$

e notemos que o Algoritmo pode ser escrito

$$v^{n+1} = G(\lambda)v^n.$$

Usaremos a seguinte notação

$$v = u + \lambda b, \quad w = u + \lambda a,$$

onde u , a e b satisfazem (3.1). Observe que,

$$\begin{aligned}
 2u - v &= 2u - u - \lambda b \\
 &= u - \lambda b \\
 &= w - \lambda a - \lambda b \\
 &= w - \lambda(a + b) = w.
 \end{aligned}$$

Proposição 3.1. *O operador $G(\lambda)$ definido em (3.5) é firmemente não expansivo e satisfaz*

$$\langle G(\lambda)x - G(\lambda)y, x - y \rangle \geq \|G(\lambda)x - G(\lambda)y\|^2 + \langle (I - J_B^\lambda)x - (I - J_B^\lambda)y, J_B^\lambda x - J_B^\lambda y \rangle. \quad (3.6)$$

Então, assumindo $S \neq \emptyset$, temos

$$\begin{aligned} v^n &\rightarrow v^*, \text{ onde } v^* = G(\lambda)v^*, \\ u^n &\text{ é limitada e } u^{n+1} - u^n \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Demonstração. Pelo Teorema de Minty (Teorema 2.1) segue que J_A^λ e J_B^λ são firmemente não expansivos. Do Lema 3.0.1 segue (3.6). Seja $u = J_B^\lambda v$, onde $u \in S$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} G(\lambda)v &= J_A^\lambda (2J_B^\lambda - I)v + v - J_B^\lambda v \\ &= J_A^\lambda (2J_B^\lambda v - v) + v - u \\ &= J_A^\lambda (2u - v) + v - u \\ &= J_A^\lambda (w) + v - u \\ &= u + v - u = v \end{aligned}$$

Portanto $G(\lambda)$ possui ponto fixo. Como foi provado que $G(\lambda)$ é firmemente não expansivo, então pela Lema 2.1.2 segue que $v^{n+1} - v^n \rightarrow 0$, e pela Proposição 2.3 $v^n \rightarrow v^*$ onde v^* é ponto fixo de $G(\lambda)$.

Observe que do fato de J_B^λ ser firmemente não expansivo, temos que,

$$\begin{aligned} \|u^{n+1} - u^n\|^2 &= \|J_B^\lambda v^{n+1} - J_B^\lambda v^n\|^2 \\ &\leq \langle J_B^\lambda v^{n+1} - J_B^\lambda v^n, v^{n+1} - v^n \rangle \\ &\leq \|J_B^\lambda v^{n+1} - J_B^\lambda v^n\| \|v^{n+1} - v^n\| \\ &\leq \|v^{n+1} - v^n\|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Então, $u^{n+1} - u^n \rightarrow 0$.

Seja $u^* = J_B^\lambda v^*$, então

$$\begin{aligned} \|u^n - u^*\| &= \|J_B^\lambda v^n - J_B^\lambda v^*\| \\ &\leq \|v^n - v^*\|. \end{aligned}$$

Como toda sequência fracamente convergente é limitada segue que $\{u^n\}$ é limitada. \square

Teorema 3.1. *Sob a suposição que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, a sequência $\{v^n\}$ gerada pelo Alg. de Lions e Mercier, converge fracamente para $v^* \in \mathcal{H}$, com $n \rightarrow \infty$ tal que $u^* = J_B^\lambda v^* \in \mathcal{S}$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.1 segue que $v^n \rightharpoonup v^*$ tal que $v^* \in \text{Fix}G(\lambda)$. Definamos $u^* = J_B^\lambda v^*$. Daí,

$$\begin{aligned} v^* &= G(\lambda)v^* = J_A^\lambda(2J_B^\lambda v^* - v^*) + v^* - J_B^\lambda v^* \\ &= J_A^\lambda(2u^* - v^*) + v^* - u^*, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u^* = J_A^\lambda(2u^* - v^*).$$

Como $u^* = J_B^\lambda v^*$, escolhemos $t \in B(u^*)$ tal que $v^* = u^* + \lambda t$. Daí,

$$\begin{aligned} u^* &= J_A^\lambda(2u^* - u^* - \lambda t) \\ \Rightarrow u^* &= J_A^\lambda(u^* - \lambda t) \\ \Rightarrow u^* - \lambda t &\in u^* + \lambda A(u^*) \\ \Rightarrow -t &\in A(u^*). \end{aligned}$$

Portanto $0 \in (A + B)(u^*)$, ou seja, $u^* \in \mathcal{S}$. □

Do Teorema acima temos o seguinte resultado.

Corolário 3.1. *Assuma que J_B^λ é fracamente fechado, então sob a suposição que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, u^n converge fracamente para uma solução $u^* = J_B^\lambda v^* \in \mathcal{S}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1, $v^n \rightharpoonup v^*$ onde $u^* = J_B^\lambda v^* \in \mathcal{S}$. Como a sequência u^n é limitada, para toda subsequência $u^{n'}$ convergindo fracamente para $\bar{u} \in \mathcal{H}$, daí

$$\bar{u} = \lim_{n' \rightarrow \infty} u^{n'} = \lim_{n' \rightarrow \infty} J_B^\lambda v^{n'} = J_B^\lambda v^* = u^*.$$

Portanto, a sequência u^n converge para u^* □

Capítulo 4

Douglas-Rachford e o problema de Viabilidade Convexa

As notações, resultados e as motivações deste capítulos foram retiradas de [7]. Aqui, mostraremos a relação entre achar um zero da soma de operadores e o de resolver o problema de viabilidade convexa. Como vimos,

Problema 4.1. *Sejam T_1 e T_2 operadores em \mathcal{H} monótonos maximais, o problema de encontrar zero da soma de operadores monótonos maximais se resume em:*

$$\text{Encontrar } z \in \mathcal{H} \text{ tal que } 0 \in (T_1 + T_2)(z). \quad (4.1)$$

Por outro lado,

Problema 4.2. *Sejam C_1 e C_2 conjuntos convexos, fechados e não vazios, o problema da viabilidade convexa para dois conjuntos convexos se resume em:*

$$\text{Encontrar } c \in \mathcal{H} \text{ tal que: } c \in C_1 \cap C_2 \quad (4.2)$$

Vamos mostrar a equivalência entre os problemas (4.1) e (4.2) para casos específicos de T_1 e T_2 . Consideremos o cone normal dos conjuntos C_1 e C_2 , isto é, $T_i = \mathcal{N}_{C_i}$ para $i = 1, 2$. Pelo Exemplo 2.1 item (ii) T_i é monótono maximal. Daí basta mostrar que se

$$x \in C_i \iff T_i(x) \neq \emptyset \iff 0 \in T_i(x). \quad (4.3)$$

Então,

$$\bar{x} \text{ resolve (4.2)} \iff 0 \in (\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2)(\bar{x}). \quad (4.4)$$

De fato, se \bar{x} é solução de (4.2), então $\bar{x} \in \mathsf{C}_1 \cap \mathsf{C}_2 \implies \bar{x} \in \mathsf{C}_1, \bar{x} \in \mathsf{C}_2$, daí por (4.3) temos que $0 \in \mathsf{T}_1(\bar{x})$ e $0 \in \mathsf{T}_2(\bar{x})$, Notemos que $\bar{x} \in \mathsf{C}_1 \cap \mathsf{C}_2 = \mathsf{D}(\mathcal{N}_{\mathsf{C}_1}) \cap \mathsf{D}(\mathcal{N}_{\mathsf{C}_2}) = \mathsf{D}(\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2)$, que nos resulta:

$$0 \in (\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2)(\bar{x}).$$

Agora, a volta. Se \bar{x} é tal que $0 \in (\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2)(\bar{x})$, logo $\bar{x} \in \mathsf{D}(\mathsf{T}_1)$ e $\bar{x} \in \mathsf{D}(\mathsf{T}_2)$, daí $\mathsf{T}_1(\bar{x}) \neq \emptyset$ e $\mathsf{T}_2(\bar{x}) \neq \emptyset$ novamente por (4.3) temos que $\bar{x} \in \mathsf{C}_1$ e $\bar{x} \in \mathsf{C}_2$, logo \bar{x} é solução de (4.2). O que nos dá a equivalência entre o problema (4.1) e (4.2) como queríamos.

Consideremos o problema de viabilidade convexa de N conjuntos :

$$\text{Encontrar } x \in \bigcap_{i=1}^N \mathsf{C}_i \neq \emptyset \text{ onde } \mathsf{C}_i \subseteq \mathcal{H} \text{ são fechados e convexos.} \quad (4.5)$$

O problema de viabilidade convexa é fundamental em muitas áreas de aplicação, como recuperação de imagem, planejamento de tratamento por radioterapia, cristalografia, entre outras áreas.

Definição 4.1. *Dado um conjunto $\mathsf{C} \subseteq \mathcal{H}$ e um ponto $x \in \mathcal{H}$, a melhor aproximação para x de C é um ponto $p \in \mathsf{C}$ tal que,*

$$\|p - x\| = d(x, \mathsf{C}) = \inf_{s \in \mathsf{C}} \|x - s\|. \quad (4.6)$$

Se para cada $x \in \mathcal{H}$ existe um ponto p , então C é dito proximal. Além disso, se p é sempre único é dito de Chebyshev. No último caso, a projeção para C é o operador $\mathsf{P}_{\mathsf{C}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathsf{C}$ que associa cada x para o único ponto mais próximo e escrevemos $\mathsf{P}_{\mathsf{C}}(x) = p$. A reflexão sobre C é o operador $\mathsf{R}_{\mathsf{C}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido por $\mathsf{R}_{\mathsf{C}} := 2\mathsf{P}_{\mathsf{C}} - \mathsf{I}$.

Proposição 4.1. *Seja $\mathsf{C} \subseteq \mathcal{H}$ não vazio, fechado e convexo. Então:*

1. C é Chesbyshev
2. (Caracterização de projeção)

$$\mathsf{P}_{\mathsf{C}}(x) = p \iff p \in \mathsf{C} \text{ e } \langle x - p, c - p \rangle \leq 0, \forall c \in \mathsf{C}.$$

3. (Caracterização de reflexão)

$$\mathbf{R}_C(\mathbf{x}) = \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{r} + \mathbf{x}) \in C \text{ e } \langle \mathbf{x} - \mathbf{r}, \mathbf{c} - \mathbf{r} \rangle \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{r}\|^2, \forall \mathbf{c} \in C.$$

4. (Fórmula de translação) Para $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{y}+C}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} + \mathbf{P}_C(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

5. (Fórmula da dilatação) Para $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}_{\lambda C}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{P}_C\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)$.

6. Se C é um subespaço então \mathbf{P}_C é linear.

7. Se C é um subespaço afim então \mathbf{P}_C é afim.

Demonstração. 1. Devemos mostrar que para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ existe um único $\mathbf{p} \in C$, tal que

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{x}\| = \mathbf{d}(\mathbf{x}, C) = \inf_{\mathbf{y} \in C} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \mathbf{d}.$$

De fato, da definição de ínfimo podemos tomar uma sequência $(\mathbf{x}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{d} \leq \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\| \leq \mathbf{d} + \frac{1}{n}. \quad (4.7)$$

Pela lei do paralelograma segue que,

$$\begin{aligned} 2\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\|^2 &= \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x} + \mathbf{x}^n - \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x} - \mathbf{x}^n + \mathbf{x}\|^2 \\ &= \|(\mathbf{x}^m + \mathbf{x}^n) - 2\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\|^2. \end{aligned}$$

Como C é convexo segue que $\frac{\mathbf{x}^m + \mathbf{x}^n}{2} \in C$. Da igualdade acima temos,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\|^2 &= 2\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\|^2 - \|(\mathbf{x}^m + \mathbf{x}^n) - 2\mathbf{x}\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\|^2 - 4\left\|\left(\frac{\mathbf{x}^m + \mathbf{x}^n}{2}\right) - \mathbf{x}\right\|^2 \\ &\leq 2\left(\mathbf{d} + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(\mathbf{d} + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\mathbf{d}^2. \end{aligned}$$

Fazendo $n, m \rightarrow \infty$ segue que,

$$\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n\|^2 \leq 2\left(\mathbf{d} + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(\mathbf{d} + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\mathbf{d}^2 \rightarrow 2\mathbf{d}^2 + 2\mathbf{d}^2 - 4\mathbf{d}^2 = 0.$$

Logo \mathbf{x}^n é uma sequência de Cauchy. Como toda sequência de Cauchy em \mathcal{H} converge e do fato de C ser fechado segue que $\mathbf{x}^n \rightarrow \mathbf{p} \in C$. Daí por (4.7),

$$\mathbf{d} < \|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\| < \mathbf{d} + \frac{1}{n} \rightarrow \mathbf{d}.$$

Logo, $d(x, C) = \|x - p\|$.

Agora resta provar a unicidade. Seja $q \in C$, tal que $\|x - q\| = d$, daí

$$\begin{aligned} 4d^2 &= 2d^2 + 2d^2 = 2\|x - p\|^2 + 2\|x - q\|^2 \\ &= \|x - p + x - q\|^2 + \|p - q\|^2 \\ &= \|2x - (p + q)\|^2 + \|p - q\|^2 \\ &= 4\left\|x - \frac{p + q}{2}\right\|^2 + \|p - q\|^2. \end{aligned}$$

Do fato de C ser convexo temos,

$$\|p - q\|^2 = 4d^2 - 4\left\|x - \frac{p + q}{2}\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0.$$

Logo $p = q$.

2. (\Rightarrow) Seja $p = P_C(x)$, por 1, $p \in C$. Além disso, como C é convexo e $p \in C$ segue que para qualquer $c \in C$, $(1 - \alpha)p + \alpha c \in C$, onde $\alpha \in (0, 1)$. Do fato de $\|x - p\| \leq \|x - ((1 - \alpha)p + \alpha c)\|$ segue que,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \|x - p\|^2 - \|x - ((1 - \alpha)p + \alpha c)\|^2 \\ &= \|x - p\|^2 - \|x - p + p - ((1 - \alpha)p + \alpha c)\|^2 \\ &= \|x - p\|^2 - \|x - p\|^2 - \|p - ((1 - \alpha)p + \alpha c)\|^2 - 2\langle x - p, p - ((1 - \alpha)p + \alpha c) \rangle \\ &= -\alpha^2\|p - c\|^2 - 2\alpha\langle x - p, p - c \rangle. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por 2α e fazendo $\alpha \rightarrow 0$ temos,

$$-\langle x - p, p - c \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle x - p, c - p \rangle \leq 0, \forall c \in C.$$

(\Leftarrow) Suponhamos que $p \in C$ e $\langle x - p, c - p \rangle \leq 0 \forall c \in C$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle x - p, c - p \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\langle x - p, c - p \rangle + \langle x - p, c - p \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle x - p, c - x + x - p \rangle + \langle x - c + c - p, c - p \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\|x - p\|^2 + \langle x - p, c - x \rangle + \langle x - c, c - p \rangle + \|c - p\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x - p\|^2 + \langle x - p - c + p, c - x \rangle + \|c - p\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x - p\|^2 + \|c - p\|^2 - \|c - x\|^2) \\ &\geq \frac{1}{2}(\|x - p\|^2 - \|c - x\|^2) \end{aligned}$$

Logo $\|x - p\| \leq \|c - x\| \forall c \in C$. Então p é a projeção de x em C .

3. Se $R_C(x) = r$, então $2P_C(x) - x = r$, ou seja, $\frac{r+x}{2} = P_C(x) \in C$. Além disso, pelo item 2,

$$\begin{aligned} & \langle x - P_C(x), c - P_C(x) \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \left\langle x - \frac{r+x}{2}, c - \frac{r+x}{2} \right\rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \left\langle \frac{1}{2}(x-r), \frac{2c-r-x}{2} \right\rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4} \langle x-r, (2c-2r) + r-x \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{4} \|x-r\|^2 + \frac{1}{2} \langle x-r, c-r \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \langle x-r, c-r \rangle \leq \frac{1}{2} \|x-r\|^2 \end{aligned}$$

para todo $c \in C$.

4. Observe que para todo $r \in y + C$ temos que existe $c \in C$, tal que $r = y + c$. Assim,

$$\begin{aligned} \|y + P_C(x-y) - x\| &= \|P_C(x-y) - (x-y)\| \\ &\leq \|c - (x-y)\| \\ &= \|c + y - x\| = \|r - x\| \end{aligned}$$

para todo $r \in y + C$. Logo, $P_{y+C}x = y + P_C(x-y)$.

5. Observe que para todo $r \in \lambda C$ existe $c \in C$, tal que $r = \lambda c$. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \lambda P_C \left(\frac{x}{\lambda} \right) - x \right\| &\leq \left\| \lambda \left(c - \frac{x}{\lambda} \right) \right\| \\ &= \|\lambda c - x\| \\ &= \|r - x\| \end{aligned}$$

para todo $r \in \lambda C$. Logo, $P_{\lambda C}(x) = \lambda P_C \left(\frac{x}{\lambda} \right)$.

6. Devemos mostrar que $P_C(x + \lambda y) = P_C(x) + \lambda P_C(y)$. Denominamos $P_C(x) = p$ e $P_C(y) = q$. Assim pelo item 2 basta mostrar que $\langle (x+\lambda y) - (p+\lambda q), c - (p+\lambda q) \rangle \leq 0$

para todo $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) - (\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}), \mathbf{c} - (\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}) \rangle &= \langle (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{q}), \mathbf{c} - (\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, (\mathbf{c} - \lambda\mathbf{q}) - \mathbf{p} \rangle \\ &\quad + \left\langle \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{q}), \lambda \left(\frac{\mathbf{c} - \mathbf{p}}{\lambda} - \mathbf{q} \right) \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, (\mathbf{c} - \lambda\mathbf{q}) - \mathbf{p} \rangle + \lambda^2 \left\langle \mathbf{y} - \mathbf{q}, \frac{\mathbf{c} - \mathbf{p}}{\lambda} - \mathbf{q} \right\rangle \end{aligned}$$

Como \mathbf{C} é um subespaço segue que $\mathbf{c} - \lambda\mathbf{q} \in \mathbf{C}$ e $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{p}}{\lambda} \in \mathbf{C}$. Portanto, pelo item 2,

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, (\mathbf{c} - \lambda\mathbf{q}) - \mathbf{p} \rangle \leq 0$$

e

$$\left\langle \mathbf{y} - \mathbf{q}, \frac{\mathbf{c} - \mathbf{p}}{\lambda} - \mathbf{q} \right\rangle \leq 0.$$

Logo,

$$\langle (\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) - (\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}), \mathbf{c} - (\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}) \rangle \leq 0.$$

7. Como \mathbf{C} é um subespaço afim, então $\mathbf{C} = \mathbf{y} + \mathbf{F}$ onde $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ e $\mathbf{F} \subset \mathcal{H}$ é um subespaço. Daí, pelo item 4, $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{\mathbf{y} + \mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y}$. Pelo item 6, sabemos que $\mathbf{P}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ é linear, logo temos que $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}$ é afim.

□

4.1 Operador de Douglas-Rachford

Dados $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 \subset \mathcal{H}$ conjuntos convexos, fechados e não-vazios definimos o Operador Douglas-Rachford $\mathbf{T}_{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ por

$$\mathbf{T}_{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2} := \frac{\mathbf{I} + \mathbf{R}_{\mathbf{C}_2} \mathbf{R}_{\mathbf{C}_1}}{2}.$$

Pela definição de R_{C_1} e R_{C_2} temos que,

$$\begin{aligned}
 T_{C_1, C_2} &= \frac{I + R_{C_2} R_{C_1}}{2} \\
 &= \frac{I + (2P_{C_2} - I)(2P_{C_1} - I)}{2} \\
 &= \frac{I + 2P_{C_2}(2P_{C_1} - I) - (2P_{C_1} - I)}{2} \\
 &= \frac{I + 2P_{C_2}(2P_{C_1} - I) - 2P_{C_1} + I}{2} \\
 &= \frac{2P_{C_2}(2P_{C_1} - I) - 2P_{C_1} + 2I}{2} \\
 &= P_{C_2}(2P_{C_1} - I) - P_{C_1} + I.
 \end{aligned}$$

Note que T_{C_2, C_1} e T_{C_1, C_2} geralmente são distintos. Se C_1 é um conjunto afim temos que $T_{C_1, C_1} = I$. De fato, visto pela demonstração do item 7 da Proposição 4.1 temos que, $P_{C_1}x = P_F(x - y) + y$, onde $P_F(x - y)$ é linear, $y \in \mathcal{H}$ e F é um subespaço. Assim,

$$\begin{aligned}
 T_{C_1, C_1}x &= P_{C_1}(2P_{C_1}x - x) + x - P_{C_1}x \\
 &= P_F(2P_F(x - y) + 2y - x - y) + y + x - P_F(x - y) - y \\
 &= 2P_F(P_F(x - y)) + P_F(y - x) + x - P_F(x - y) \\
 &= 2P_F(x - y) - P_F(x - y) + x - P_F(x - y) \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $T_{C_1, C_1} = I$ onde C_1 é um subespaço afim.

Proposição 4.2. *Sejam $C_1, C_2 \subseteq \mathcal{H}$ fechados, convexos e não-vazios. Então, P_{C_1} é firmemente não expansivo, R_{C_1} é não expansivo e T_{C_1, C_2} é firmemente não expansivo.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que P_{C_1} é firmemente não expansivo. Como foi visto anteriormente, basta mostrar que

$$\langle x - y, P_{C_1}x - P_{C_1}y \rangle \geq \|P_{C_1}x - P_{C_1}y\|^2,$$

para quaisquer x e y . De fato, pelo item 2 da Proposição 4.1 ,

$$\langle x - P_{C_1}x, P_{C_1}y - P_{C_1}x \rangle \leq 0$$

e

$$\langle y - P_{C_1}y, P_{C_1}x - P_{C_1}y \rangle \leq 0.$$

Somando ambas desigualdades segue que,

$$\begin{aligned}
 0 &\geq \langle x - P_{C_1}x - y + P_{C_1}y, P_{C_1}y - P_{C_1}x \rangle \\
 &= \langle x - y + P_{C_1}y - P_{C_1}x, P_{C_1}y - P_{C_1}x \rangle \\
 &= \langle x - y, P_{C_1}y - P_{C_1}x \rangle + \|P_{C_1}y - P_{C_1}x\|^2.
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\langle y - x, P_{C_1}y - P_{C_1}x \rangle \geq \|P_{C_1}y - P_{C_1}x\|^2.$$

Agora iremos mostrar que R_A é não expansivo, mas antes observe que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 + \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 = \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2. \quad (4.8)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \|\alpha x + (1 - \alpha)y\|^2 + \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 &= \|\alpha(x - y) + y\|^2 + \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 \\
 &= \alpha^2\|x - y\|^2 + \|y\|^2 + 2\alpha\langle x - y, y \rangle \\
 &\quad + \alpha(1 - \alpha)\|x - y\|^2 \\
 &= \|y\|^2 + \alpha\langle x - y, 2y \rangle + \alpha\langle x - y, x - y \rangle \\
 &= \|y\|^2 + \alpha\langle x - y, x + y \rangle \\
 &= \|y\|^2 + \alpha\|x\|^2 - \alpha\|y\|^2 + \alpha\langle x, y \rangle - \alpha\langle y, x \rangle \\
 &= \alpha\|x\|^2 + (1 - \alpha)\|y\|^2.
 \end{aligned}$$

Desse modo, veja que,

$$\begin{aligned}
 \|R_{C_1}x - R_{C_1}y\|^2 &= \|2P_{C_1}x - x - 2P_{C_1}y + y\|^2 \\
 &= \|2(P_{C_1}x - P_{C_1}y) + (1 - 2)(x - y)\|^2.
 \end{aligned}$$

Assim, por (4.8) e fazendo $\alpha = 2$,

$$\begin{aligned}
 \|R_{C_1}x - R_{C_1}y\|^2 &= 2\|P_{C_1}x - P_{C_1}y\|^2 + 2\|(P_{C_1}x - x) - (P_{C_1}y - y)\|^2 - \|x - y\|^2 \\
 \Rightarrow \|R_{C_1}x - R_{C_1}y\|^2 - \|x - y\|^2 &= 2(\|P_{C_1}x - P_{C_1}y\|^2 + \|(P_{C_1} - I)x - (P_{C_1} - I)y\|^2 \\
 &\quad - \|x - y\|^2).
 \end{aligned}$$

Como P_{C_1} é firmemente não expansivo segue que,

$$\begin{aligned} & \|P_{C_1}x - P_{C_1}y\|^2 + \|(P_{C_1} - I)x - (P_{C_1} - I)y\|^2 \leq \|x - y\|^2 \\ \Rightarrow & \|P_{C_1}x - P_{C_1}y\|^2 + \|(P_{C_1} - I)x - (P_{C_1} - I)y\|^2 - \|x - y\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow & \|R_{C_1}x - R_{C_1}y\|^2 - \|x - y\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow & \|R_{C_1}x - R_{C_1}y\| \leq \|x - y\|. \end{aligned}$$

Logo R_{C_1} é não expansivo.

Por fim, vamos mostrar que T_{C_1, C_2} é firmemente não expansivo. Observe que,

$$\begin{aligned} 2T_{C_1, C_2} - I &= 2(P_{C_2}(2P_{C_1} - I) - P_{C_1} + I) - I \\ &= 2P_{C_2}(2P_{C_1} - I) - 2P_{C_1} + 2I - I \\ &= 2P_{C_2}(2P_{C_1} - I) - 2P_{C_1} + I \\ &= 2P_{C_2}(2P_{C_1} - I) - (2P_{C_1} - I) \\ &= (2P_{C_2} - I)(2P_{C_1} - I). \end{aligned}$$

Como $R_{C_1} = 2P_{C_1} - I$ e $R_{C_2} = 2P_{C_2} - I$ são não expansivos segue que $2T_{C_1, C_2} - I$ é não expansivo, então

$$\begin{aligned} & \|(2T_{C_1, C_2} - I)x - (2T_{C_1, C_2} - I)y\|^2 \leq \|x - y\|^2 \\ \Rightarrow & \|(2T_{C_1, C_2}x - 2T_{C_1, C_2}y) - (x - y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \\ \Rightarrow & \|2(T_{C_1, C_2}x - T_{C_1, C_2}y)\|^2 + \|x - y\|^2 - 4\langle T_{C_1, C_2}x - T_{C_1, C_2}y, x - y \rangle \leq \|x - y\|^2 \\ \Rightarrow & 4\langle T_{C_1, C_2}x - T_{C_1, C_2}y, x - y \rangle \geq 4\|T_{C_1, C_2}x - T_{C_1, C_2}y\|^2 \\ \Rightarrow & \langle T_{C_1, C_2}x - T_{C_1, C_2}y, x - y \rangle \geq \|T_{C_1, C_2}x - T_{C_1, C_2}y\|^2. \end{aligned}$$

Logo T_{C_1, C_2} é firmemente não expansivo. □

A classe de mapeamentos não expansivos é fechada sob combinações convexas, composições, etc. A classe de mapeamentos firmemente não expansivos é, contudo, não tão bem comportada. Por exemplo, até a composição de duas projeções em subespaço não precisa ser firmemente não expansivo. (Veja [4], exemplo 4.2.5).

Lema 4.1.1. *Seja $C \subset \mathcal{H}$ não vazio, fechado e convexo, então P_C é o operador resolvente de \mathcal{N}_C .*

Demonstração. Queremos mostrar que $J_{\mathcal{N}_C}^1 = P_C$. Seja $\bar{x} \in C$ tal que $\bar{x} = J_{\mathcal{N}_C}^1(x)$, daí $\bar{x} = (\mathcal{N}_C + I)^{-1}(x)$ ou ainda

$$x = \mathcal{N}_C(\bar{x}) + \bar{x} \implies \mathcal{N}_C(\bar{x}) = x - \bar{x}$$

Pela definição do operador cone normal (Exemplo 2.1) temos que:

$$\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0; \quad \forall y \in C$$

e pelo Proposição 4.1 item 2 temos que $\bar{x} = P_C(x)$ como queríamos. \square

Teorema 4.1. *Sejam $C_1, C_2 \subseteq \mathcal{H}$ fechados e convexos com interseção não vazia. Para todo $x_0 \in \mathcal{H}$, a sequência $T_{C_1, C_2}^n x_0$ converge fracamente para um ponto x , tal que $P_{C_1} x \in C_1 \cap C_2$.*

Demonstração. Como vimos no Capítulo 3 o Alg. de Lions e Mercier, converge para uma solução. Tomando $A = \mathcal{N}_{C_1}$ e $B = \mathcal{N}_{C_2}$ temos que A e B são monótonos maximais. \square

O Teorema 4.1 fornece um algoritmo iterativo para resolver problemas de viabilidade convexa de 2 conjuntos. Para aplicações envolvendo $N > 2$ conjuntos resolveremos de duas maneiras: A primeira é utilizando o método de iterações cíclicas de Douglas-Rachford, através de operadores firmemente não expansivos. A segunda forma é uma formulação equivalente de 2 conjuntos colocada no produto de espaço \mathcal{H}^N .

4.2 Composição de Operadores

Sejam T_i, T_j operadores denotaremos a composição por:

$$T_i \circ T_j := T_i T_j.$$

A composição de operadores firmemente não expansivos é sempre não expansiva. Contudo, operadores não expansivos não precisam ser assintoticamente regular. Por exemplo, a reflexão em relação a um ponto, claramente não é; nem a maioria das rotações. A seguir, uma condição suficiente para operadores assintoticamente regular.

Lema 4.2.1. *Seja $T_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ firmemente não expansivo, para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, e defina $T := T_r \dots T_2 T_1$. Se $\text{Fix} T \neq \emptyset$ então T é assintoticamente regular.*

Demonstração. Definamos a sequência $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ e $\mathbf{x}^{n+1} = T_r \dots T_1 \mathbf{x}^n$. Para mostrar que T é assintoticamente regular devemos mostrar que $\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n+1} \rightarrow 0$. De fato, seja $\mathbf{y} \in \text{Fix}T$, então $T\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{y}\|^2 &= \|T\mathbf{x}^n - T\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|T_r(T_{r-1} \dots T_1 \mathbf{x}^n) - T_r(T_{r-1} \dots T_1 \mathbf{y})\|^2 \\ &\leq \|T_{r-1} \dots T_1 \mathbf{x}^n - T_{r-1} \dots T_1 \mathbf{y}\|^2 - \|(I - T_r)(T_{r-1} \dots T_1) \mathbf{x}^n \\ &\quad - (I - T_r)(T_{r-1} \dots T_1) \mathbf{y}\|^2, \end{aligned}$$

pois T_r é firmemente não expansivo. Seguindo o raciocínio e usando que T_i é firmemente não expansivo para cada i segue que,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{y}\|^2 &\leq \|\mathbf{x}^n - \mathbf{y}\|^2 - \|(I - T_1)\mathbf{x}^n - (I - T_1)\mathbf{y}\|^2 - \|(I - T_2)T_1\mathbf{x}^n - (I - T_2)T_1\mathbf{y}\|^2 \\ &\quad - \dots - \|(I - T_{r-1})T_{r-2} \dots T_1 \mathbf{x}^n - (I - T_{r-1})T_{r-2} \dots T_1 \mathbf{y}\|^2 \\ &\quad - \|(I - T_r)T_{r-1} \dots T_1 \mathbf{x}^n - (I - T_r)T_{r-1} \dots T_1 \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, \mathbf{x}^n é Féjer convergente com relação ao $\text{Fix}T$, o que implica que $\|\mathbf{x}^n - \mathbf{y}\|$ é convergente. Da mesma desigualdade concluímos que,

$$\begin{aligned} (I - T_1)\mathbf{x}^n - (I - T_1)\mathbf{y} &\rightarrow 0 \\ (I - T_2)T_1\mathbf{x}^n - (I - T_2)T_1\mathbf{y} &\rightarrow 0 \\ &\vdots \\ (I - T_{r-1})T_{r-2} \dots T_1 \mathbf{x}^n - (I - T_{r-1})T_{r-2} \dots T_1 \mathbf{y} &\rightarrow 0 \\ (I - T_r)T_{r-1} \dots T_1 \mathbf{x}^n - (I - T_r)T_{r-1} \dots T_1 \mathbf{y} &\rightarrow 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Assim, somando as equações de (4.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^n - \mathbf{y} - T\mathbf{x}^n + T\mathbf{y} &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \mathbf{x}^n - T\mathbf{x}^n &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n+1} \rightarrow 0$. □

O Lema a seguir caracteriza pontos fixos de certas composições de operadores firmemente não expansivo.

Lema 4.2.2. *Seja $T_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, firmemente não expansivo, para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, e defina $T := T_r \dots T_2 T_1$. Se $\bigcap_{i=1}^r \text{Fix}T_i \neq \emptyset$ então $\text{Fix}T = \bigcap_{i=1}^r \text{Fix}T_i$.*

Demonstração. Mostaremos por indução.

(i) Para $r = 2$.

Seja $x \in \text{Fix}T_1 \cap \text{Fix}T_2$, então $T_1T_2x = T_1x = x$, portanto $x \in \text{Fix}T$, ou seja, $\text{Fix}T_1 \cap \text{Fix}T_2 \subset \text{Fix}T$. Agora seja $x \in \text{Fix}T$ e $y \in \text{Fix}T_1 \cap \text{Fix}T_2$, consideremos 3 casos

(a) Se $T_2x \in \text{Fix}T_1$, então $T_2x = T_1T_2x = x$. Dessa forma, $x \in \text{Fix}T_1 \cap \text{Fix}T_2$.

(b) Se $x \in \text{Fix}T_2$, então $T_1x = T_1T_2x = x$. Assim, $x \in \text{Fix}T_1 \cap \text{Fix}T_2$.

(c) Se $T_2x \notin \text{Fix}T_1$ e $x \notin \text{Fix}T_2$. Como T_1 e T_2 são firmemente não expansivo,

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|T_1T_2x - T_1T_2y\|^2 \\ &\leq \|T_2x - T_2y\|^2 - \|(I - T_1)T_2x - (I - T_1)T_2y\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - \|(I - T_2)x - (I - T_2)y\|^2 - \|(I - T_1)T_2x - (I - T_1)T_2y\|^2 \end{aligned}$$

Como $x \notin \text{Fix}T_2$,

$$\begin{aligned} \|(I - T_2)x - (I - T_2)y\| &= \|x - T_2x - (y - T_2y)\| \\ &= \|x - T_2x - (y - y)\| \\ &= \|x - T_2x\| \neq 0. \end{aligned}$$

Então,

$$\|x - y\|^2 < \|x - y\|^2$$

o que é um absurdo. Logo o terceiro caso não pode acontecer. Assim,

$$\text{Fix}T_1 \cap \text{Fix}T_2 = \text{Fix}T.$$

(ii) Suponhamos que $r \geq 2$ e que seja válido para $r = n$, então para $r = n + 1$ é válido.

De fato, seja $R_1 = T_n \dots T_1$ e $R_2 = T_{n+1}$. Pelo item i temos que,

$$\begin{aligned} \text{Fix}T_{n+1} \dots T_1 &= \text{Fix}R_2R_1 \\ &= \text{Fix}R_2 \cap \text{Fix}R_1 \\ &= \text{Fix}T_{n+1} \cap \text{Fix}T_n \dots T_1. \end{aligned}$$

Assim, por hipótese de indução

$$\text{Fix}T_{n+1} \dots T_1 = \bigcap_{i=1}^{n+1} \text{Fix}T_i.$$

$$\text{Logo } \text{Fix}T = \bigcap_{i=1}^r \text{Fix}T_i. \quad \square$$

Veja o seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Seja $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ linear, não expansivo e assintoticamente regular. Então, para todo $x^0 \in \mathcal{H}$,*

$$T^n x^0 \rightarrow P_{\text{Fix}T} x^0$$

Demonstração. Definamos a sequência x^0 e $x^{n+1} = Tx^n$. Por hipótese T é linear, então

$$T0 = T(x - x) = Tx - Tx = 0,$$

ou seja, $0 \in \text{Fix}T$. Além disso, pelo fato de T ser não expansivo,

$$\begin{aligned} \|x^{n+1}\| &= \|x^{n+1} - 0\| = \|Tx^n - T0\| \\ &\leq \|x^n - 0\| = \|x^n\|. \end{aligned}$$

Dessa forma, existe $l \geq 0$, tal que $\|x^n\| \rightarrow l$. Agora seja $m \in \mathbb{N}$, então para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|x^{n+1+m} + x^{n+1}\| = \|Tx^{n+m} - T(-x^n)\| \leq \|x^{n+m} + x^n\|. \quad (4.10)$$

Pela lei do paralelograma,

$$\begin{aligned} \|x^{n+m} + x^n\|^2 + \|x^{n+m} - x^n\|^2 &= 2(\|x^{n+m}\|^2 + \|x^n\|^2) \\ \Rightarrow \|x^{n+m} + x^n\|^2 &= 2(\|x^{n+m}\|^2 + \|x^n\|^2) - \|x^{n+m} - x^n\|^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \|x^{n+m} - x^n\| &= \|x^{n+m} - x^{n+m-1} + x^{n+m-1} - x^{n+m-2} + \dots + x^{n+1} - x^n\| \\ &\leq \|x^{n+m} - x^{n+m-1}\| + \|x^{n+m-1} - x^{n+m-2}\| + \dots + \|x^{n+1} - x^n\|. \end{aligned}$$

Como T é assintoticamente regular, implica que $\|x^{n+m} - x^n\| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Entretanto, por (4.10), (4.11) e usando o fato que $\|x^n\| \rightarrow l$, segue que $\|x^{n+m} + x^n\| \rightarrow 2l$ para suficientemente grande. De (4.11)

$$\|x^{n+m} - x^n\|^2 = 2(\|x^{n+m}\|^2 + \|x^n\|^2) - \|x^{n+m} + x^n\|^2 \rightarrow 2(l^2 + l^2) - 4l^2 = 0.$$

Portanto, $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e assim $x^n \rightarrow x \in \mathcal{H}$. Além disso, $x^{n+1} \rightarrow x$, então

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx^n = Tx,$$

ou seja, $x \in \text{Fix}T$. Resta mostrar que $x = P_{\text{Fix}T}x^0$, mas antes vamos mostrar que

$$p \in P_C x \Leftrightarrow [p \in C \text{ e } \forall y, z \in C \langle y - z, x - p \rangle = 0] \quad (4.12)$$

onde C é um subespaço afim e fechado. De fato, seja $y, z \in C$. Como C é um subespaço, $2P_C x - y \in C$ e pela Proposição 4.1 item 2

$$\langle y - P_C x, x - P_C x \rangle \leq 0.$$

Pelo o mesmo argumento,

$$\begin{aligned} -\langle y - P_C x, x - P_C x \rangle &= \langle -y + P_C x, x - P_C x \rangle \\ &= \langle (2P_C x - y) - P_C x, x - P_C x \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

, ou seja, $\langle y - P_C x, x - P_C x \rangle \geq 0$. Logo, $\langle y - P_C x, x - P_C x \rangle = 0$. Da mesma forma para z obtemos $\langle z - P_C x, x - P_C x \rangle = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle y - P_C x, x - P_C x \rangle - \langle z - P_C x, x - P_C x \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle y - z, x - P_C x \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Para finalizar iremos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\text{Fix}T}x^n = P_{\text{Fix}T}x^0$. De fato, denominaremos de $V = \text{Fix}T$. Fixemos $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 1$ e $y_\alpha = \alpha P_V x^0 + (1 - \alpha)P_V x^n$. Como T é linear segue $y_\alpha \in V$. Da definição de y_α segue que

$$\alpha(P_V x^0 - P_V x^n) = y_\alpha - P_V x^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha^2 \|P_V x^n - P_V x^0\|^2 &= \|P_V x^n - y_\alpha\|^2 \\ &\leq \|x^n - P_V x^n\|^2 + \|P_V x^n - y_\alpha\|^2 \\ &= \|x^n - P_V x^n\|^2 + \|P_V x^n - y_\alpha\|^2 + 2\langle x^n - P_V x^n, P_V x^n - y_\alpha \rangle, \end{aligned}$$

pois $\langle x^n - P_V x^n, P_V x^n - y_\alpha \rangle = 0$, devido a (4.12). Desse modo,

$$\begin{aligned} \alpha^2 \|P_V x^n - P_V x^0\|^2 &\leq \|x^n - P_V x^n + P_V x^n - y_\alpha\|^2 \\ &= \|x^n - y_\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Observe que, para todo $y \in V$ segue que $\|x^{n+1} - y\| \leq \|x^n - y\|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha^2 \|P_V x^n - P_V x^0\|^2 &\leq \|x^0 - y_\alpha\|^2 \\ &= \|x^0 - P_V x^0 + P_V x^0 - y_\alpha\|^2 \\ &= \|x^0 - P_V x^0\|^2 + \|P_V x^0 - y_\alpha\|^2 \end{aligned}$$

pois, $\langle x^0 - P_V x^0, P_V x^0 - y_\alpha \rangle = 0$, por (4.12). Novamente pela definição de y_α , concluímos que

$$\begin{aligned} y_\alpha - P_V x^0 &= \alpha P_V x^0 + (1 - \alpha) P_V x^n - P_V x^0 \\ &= (1 - \alpha)(P_V x^n - P_V x^0). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \alpha^2 \|P_V x^n - P_V x^0\|^2 &\leq \|x^0 - P_V x^0\|^2 + (1 - \alpha)^2 \|P_V x^n - P_V x^0\|^2 \\ \Rightarrow (\alpha^2 - (1 - \alpha)^2) \|P_V x^n - P_V x^0\|^2 &\leq \|x^0 - P_V x^0\|^2 \\ \Rightarrow (2\alpha - 1) \|P_V x^n - P_V x^0\|^2 &\leq \|x^0 - P_V x^0\|^2 \\ \Rightarrow \|P_V x^n - P_V x^0\|^2 &\leq \frac{1}{2\alpha - 1} \|x^0 - P_V x^0\|^2. \end{aligned}$$

Fazendo $\alpha \rightarrow \infty$, segue que $P_V x^n = P_V x^0$. Logo,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} P_V x^n = P_V x^0$$

o que conclui a prova. \square

Corolário 4.1. *Seja $T_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ firmemente não expansivo, para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, com $\bigcap_{i=1}^r \text{Fix} T_i \neq \emptyset$ e defina $T := T_r \dots T_1$. Então, para todo $x^0 \in \mathcal{H}$, $T^n x^0$ converge*

fracamente para um elemento de $\text{Fix} T = \bigcap_{i=1}^r \text{Fix} T_i$. Além disso, se T é linear, então $T^n x^0$ converge, fortemente, para $P_{\text{Fix} T} x^0$.

Demonstração. Como T é uma composição de operadores não expansivo, segue que T é não expansivo. Pelo Lema 4.2.2 temos que $\text{Fix} T = \bigcap_{i=1}^r \text{Fix} T_i \neq \emptyset$. Daí, pelo Lema 4.2.1 T é assintoticamente regular. Dessa forma pela Proposição 2.3, para todo $x^0 \in \mathcal{H}$, $T^n x^0$ converge fracamente para um elemento de $\text{Fix} T$. Além disso, se T for linear, pelo Teorema 4.2 $T^n x^0$ converge fortemente para $P_{\text{Fix} T} x^0$. \square

Notemos que a verificação de muitos resultados desta seção podem ser simplificado para o casos especiais que exigimos.

4.3 Iterações Cíclicas de Douglas-Rachford.

Agora estamos prontos para apresentar nosso primeiro algoritmo de projeção, o método cíclico de iteração de Douglas-Rachford. Seja $C_1, C_2, \dots, C_N \subseteq \mathcal{H}$ e defina $T_{[C_1 C_2 \dots C_N]} :$

$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ por,

$$\begin{aligned} T_{[C_1 C_2 \dots C_N]} &:= T_{C_N, C_1} T_{C_{N-1}, C_N} \dots T_{C_2, C_3} T_{C_1, C_2} \\ &= \left(\frac{I + R_{C_1} R_{C_N}}{2} \right) \left(\frac{I + R_{C_N} R_{C_{N-1}}}{2} \right) \dots \left(\frac{I + R_{C_3} R_{C_2}}{2} \right) \left(\frac{I + R_{C_2} R_{C_1}}{2} \right). \end{aligned}$$

Dado $x_0 \in \mathcal{H}$, o método de iterações cíclicas de Douglas-Rachford definido repetidamente por:

$$x^{n+1} = T_{[C_1 C_2 \dots C_N]} x^n.$$

Observação 4.1. *No caso de dois conjuntos, o operador cíclico de Douglas-Rachford torna-se*

$$T_{[C_1 C_2]} = T_{C_2, C_1} T_{C_1, C_2} = \left(\frac{I + R_{C_1} R_{C_2}}{2} \right) \left(\frac{I + R_{C_2} R_{C_1}}{2} \right).$$

Isto é, não coincide com o clássico esquema de Douglas-Rachford.

Onde não há ambiguidades tomamos os índices módulo N e abreviamos T_{C_i, C_j} por $T_{i,j}$ e $T_{[C_1 C_2 \dots C_N]}$ por $T_{[1 2 \dots N]}$. Em particular, $T_{0,1} := T_{N,1}$, $T_{N,N+1} := T_{N,1}$, $C_0 := C_N$ e $C_{N+1} := C_1$.

Lembramos da seguinte caracterização de operadores de Douglas-Rachford.

Lema 4.3.1. *Sejam $C_1, C_2 \subseteq \mathcal{H}$ convexos e fechados com interseção não vazia. Então,*

$$P_{C_1} \text{Fix} T_{C_1, C_2} = C_1 \cap C_2.$$

Demonstração. Seja $x \in C_1 \cap C_2$ então

$$\begin{aligned} T_{C_1, C_2} x &= P_{C_2}(2P_{C_1} x - x) + x - P_{C_1} x \\ &= P_{C_2}(2x - x) + x - x \\ &= P_{C_2}(x) = x. \end{aligned}$$

Assim, $C_1 \cap C_2 \subset P_{C_1} \text{Fix} T_{C_1, C_2}$. Por outro lado, seja $y \in P_{C_1} \text{Fix} T_{C_1, C_2}$, então existe $x \in \text{Fix} T_{C_1, C_2}$ tal que $y \in P_{C_1} x$. Observe que $y \in C_1$. Do fato de $x \in \text{Fix} T_{C_1, C_2}$ segue que,

$$\begin{aligned} x = T_{C_1, C_2} x &\Rightarrow x = P_{C_2}(2P_{C_1} x - x) + x - P_{C_1} x \\ &= P_{C_2}(2y - x) + x - y. \end{aligned}$$

Assim, $y = P_{C_2}(2y - x)$, ou seja, $y \in C_2$. Portando, $y \in C_1 \cap C_2$, implicando $P_{C_1} \text{Fix} T_{C_1, C_2} \subset C_1 \cap C_2$. Logo, $P_{C_1} \text{Fix} T_{C_1, C_2} = C_1 \cap C_2$. \square

Agora estamos prontos para apresentar nosso principal resultado em relação à convergência do método de iterações cíclicas de Douglas-Rachford.

Teorema 4.3. *Seja $C_1, C_2, \dots, C_N \subset \mathcal{H}$ conjuntos convexos e fechados com interseção não vazia. Para todo $x^0 \in \mathcal{H}$ a sequência $T_{[1\ 2 \dots N]}^n x^0$ converge fracamente para um ponto x tal que $P_{C_i} x = P_{C_j} x$, para todos os índices i, j . Além disso, $P_{C_j} x \in \bigcap_{i=1}^N C_i$, para cada índice j .*

Demonstração. Da Proposição 4.2, $T_{i,i+1}$ é firmemente não expansivo, para cada i . Veja que, se $x \in \bigcap_{i=1}^N C_i$, então

$$\begin{aligned} T_{i,i+1}x &= \frac{I + R_{C_{i+1}}R_{C_i}}{2}(x) \\ &= P_{C_{i+1}}(2P_{C_i} - I)x + x - P_{C_i}x \\ &= P_{C_{i+1}}(2P_{C_i}x - x) + x - x \\ &= P_{C_{i+1}}(2x - x) \\ &= P_{C_{i+1}}x = x \end{aligned}$$

, ou seja, $\bigcap_{i=1}^N \text{Fix}T_{i,i+1} \supseteq \bigcap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$. Daí, pelo Corolário 4.1 $T_{[1\ 2 \dots N]}^n x^0$ converge fracamente para um ponto $x \in \text{Fix}T_{[1\ 2 \dots N]} = \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}T_{i,i+1}$. Pelo Lema 4.3.1 $P_{C_i}x \in C_i \cap C_{i+1}$,

o que implica $P_{C_i}x \in C_{i+1}$, para cada i . Assim,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \|P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x\|^2 &= \langle x, 0 \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N (\|P_{C_i}x\|^2 - 2\langle P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x \rangle + \|P_{C_{i-1}}x\|^2) \\
 &= \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x) - \sum_{i=2}^N (P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x) \right\rangle \\
 &\quad + \frac{\|P_{C_1}x\|^2 - \|P_{C_N}x\|^2}{2} - \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x \rangle + \sum_{i=2}^N \|P_{C_i}x\|^2 \\
 &= \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x) \right\rangle + \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x) \right\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N (\|P_{C_{i-1}}x\|^2 - \|P_{C_i}x\|^2) - \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x \rangle \\
 &\quad + \sum_{i=2}^N \|P_{C_i}x\|^2 \\
 &= \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x) \right\rangle - \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x \rangle + \sum_{i=2}^N \|P_{C_i}x\|^2 \\
 &\quad + \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x) \right\rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \langle P_{C_{i-1}}x + P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x \rangle \\
 &= \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x) \right\rangle - \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x \rangle + \sum_{i=2}^N \|P_{C_i}x\|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \langle 2x - P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x, P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x \rangle \\
 &= \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x) \right\rangle - \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x \rangle + \sum_{i=2}^N \|P_{C_i}x\|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \langle x - P_{C_{i-1}}x, P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \langle x - P_{C_i}x, P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x \rangle.
 \end{aligned}$$

Observe que, pelo fato de $x \in \bigcap_{i=2}^N \text{Fix}T_{i-1,i}$,

$$\begin{aligned} x = T_{i-1,i}x &= \frac{I + R_{C_i}R_{C_{i-1}}}{2}(x) \\ &= \frac{x + (2P_{C_i} - I)(2P_{C_{i-1}} - I)x}{2} \\ &= \frac{x + 2P_{C_i}(2P_{C_{i-1}}x - x) - 2P_{C_{i-1}}x + x}{2}. \end{aligned}$$

Daí,

$$2x = 2x + 2P_{C_i}(2P_{C_{i-1}}x - x) - 2P_{C_{i-1}}x \Rightarrow P_{C_{i-1}}x = P_{C_i}(2P_{C_{i-1}}x - x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle x - P_{C_{i-1}}x, P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x \rangle &= \langle P_{C_{i-1}}x - (2P_{C_{i-1}}x - x), P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x \rangle \\ &= \langle P_{C_i}(2P_{C_{i-1}}x - x) - (2P_{C_{i-1}}x - x), P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x \rangle = 0 \end{aligned}$$

por (4.12) e utilizando o fato de $P_{C_{i-1}}x, P_{C_i}x \in C_i$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle x - P_{C_i}x, P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x \rangle &= \langle x - P_{C_i}x, P_{C_i}x + P_{C_{i-1}}x - 2P_{C_{i-1}}x \rangle \\ &= \langle x - P_{C_i}x, \frac{P_{C_i}x + P_{C_{i-1}}x}{2} - P_{C_{i-1}}x \rangle = 0. \end{aligned}$$

pelo mesmo argumento acima e usando o fato de C_i ser convexo. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N \|P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x\|^2 &= \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x) \right\rangle - \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x \rangle + \sum_{i=2}^N \|P_{C_i}x\|^2 \\ &= \left\langle x, \sum_{i=2}^N (P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x) \right\rangle - \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x \rangle \\ &\quad + \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_i}x \rangle \\ &= \sum_{i=2}^N \langle x, P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x \rangle + \sum_{i=2}^N \langle P_{C_i}x, P_{C_i}x - P_{C_{i-1}}x \rangle \\ &= \sum_{i=2}^N \langle x - P_{C_i}x, P_{C_{i-1}}x - P_{C_i}x \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

pela Proposição 4.1 item 2. Logo, $P_{C_i}x = P_{C_{i-1}}x$, para cada i , o que conclui a prova. \square

Novamente, pela Proposição 2.3, uma Versão mais geral do Teorema 4.3 pode ser extraída.

Teorema 4.4. *Seja $C_1, C_2, \dots, C_N \subset \mathcal{H}$ conjuntos convexos e fechados com interseção não vazia. Seja $T_j : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, para cada j , e defina $T := T_N \dots T_2 T_1$. Suponha as três seguintes propriedades.*

1. $T = T_N \dots T_2 T_1$, é não expansivo e assintoticamente regular.
2. $\text{Fix}T = \bigcap_{j=1}^N \text{Fix}T_j \neq \emptyset$.
3. $P_{C_j} \text{Fix}T_j \subset C_{j+1}$, para cada j .

Então, para todo $x^0 \in \mathcal{H}$, a sequência $T^n x^0$ converge fracamente para um ponto x , tal que $P_{C_i} x = P_{C_j} x$ para cada i, j . Além disso, $P_{C_j} x \in \bigcap_{i=1}^N C_i$, para cada j .

Demonstração. Como por hipótese T é não expansivo, assintoticamente regular e $\text{Fix}T \neq \emptyset$ segue da Proposição 2.3 que $T^n x^0$ converge fracamente para um ponto $x \in \text{Fix}T$. O restante da prova é o mesmo do Teorema 4.3. \square

Agora investigamos a iteração cíclica de Douglas-Rachford na seção especial, mas o caso em que o ponto inicial está em um dos conjuntos alvos, mas especialmente o primeiro conjunto de destino.

Corolário 4.2. *Seja $C_1, C_2, \dots, C_N \subset \mathcal{H}$ conjuntos convexos e fechados com interseção não vazia. Se $y \in C_i$ então $T_{i,i+1}y = P_{C_{i+1}}y$. Em particular, se $x^0 \in C_1$, a trajetória cíclica de Douglas-Rachford coincide com o método da projeção alternada de Von Neumann.*

Demonstração. Para todo $y \in \mathcal{H}$ segue que

$$\begin{aligned} T_{i,i+1}y = P_{C_{i+1}}y &\Leftrightarrow P_{C_{i+1}}y = \frac{y + R_{C_{i+1}}R_{C_i}y}{2} \\ &\Leftrightarrow 2P_{C_{i+1}}y - y = R_{C_{i+1}}R_{C_i}y \\ &\Leftrightarrow R_{C_{i+1}}y = R_{C_{i+1}}R_{C_i}y. \end{aligned}$$

Observe que se $y \in C_i$, então $R_{C_i}y = 2P_{C_i}y - y = 2y - y = y$. Logo $T_{i,i+1}y = P_{C_{i+1}}y$. Em particular, se $x^0 \in C_1$, então pelo o que mostramos acima,

$$T_{[1\ 2 \dots N]}x^0 = T_{N,1} \dots T_{2,3}T_{1,2}x^0 = P_{C_1}P_{C_N} \dots P_{C_2}x^0 \in C_1$$

e segue o resultado. \square

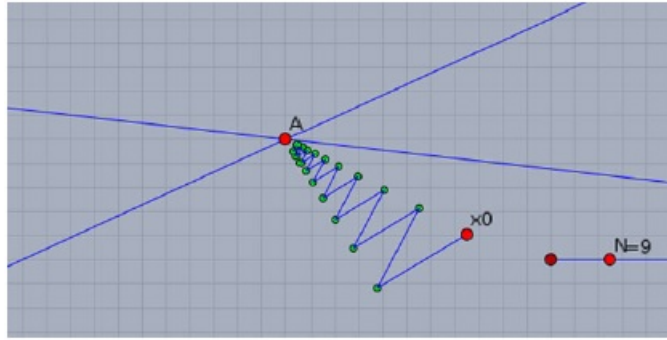


Figura 4.1: Figura retirada de [7] mostrando uma trajetória cíclica de Douglas-Rachford diferente do método da projeção alternada de von Neumann. Cada ponto verde representa uma iteração de 2 conjuntos de Douglas -Rachford.

Agora segue um exemplo envolvendo subespaços.

Exemplo 4.1. Se $x^0 \notin C_1$ então a nova trajetória cíclica de Douglas-Rachford não coincide com o método de projeção alternada de Von Neumann. Daremos um exemplo envolvendo dois subespaços fechados com codimensão 1 (veja Figura 4.1). Defina

$$C_1 = \{x \in \mathcal{H} : \langle a_1, x \rangle = 0\} \quad C_2 = \{x \in \mathcal{H} : \langle a_2, x \rangle = 0\}$$

onde $a_1, a_2 \in \mathcal{H}$ tal que $\langle a_1, a_2 \rangle \neq 0$. Escalando, se necessário, podemos assumir que $\|a_1\| = \|a_2\| = 1$. Então,

$$P_{C_1}x = x - \langle a_1, x \rangle a_1 \quad P_{C_2}x = x - \langle a_2, x \rangle a_2.$$

De fato, sendo $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \langle a_i, x - \langle a_i, x \rangle a_i \rangle &= \langle a_i, x \rangle - \langle a_i, \langle a_i, x \rangle a_i \rangle \\ &= \langle a_i, x \rangle - \|a_i\|^2 \langle a_i, x \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\langle a_i, x - \langle a_i, x \rangle a_i \rangle = 0$, ou seja, $x - \langle a_i, x \rangle a_i \in C_i$. Além disso, seja $y \in C_i$, então

$$\begin{aligned} \langle x - (x - \langle a_i, x \rangle a_i), y - (x - \langle a_i, x \rangle a_i) \rangle &= \langle \langle a_i, x \rangle a_i, y - x + \langle a_i, x \rangle a_i \rangle \\ &= \langle a_i, x \rangle (\langle a_i, y \rangle - \langle a_i, x \rangle + \langle a_i, x \rangle \|a_i\|^2). \end{aligned}$$

Desse modo, $\langle x - (x - \langle a_i, x \rangle a_i), y - (x - \langle a_i, x \rangle a_i) \rangle = 0$. Portanto, pela Proposição 4.1 item 2, $P_{C_i}x = x - \langle a_i, x \rangle a_i$, onde $i = 1, 2$.

Observe que,

$$\begin{aligned}
 T_{1,2}\mathbf{x} &= P_{C_2}(2P_{C_1}\mathbf{x} - \mathbf{x}) + \mathbf{x} - P_{C_1}\mathbf{x} \\
 &= 2P_{C_1}\mathbf{x} - \mathbf{x} - \langle \mathbf{a}_2, 2P_{C_1}\mathbf{x} - \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}_2 - P_{C_1}\mathbf{x} + \mathbf{x} \\
 &= P_{C_1}\mathbf{x} + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}_2 - 2\langle \mathbf{a}_2, P_{C_1}\mathbf{x} \rangle \mathbf{a}_2 \\
 &= \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{a}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_2 - 2\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} - \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{a}_2 \\
 &= \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{a}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_2 \\
 &= \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{a}_1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_2.
 \end{aligned}$$

De forma similar,

$$T_{2,1}\mathbf{x} = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{a}_1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}_2 \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{a}_1.$$

Sabendo que, $R_{F_1}^2 = I$, temos que

$$\begin{aligned}
 T_{[F_1, F_2]} &= T_{F_2, F_1} T_{F_1, F_2} \\
 &= \frac{1}{2}(T_{F_1, F_2} + R_{F_1} R_{F_2} T_{F_1, F_2}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(T_{F_1, F_2} + R_{F_1} \left(\frac{R_{F_2} + R_{F_2} R_{F_2} R_{F_1}}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(T_{F_1, F_2} + \frac{R_{F_1} R_{F_2} + R_{F_1} R_{F_2} R_{F_2} R_{F_1}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(T_{F_1, F_2} + \frac{R_{F_1} R_{F_2} + I}{2} \right) = \frac{1}{2}(T_{F_1, F_2} + T_{F_2, F_1}),
 \end{aligned}$$

onde F_1, F_2 são afins e fechados. Assim,

$$\begin{aligned}
 2\langle \mathbf{a}_1, T_{[1, 2]} \rangle &= \langle \mathbf{a}_1, T_{1,2} \rangle + \langle \mathbf{a}_1, T_{2,1} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \|\mathbf{a}_1\|^2 - \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle^2 \\
 &\quad + \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \|\mathbf{a}_1\|^2 - \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \|\mathbf{a}_1\|^2.
 \end{aligned}$$

Desse modo, $2\langle \mathbf{a}_1, T_{[1, 2]} \rangle = 2\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle^2$, ou seja, $\langle \mathbf{a}_1, T_{[1, 2]} \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle^2$. De forma similar, $\langle \mathbf{a}_2, T_{[1, 2]} \rangle = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle^2$. Portanto, se $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle \neq 0$, para cada $i = 1, 2$, então $\langle \mathbf{a}_i, T_{[1, 2]} \rangle \neq 0$, para cada i . Em particular se $\mathbf{x}_0 \notin C_1 \cup C_2$, então nenhuma das iterações cíclicas de Douglas-Rachford reside em C_1 ou C_2 .

4.4 Reformulação Produto

Agora veremos nova reformulação para o problema de viabilidade convexa, que pode ser colocado no produto de espaço. Consideremos a formulação produto de (4.5). Defina dois

subconjuntos de \mathcal{H}^N :

$$C := C_1 \times C_2 \times \dots \times C_N, \quad D := \{(x, x, \dots, x) \in \mathcal{H}^N : x \in \mathcal{C}\}, \quad (4.13)$$

que são fechados e convexos (de fato, D é um subespaço). Considere o problema de viabilidade convexa de 2 conjuntos

$$\text{Encontrar } x \in C \cap D \subseteq \mathcal{H}^N. \quad (4.14)$$

Então (4.5) é equivalente a (4.14) no sentido que

$$x \in \bigcap_{i=1}^N C_i \Leftrightarrow (x, x, \dots, x) \in C \cap D.$$

Além disso, as projeções e, portanto as reflexões, são facilmente calculadas

$$\begin{aligned} P_C x &= P_{C_1} x_1 \times P_{C_2} x_2 \times \dots \times P_{C_N} x_N, \\ P_D x &= \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \right) \times \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \right) \times \dots \times \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \right). \end{aligned}$$

Seja $x^0 \in D$ e defina $x^n := T_{[D \ C]} x^{n-1}$. Então, pelo Corolário 4.2

$$T_{[D \ C]} x^n = P_D P_C x^n = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{C_i}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{C_i}, \dots, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{C_i} \right).$$

Isto é, se começarmos em D , como é razoável, o método cíclico de Douglas-Rachford coincide com a de projeções médias.

No geral,

$$\begin{aligned} T_{[D \ C]} x &= T_{C,D} T_{D,C} x \\ &= (2P_D P_C - P_D + I - P_C) T_{D,C} x \\ &= 2P_D P_C T_{D,C} x - P_D T_{D,C} x + T_{D,C} x - P_C T_{D,C} x \\ &= 2P_D P_C T_{D,C} x - P_C T_{D,C} x - P_D (P_C R_D x + x - P_D x) + P_C R_D x + x - P_D x \\ &= x + 2P_D P_C T_{D,C} x - P_C T_{D,C} x - P_D P_C R_D x - P_D x + P_D x + P_C R_D x - P_D x \\ &= x - P_D x + 2P_D P_C T_{D,C} x - P_C T_{D,C} x + P_C R_D x - P_D P_C R_D x \end{aligned} \quad (4.15)$$

Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, então a i -ésima coordenada de (4.15) pode ser expressa como,

$$\begin{aligned} (T_{[D \ C]} x)_i &= x_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j + \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N P_{C_j} (T_{D,C} x)_j - P_{C_i} (T_{D,C} x)_i \\ &\quad + P_{C_i} \left(\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N x_j - x_i \right) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_{C_j} \left(\frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x_k - x_j \right), \end{aligned}$$

onde

$$(T_{D,C}x)_j = x_j - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k + P_{C_j} \left(\frac{2}{N} \sum_{k=1}^N x_k - x_j \right),$$

que é a fórmula consideravelmente mais complexa.

Teorema 4.5. (*Média de Douglas-Rachford*) *Seja $C_1, C_2, \dots, C_N \subset \mathcal{H}$ conjuntos fechados e convexos com interseção não vazia. Para todo $x^0 \in \mathcal{H}$ a sequência definida por*

$$x^{n+1} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{i,i+1} \right) x^n$$

converge fracamente para um ponto x tal que $P_{C_i}x = P_{C_j}x$ para cada índice i, j . Além disso, $P_{C_j}x \in \bigcap_{i=1}^N C_i$, para cada índice j .

Demonstração. Considere $C, D \subseteq \mathcal{H}^N$ como em (4.13) e defina $T := P_D(T_{1,2} \times T_{2,3} \times \dots \times T_{N-1,N})$. Pela Proposição 4.2, P_D é firmemente não expansivo. Novamente pela Proposição 4.2, $T_{i,i+1}$ é firmemente não expansivo em \mathcal{H} , para cada $i = 1, \dots, N$. Portanto, $(T_{1,2} \times T_{2,3} \times \dots \times T_{N-1,N})$ é firmemente não expansivo em \mathcal{H}^N . Além disso, seja $x^* \in C \cap D$ então $x^* = (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$, onde $\bar{x} \in C_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, N$. Então, como já foi visto anteriormente, $T_{i,i+1}\bar{x} = \bar{x}$. Assim, $x^* \in \text{Fix}(T_{1,2} \times T_{2,3} \times \dots \times T_{N-1,N}) \cap D$, ou seja, $\text{Fix}(T_{1,2} \times T_{2,3} \times \dots \times T_{N-1,N}) \cap D \supset C \cap D \neq \emptyset$. Defina a sequência $X^0 \in \mathcal{H}^N$ e $X^{n+1} = TX^n$. Daí, pelo Corolário 4.1, $X^n \rightarrow X \in \text{Fix}T = \text{Fix}(T_{1,2} \times T_{2,3} \times \dots \times T_{N-1,N}) \cap D$. Sabendo que $TX^n \in D$, para cada n , escrevemos $X^n = (x^n, x^n, \dots, x^n)$ com cada $x^n \in \mathcal{H}$. Então,

$$x^{n+1} = (TX^{n+1})_i = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_{i,i+1} \right) x^n,$$

independente do i . Similarmente, sendo $X \in \text{Fix}P_D = D$, escrevemos $X = (x, x, \dots, x) \in \mathcal{H}^N$ com cada $x \in \mathcal{H}$. Sendo $X \in \text{Fix}(T_{1,2} \times T_{2,3} \times \dots \times T_{N-1,N})$, então $x \in \text{Fix}T_{i,i+1}$, para cada i . Portanto, pelo Lema 4.3.1, $P_{C_i}x \in C_{i+1}$. O mesmo cálculo do Teorema 4.3 completa a prova. \square

Considerações Finais

Neste trabalho, inicialmente estudamos o algoritmo de Douglas-Rachford para resolver problemas de soma de operadores monótonos maximais, além disso foi estudado a boa definição do algoritmo e convergência fraca para a solução do mesmo. Em seguida, apresentamos a equivalência do problema de viabilidade convexa de dois conjuntos com o problema citado acima para o caso que os operadores sejam os Cone Normais com relação a cada conjunto. Também apresentamos o método de iteração cíclica de Douglas-Rachford provando em cada caso convergência fraca para um ponto cujas projeções em cada um dos conjuntos é solução do problema de viabilidade convexa e apresentamos um exemplo de fácil apresentação do método citado. Por fim, apresentamos uma nova reformulação para o problema de viabilidade convexa, que pode ser colocado no produto de espaço e apresentamos a *Versão Média* de Douglas-Rachford, provando a convergência fraca para um ponto cujas projeções em cada um dos conjuntos é solução do problema de viabilidade convexa.

Referências Bibliográficas

- [1] Aragón Artacho, F., Borwein, J.: Global convergence of a non-convex Douglas–Rachford iteration. *J. Glob. Optim.* (2012). doi:10.1007/s10898-012-9958-4.
- [2] Bauschke, H., Combettes, P., Luke, D.: Finding best approximation pairs relative to two closed convex sets in Hilbert spaces. *J. Approx. Theory* 127(2), 178–192 (2004).
- [3] Bauschke, H., Borwein, J.: Dykstra’s alternating projection algorithm for two sets. *J. Approx. Theory* 79(3), 418–443 (1994).
- [4] Bauschke, H., Borwein, J., Lewis, A.: The method of cyclic projections for closed convex sets in Hilbert space. *Contemp. Math.* 204, 1–38 (1997).
- [5] Bauschke, H., Combettes, P.: *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Canadian Mathematical Society Societe Mathematique Du Canada. Springer, New York (2011).
- [6] Bauschke, H., Combettes, P., Luke, D.: Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants: a view from convex optimization. *J. Opt. Soc. Am. A* 19(7), 1334–1345 (2002).
- [7] Borwein, J.M., Tam, M.K. A Cyclic Douglas–Rachford Iteration Scheme. *J Optim Theory Appl* 160, 1–29 (2014).
- [8] Borwein, J., Sims, B.: The Douglas–Rachford algorithm in the absence of convexity. In: *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, pp. 93–109 (2011).
- [9] Bruck, R., Reich, S.: Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach space. *Houst. J. Math.* 4 (1977).

-
- [10] D. H. PEACEMAN AND H. H. RACHFORD, The numerical solution of parabolic elliptic differential equations, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 3 (1955), pp. 28–41.
- [11] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. An introduction to variational inequalities and their application. Academic press, New York, 1980.
- [12] Douglas, J., Rachford, H.: On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Am. Math. Soc.* 82(2), 421–439 (1956).
- [13] Dykstra, R.: An algorithm for restricted least squares regression. *J. Am. Stat. Assoc.* 78(384), 837–842 (1983)
- [14] Elser, V., Rankenburg, I., Thibault, P.: Searching with iterated maps. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 104(2), 418–423 (2007).
- [15] Escalante, R., Raydan, M.: Alternating Projection Methods. *Fundamentals of Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2011).
- [16] Figueiredo, D.G., Equações Elípticas não Lineares, 11^o Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C.N.Pq.. IMPA. 1977.
- [17] G.J. Minty, On the maximal domain of a 'monotone' function, *Michigan Mathematical Journal* 8 (1961) 135–137.
- [18] G.J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, *Duke Mathematics Journal* 29 (1962) 341–346.
- [19] Gravel, S., Elser, V.: Divide and concur: a general approach to constraint satisfaction. *Phys. Rev. E* 78(3), 036,706 (2008).
- [20] H. Brezis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert* (North-Holland, Amsterdam, 1973).
- [21] Lions, P., Mercier, B.: Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. *SIAM J. Numer. Anal.* 16(6), 964–979 (1979).
- [22] M.C. Joshi and R.K. Bose, *Some Topics in Nonlinear Functional Analysis* (Halssted/Wiley, New Delhi, 1985).

- [23] Opial, Z.: Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. *Bull. Am. Math. Soc.* 73(4), 591–597 (1967).
- [24] Pustyl'nik, E., Reich, S., Zaslavski, A.: Convergence of non-periodic infinite products of orthogonal projections and nonexpansive operators in Hilbert space. *J. Approx. Theory* 164(5), 611–624 (2012).
- [25] Reich, S., Shafrir, I.: The asymptotic behavior of firmly nonexpansive mappings. *Proc. Am. Math. Soc.* 101(2), 246–250 (1987),
- [26] R. S. VARGA, *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966 .
- [27] R.T, Rockafellar, On the maximal monotonicity of subdifferential mappings, *Pacific Journal of Mathematics* 33 (1970) 209–216.
- [28] R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM Journal on Control and Optimization* 14 (1976) 877-898
- [29] Schaad, J.: Modeling the 8-queens problem and sudoku using an algorithm based on projections onto nonconvex sets. Master's thesis, Univ. of British Columbia (2010).
- [30] Tam, M.: The method of alternating projections. <http://docserver.carma.newcastle.edu.au/id/eprint/1463>. Honours thesis, Univ. of Newcastle (2012).
- [31] von Neumann, J.: *Functional Operators, vol. II. The Geometry of Orthogonal Spaces* vol. 22. Princeton University Press, Princeton (1950).
- [32] V. Dolezal, *Monotone Operators and Applications in Control and Network Theory* (Elsevier, Amsterdam, 1979).