Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Controlabilidade Exata às Trajetórias para uma EDP Hiperbólica

Michell Dhouglas Lopes de Lima

Teresina - 2022

Michell Dhouglas Lopes de Lima

Dissertação de Mestrado:

Controlabilidade Exata às Trajetórias para uma EDP Hiperbólica

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus

Teresina - 2022

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Controlabilidade Exata às Trajetórias para uma EDP Hiperbólica

Michell Dhouglas Lopes de Lima

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 28 de Fevereiro de 2022.

Banca Examinadora:

Isaías Pereira de Jesus

Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus (UFPI) - Presidente

José Francisco Alves de Oliveira

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira (UFPI)

Franciane de Brito Vieira

Profa. Dra. Franciane de Brito Vieira (UFPI)

Luciano Cipriano da Silva

Prof. Dr. Luciano Cipriano da Silva (IFRN)

Ficha catalográfica editada pela biblioteca setorial do CCN.
Michell Dhouglas Lopes de Lima

Lima, Michell Dhouglas Lopes.

Controlabilidade Exata às Trajetórias para uma EDP Hiperbólica

Michell Dhouglas Lopes de Lima.

- Teresina, 2022.

Dissertação(Mestrado)- Universidade Federal do Piauí,

Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação

em Matemática, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus.

1. Análise Matemática. 2. Equações Diferenciais Parciais.

CDD 516.36

Aos meus pais, Erinaldo e Andréa, à minha irmã, Karoliny, e à minha amada sobrinha, Maria Ysis, que sempre me apoiaram.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades e conseguir chegar até aqui.

Aos meus pais Erinaldo Pinheiro Lima e Andréa Lopes de Lima, à minha irmã Karoliny Lopes de Lima e minha sobrinha Maria Ysis Lima pelo grande apoio e incentivo em todos esses anos de estudo.

Aos meus avós Francisco Laurindo, Maria de Jesus, e Francisca Lima que considero como pais e minha tia-avó Raimunda Lopes que considero como mãe, por toda a força, apoio e carinho que me deram todos esses anos não só nos estudos, mas em toda minha vida.

Ao meu avô Miguel Nonato Lima *(In Memoriam)*, que mesmo não estando mais entre nós, me deu um grande incentivo pelo grande homem que foi, pelo exemplo de força de vontade, mostrando que é possível superar todas as dificuldades se mantendo íntegro e honesto até o fim.

À todos os outros membros da minha família, que me ajudaram diretamente e indiretamente me dando força e incentivo para sempre continuar.

Ao meu orientador Professor Dr. Isaías Pereira de Jesus por toda ajuda, paciência e orientação que foram cruciais para o desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores José Francisco Alves de Oliveira e Franciane de Brito Vieira por aceitarem a participar da banca examinadora.

Ao professor Luciano Cipriano da Silva pela disponibilidade e incentivo que tive nas horas difíceis. Sua ajuda foi de grande valia. Obrigado por aceitar a participar da banca examinadora.

Aos professores da graduação e pós - graduação por toda ajuda e paciência que tiveram comigo, e por todo aprendizado que me proporcionaram.

À CAPES pelo apoio financeiro (Antes tarde do que nunca! kkk).

Obrigado a todos que possibilitaram e contribuíram para que esse momento chegasse.

"Não fui eu que lhe ordenei? Seja forte e corajoso! Não se apavore, nem se desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar ."

Josué 1:9.

Resumo

O objetivo desse trabalho é estudarmos a controlabilidade exata às trajetórias para uma equação linear hiperbólica via estratégia de Stackelberg - Nash.

Devido à linearidade do problema, a controlabilidade exata às trajetórias é equivalente à controlabilidade nula. Por esse motivo, usaremos um argumento padrão de observabilidade que reduz o problema de controle nulo à uma estimativa para as soluções do sistema adjunto do problema principal. Usaremos uma Desigualdade de Carleman, que será utilizada para obter o nosso principal resultado.

Palavras-chave: Equação Linear da Onda, Estratégia de Stackelberg - Nash, Desigualdade de Observabilidade, Controlabilidade Nula.

Abstract

The objective of this work is to study the exact controllability of the trajectories for a hyperbolic linear equation via the Stackelberg - Nash strategy.

Due to the linearity of the problem, exact controllability to trajectories is equivalent to null controllability. For this reason, we will use a standard observability argument that reduces the null control problem to an estimate for the adjunct system solutions to the main problem. We will use a Carleman Inequality, which will be used to obtain our main result.

Keywords: Linear Wave Equation, Stackelberg- Nash Strategies, Observability Inequality, Null Controllability.

Sumário

Notações e Simbologias

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto.

- $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$;
- $\|\cdot\|$ denota a norma em $L^2(\Omega)$;
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$ quando não especificado, denota diferentes pares de dualidades;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano da função u;
- q.s. - quase sempre;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota a imersão compacta;
- C quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária;
- $\mathcal{L}(X,Y)$ denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y;
- $D(f)$ denota o domínio de f;
- E' denota o dual topológico do espaço vetorial E;
- $\sigma(E,E')$ denota a topologia fraca de E induzida por E';
- $\|\|_\infty$ denota a norma de L^∞.

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo da controlabilidade exata às trajetórias para uma equação da onda linear via estratégia de Stackelberg - Nash.

Um problema de controle para uma equação de evolução (EDO OU EDP) pode ser descrito da seguinte forma:

$$y' = f(t, y, u), \tag{1}$$

onde $t \in [0, T]$ representa a variável temporal, $y : [0, T] \to X$ é a função estado e $u : [0, T] \to Y$ é um controle. Nesse modelo, X e Y são espaços de funções adequados, $T > 0$ é um valor real fixado e y' representa a derivada de y em relação ao tempo t.

Em seguida, destacamos algumas das principais definições de controlabilidade presentes na literatura.

Definição 0.1 ***(Controlabilidade exata)*** *Sejam $T > 0$ um número real e $y_0, y_1 \in X$ dois possíveis estados do sistema* (1)*. Dizemos que tal sistema é exatamente controlável se existe $u : [0, T] \to Y$ tal que;*

$$\begin{cases} y' = f(y, u) \;\; em \; [0, T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_1. \end{cases}$$

Definição 0.2 ***(Controlabilidade aproximada)*** *Sejam $T > 0$ um número real e y_0, y_1 dois possíveis estados do sistema* (1)*. Dizemos que tal sistema é aproximadamente controlável se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $u : [0, T] \to Y$ tal que;*

$$\begin{cases} y' = f(y, u) \;\; em \; [0, T], \\ y(0) = y_0, \quad \|y(T) - y_1\| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Definição 0.3 ***(Controlabilidade nula)*** *Sejam $T > 0$ um número real dado e $y_0 \in X$ um possível estado do sistema* (1)*. Dizemos que tal sistema é nulamente controlável se* *existe* $u : [0,T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{cases} y' = f(y,u) \ \ em \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = 0. \end{cases}$$

Definição 0.4 ***(Controlabilidade exata às trajetórias)*** *Sejam* $T > 0$ *um número real dado,* $y_0 \in X$ *um possível estado e* $\overline{y}$ *uma trajetória (isto é, uma solução arbitrária do sistema* (1) *sem controle). Dizemos que tal sistema é exatamente controlável às trajetórias se existe* $u : [0,T] \to Y$ *tal que;*

$$\begin{cases} y' = f(y,u) \ \ em \ [0,T], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = \overline{y}(T). \end{cases}$$

É bem sabido que, em problemas lineares, as definições de controle nulo e exato às trajetórias são equivalentes.

Existem muitas situações em que vários controles são necessários para conduzir um sistema a um ou mais objetivos. Normalmente, se atribuímos funções diferentes aos controles, falamos de *controle hierárquico*. Esse conceito no contexto das equações hiperbólicas foi introduzida por J. -L. Lions [10], onde o autor analisou a controlabilidade aproximada para um sistema associado a uma equação da onda. Nesse trabalho, J. -L. Lions considerou um controle principal chamado de *líder* e adicionalmente um controle secundário chamado de *seguidor*, seguindo a estratégia de Stackelberg [20, 16].

Posteriormente, vários trabalhos surgiram em relação ao tema proposto aplicado a outros sistemas governados por uma EDP, dentre os quais podemos citar:

- O artigo de Lions [11, 12], onde o autor prova alguns resultados sobre estratégia de Pareto e Stackelberg, respectivamente.

- Os artigos [17, 18], onde Ramos et. al estudaram equilíbrio de Nash dos pontos de vista teórico e numérico para EDP's parabólicas lineares.

As questões de controlabilidade consideradas nos trabalhos acima citados fornecem apenas respostas em nível aproximado. A principal novidade apresentada nesse trabalho é a extensão da análise e os resultados para um problema de controlabilidade exata, mais precisamente, controle exato às trajetórias. Precisamente, este trabalho baseia-se no artigo [1] e está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos os resultados preliminares, essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 2 apresentamos formalmente o problema de controle a ser estudado.

No capítulo 3 provaremos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash para os funcionais custo associados ao problema principal. Daremos ainda uma caracterização desse equilíbrio como solução de um sistema de equações diferenciais.

No capítulo 4 provaremos a desigualdade de observabilidade, mais uma peça fundamental para a prova do teorema principal.

Finalmente, no capítulo 5 provaremos o Teorema 2.2, que é equivalente ao resultado principal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e definições que serão utilizados no decorrer do texto para ajudar o leitor a ter uma melhor compreensão do conteúdo abordado nos capítulos seguintes.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1 ***(Convergência Fraca)*** *Sejam E um espaço de Banach e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Dizemos que (u_k) converge fracamente para $u \in E$ e escrevemos $u_k \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \phi, u_k \rangle \to \langle \phi, u \rangle, \forall \phi \in E'$.*

Definição 1.2 ***(Convergência Fraca Estrela)*** *Sejam E um espaço de Banach, $\phi \in E'$ e $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Dizemos que ϕ_k converge fraco estrela para ϕ e escrevemos $\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$ se, e somente se, $\langle \phi_k, u \rangle \to \langle \phi, u \rangle, \ \forall u \in E$.*

Proposição 1.1 *Sejam E um espaço de Banach e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então:*

(i) Se $u_k \rightharpoonup u$ em $\sigma(E, E')$ então $\langle \varphi, u_k \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \ \forall \varphi \in E'$;

(ii) Se $u_k \to u$ forte então $u_k \rightharpoonup u$ fracamente na topologia $\sigma(E, E')$;

(iii) Se $u_k \rightharpoonup u$ em $\sigma(E, E')$ então $(\|u_k\|)$ é limitada e $\|u\| \leq \liminf \|u_k\|$;

(iv) Se $u_k \rightharpoonup u$ em $\sigma(E, E')$ e se $\varphi_k \to \varphi$ fortemente em E', então $\langle \varphi_k, u_k \rangle \to \langle \varphi, u \rangle$.

Demonstração: *Jesus et. al ([9], pág. 98).* $\square$

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 1.3 *Um espaço métrico E é dito separável se existe um subconjunto $A \subset E$ enumerável e denso em E.*

Definição 1.4 *Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E''. O espaço E é dito reflexivo se quando $J(E) = E''$.*

Teorema 1.1 ***(Banach - Alaoglu - Bourbaki)***. *Sejam E um espaço de Banach e E' seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca estrela $\stackrel{*}{\rightharpoonup}$.

Demonstração: *Brezis([3], pág. 66)* □

Teorema 1.2 *Sejam E um espaço de Banach separável e E' seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$$

é metrizável na topologia fraca estrela $\stackrel{*}{\rightharpoonup}$.

Reciprocamente, se $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: *Brezis([3], pág. 74)* □

Corolário 1.1 *Sejam E um espaço de Banach separável e $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência $(g_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estrela $\stackrel{*}{\rightharpoonup}$.*

Demonstração: *Brezis([3] pág. 76).* □

Teorema 1.3 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que*

$$f_{n_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: *Evans([7] pág. 639).* □

1.2 Os Espaços L^p

Nesta seção, faremos uma breve descrição dos espaços L^p e algumas de suas propriedades.

Definição 1.5 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < +\infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mensurável e} \int_\Omega |f|^p dx < +\infty\}.$$

O espaço acima definido munido com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Definição 1.6 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists\, C \geq 0; |f(x)| \leq C \ \ q.s \text{ em } \ \Omega\}.$$

O espaço L^∞ munido com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \ \ q.s. \ \text{ em } \ \Omega\}$$

é um espaço de Banach.

Teorema 1.4 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $1 < p$ e $1 < q$ números reais conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \ \ \forall\, a \geq 0 \ \text{ e } \ b \geq 0.$$

Em particular, se $p = q = 2$, a relação é válida para quaisquer dois números reais.

Demonstração: *Brezis ([3], pág. 92).* □

Teorema 1.5 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([3], pág. 92). □

Definição 1.7 *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável a Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolos temos*

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f|dx < +\infty,\ \forall K \subset \Omega.$$

Lema 1.2.1 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Se*

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx = 0,\ \forall\, v \in D(\Omega), \tag{1.1}$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: *Medeiros ([13], pág. 14)* □

1.3 Teoria das Distribuições Escalares

Motivado pela noção de integração por partes do cálculo diferencial, Sobolev prospôs a ideia de derivada fraca para uma função em L^1_{loc}, porém essa definição possuía algumas falhas, então, posteriormente, Schwarz aprimorou a ideia definindo a derivada fraca no sentido das distribuições ou derivada distribucional. Faremos agora algumas considerações sobre esse assunto.

No que se segue abaixo, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto.

Definição 1.8 *Denomina-se suporte de uma função continua $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, ao fecho em Ω do conjunto onde $\varphi \neq 0$, simbolicamente,*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Definição 1.9 *Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciaveis com suporte compacto em Ω.*

Exemplo 1.1 *Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ e $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x||_n < 1\} \subset \Omega$. Consideremos $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|_n^2 - 1}}, & se\ \|x\|_n < 1, \\ 0, & se\ \|x\|_n \geq 1, \end{cases}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ *e* $\|x\|_n = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *é a norma euclidiana de* x. *Temos que* $\varphi(x) \in C^\infty$ *e* $supp(\varphi) = \overline{B_1(0)}$ *é compacta , isto é,* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.10 *Diz-se que uma sucessão* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* φ *em* $C_0^\infty(\Omega)$, *quando forem satisfeitas as condições:*
i) Todas as $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possuem suportes contidos em um compacto fixo* K *de* Ω;
ii) A sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* φ *em* K, *juntamente com suas derivadas de todas as ordens.*
O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, *munido da noção de convergência acima definida, representado por* $D(\Omega)$ *é chamado de Espaço das Funções Teste sobre* Ω.

Definição 1.11 *Denomina-se Distribuição sobre* Ω *toda forma linear contínua sobre* $D(\Omega)$. *Dito de modo explícito, uma distribuição sobre* Ω *é uma forma linear* $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, *satisfazendo as condições:*

i. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g), \forall\, f, g \in D(\Omega), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

ii. T *é contínua , isto é, se* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* φ *em* $D(\Omega)$, *então* $\langle T, \varphi_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\langle T, \varphi\rangle$ *em* $\mathbb{R}$, *onde* $\langle T, \varphi\rangle$ *denota o valor da distribuição* T *aplicada em* φ.

Exemplo 1.2 *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*e defina a forma linear* $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in\ D(\Omega).$$

Então T *é uma distribuição sobre* Ω.

Agora, seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de distribuições sobre* $D(\Omega)$. *Dizemos que a sucessão* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* T *quando a sucessão* $\langle T_n, \varphi\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\langle T, \varphi\rangle$ *em* $\mathbb{R}$ *para toda* φ *em* $D(\Omega)$. *O espaço das distribuições sobre* $D(\Omega)$, *munido com essa noção de convergência é denotado por* $D'(\Omega)$.

Definição 1.12 *Denomina-se o operador derivação* D^α, *com* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *uma n-upla de inteiros não negativos, sendo* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *sua ordem, como sendo*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.13 *Sejam $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ uma distribuição e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice. Definimos a forma linear e contínua $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \tag{1.2}$$

como a derivada fraca de T no sentido das distribuições em $D(\Omega)$.

Segue das definições acima e da noção de convergência introduzida em $D'(\Omega)$ que o operador derivação é contínuo, mais ainda, com essa definição de derivada, uma distribuição T admite derivadas de todas as ordens.

1.4 Espaços de Sobolev

Tendo em vista as definições de distribuição e derivada fraca, pode se verificar que toda função $f \in L^p(\Omega)$, $\ 1 \leq p < +\infty$, define uma distribuição e possui derivada fraca de todas as ordens, porém, uma pergunta natural surge: essas derivadas ainda pertencem a algum espaço L^p? Esse tipo de questionamento levou à noção de espaços de Sobolev, como veremos a seguir.

1.4.1 O espaço $W^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.14 *Sejam $p \in [1, +\infty]$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos como espaço de Sobolev de ordem m o conjunto das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$, ou seja, $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\, D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, |\alpha| \leq m\}$.O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido com a norma*

$$||u||_{W^{m,p}}(\Omega) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u||_{L^p}^p \right)^{1/p}$$

é um espaço de Banach.

Quando $p = 2$ ele recebe uma notação especial, a saber,

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

O espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

1.4.2 O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definimos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o fecho em $W^{m,p}(\Omega)$ do espaço $D(\Omega)$, isto é,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

O espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ é fechado em $W^{m,p}(\Omega)$, dessa forma, ele próprio é um espaço de Banach. Como consequência da Desigualdade de Poincaré, (vide próxima seção), temos que

$$\|f\|_{W_0^{m,p}} = \left(\sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, além disso, ela é equilvalente à norma de $W^{m,p}(\Omega)$.

1.4.3 Teoremas de Imersão

Definição 1.15 *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que X está continuamente imerso em Y, e denotamos por $X \hookrightarrow Y$, quando $X \subset Y$ e existir uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall x \in X.$$

Se toda sequência limitada em X admitir uma subsequência convergente em Y, dizemos que X é compactamente imerso em Y e escrevemos $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Teorema 1.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado. Se $1 \leq q \leq p \leq \infty$, então $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.*

Demonstração: *Matos ([14], pág. 111).* □

Teorema 1.7 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado , $n \geq 2$, Ω de classe C^m e $1 \leq p < \infty$. Então*

(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$, *se* $mp < n$;

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$, *se* $mp = n$.

Demonstração: *Miranda- Medeiros ([15], pág. 75).* □

Teorema 1.8 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas;*

(i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \dfrac{np}{n-p}$, *se* $p < n$,

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leq q < \infty$, *se* $p = n$,

(iii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, *se* $p > n$.

Demonstração: Miranda-Medeiros ([15], pág. 79). □

1.5 Resultados Importantes

Teorema 1.9 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *seja um subconjunto aberto e limitado e* $1 \leq p < \infty$. *Então existe uma constante* C, *dependendo de* Ω *e* p, *tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Brezis ([3], p. 290). □

Teorema 1.10 ***(Lax - Milgram)*** *Sejam* H *um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números reais e* $T : H \times H \to \mathbb{R}$ *uma forma bilinear contínua e coerciva. Para todo funcional linear contínuo* $\varphi \in H'$ *existe um único vetor* $x_0 \in H$ *tal que* $\varphi(x) = T(x, x_0)$, *para todo* $x \in H$.

Demonstração: *Botelho ([2], pág.131).* □

Teorema 1.11 ***(Fórmulas de Green)*** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com fronteira* Γ *de classe* C^2.

(i) Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, *então*

$$\int_\Omega \nabla\gamma\nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta\gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} u ds, \ \forall u \in H^1(\Omega); \tag{1.3}$$

(ii) Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, *então*

$$\int_\Omega (u\Delta\gamma - \gamma\Delta u)\, dx = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} \right) ds. \tag{1.4}$$

Demonstração: *Ver Brezis [3].* □.

Lema 1.5.1 ***(Desigualdade de Gronwall)*** *Sejam $u, \alpha \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\beta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$. Se α for crescente e*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds, \quad \forall t \geq t_0, \tag{1.5}$$

então

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0. \tag{1.6}$$

Demonstração: *Defina $R(s) = \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)u(s)ds$ e observe que $\beta u \in L^1[t_0, t]$, então $R'(s) = \beta(s)u(s)$ q.s. em $[t_0, t]$. Multiplicando (1.5) por $\beta(s)$, obtemos $R'(s) \leq \beta(s)R(s)$ q.s. em $[t_0, t]$. Reescrevendo a desigualdade anterior e integrando de t_0 a t obtemos*

$$R(t) \leq R(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds}$$

Portanto, pela definição de $R(t)$, o resultado segue. □

Teorema 1.12 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, $A \subset E$ um subconjunto convexo, fechado, não vazio e $\varphi : A \to (-\infty, +\infty]$, uma função tal que:*

(i) *φ é convexa;*

(ii) *φ é semicontínua inferiormente, isto é, $\forall a \in \mathbb{R} \quad \varphi^{-1}(a, +\infty)$ é aberto em E;*

(iii) *φ é coerciva, ou seja, $\lim\limits_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to +\infty}} \varphi(x) = +\infty$.*

Então φ atinge seu mínimo em A, ou seja, existe $x_0 \in A$ tal que $\varphi(x_0) = \min\limits_{x \in A} \varphi(x)$.

Demonstração: Brezis ([3], p. 71). □

Observação 1.1 *Sendo φ estritamente convexa, então o mínimo x_0 obtido no Teorema 1.12 é único.*

Capítulo 2

Formulação do Problema

Nesse capítulo apresentamos formalmente o problema a ser estudado. Mais precisamente, faremos uma descrição suscinta do problema proposto.

2.1 Descrição Geral

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado cuja fronteira Γ é uma superfície suficientemente regular e $T > 0$ um escalar dado. Definimos o cilindro $Q := \Omega \times (0, T)$, com fronteira lateral $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T)$. Consideremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y + a(x,t)y = f1_{\mathcal{O}} + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ y = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ y(x,0) = y^0, \quad y_t(x,0) = y^1 & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $a \in L^\infty(Q)$, $(y^0, y^1) = (y^0(x), y^1(x)) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ são os dados iniciais e $y = y(x,t)$ é um estado. Em (2.1), o conjunto $\mathcal{O} \subset \Omega$ é o domínio do controle principal, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \Omega$ são os domínios dos controles secundários (todos eles são supostos pequenos), $1_{\mathcal{O}}, 1_{\mathcal{O}_1}$ e $1_{\mathcal{O}_2}$ são funções características de $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ respectivamente. A função $f = f(x,t)$ é o controle líder e $v^1 = v^1(x,t)$ e $v^2 = v^2(x,t)$ são os controles seguidores.

Sejam $\mathcal{O}_{1,d}, \mathcal{O}_{2,d} \subset \Omega$ conjuntos abertos, representando domínios de observação para os seguidores. Definimos os funcionais custo secundários para os seguidores como sendo

$$J_i(f; v^1, v^2) := \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |y - y_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt, \quad i = 1, 2, \tag{2.2}$$

onde μ_i são constantes positivas e as $y_{i,d} = y_{i,d}(x,t)$ são funções dadas.

A metodolgia de controle pode ser descrita como segue:

1- Para cada líder f, o par de seguidores (v^1, v^2) devem ser um equilíbrio de Nash para os custos J_i $(i = 1, 2)$. Em outras palavras, uma vez fixado o controle líder f, procuramos um par (v^1, v^2), com $v^i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T)), i = 1, 2$, tais que;

$$J_1(f; v^1, v^2) = \min_{\hat{v}^1} J_1(f; \hat{v}^1, v^2), \ J_2(f; v^1, v^2) = \min_{\hat{v}^2} J_2(f; v^1, \hat{v}^2). \tag{2.3}$$

Como veremos mais adiante, como os funcionais J_i $(i = 1, 2)$ são C^1 e convexos, então o par (v^1, v^2) é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$J_1'(f; v^1, v^2)(\hat{v}^1, 0) = 0, \ \forall \ \hat{v}^1 \in L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))$$

e

$$J_2'(f; v^1, v^2)(0, \hat{v}^2) = 0, \ \forall \ \hat{v}^2 \in L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T)).$$

Essa estratégia de controle multi-objetivo é denominada *estratégia de Stackelberg-Nash.*

2 - Seja $\overline{y} : Q \to \mathbb{R}$ uma trajetória de (2.1), isto é, $\overline{y}$ é uma solução regular do sistema

$$\begin{cases} \overline{y}_{tt} - \Delta\overline{y} + a(x,t)\overline{y} = 0 & \text{em } Q, \\ \overline{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \overline{y}(x, 0) = \overline{y}^0(x), \ \overline{y_t}(x, 0) = \overline{y}^1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

Uma vez que o equilíbrio de Nash (v^1, v^2) tenha sido encontrado, procuramos por um controle $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ que minimiza o seu funcional custo e tal que a correspondente solução de (2.1) verifica

$$y(x, T) = \overline{y}(x, T), \quad y_t(x, T) = \overline{y}_t(x, T) \text{ em } \Omega. \tag{2.5}$$

Um exemplo físico onde tal modelo de problema de controle pode ser aplicado surge, por exemplo, quando consideramos $y(x, t)$ uma distribuição de temperatura em um corpo, e o objetivo é levar y até $\overline{y}$ no tempo T por meio de aquecimento ou resfriamento (atuando com os controles f, v^1 e v^2 apenas nos subdomínios $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$), tentando ao mesmo tempo manter as temperaturas razoáveis $y_{i,d}$ em $\mathcal{O}_{1,d}$ e $\mathcal{O}_{2,d}$, durante todo o intervalo de tempo $(0, T)$ por meio da ação dos seguidores v^1 e v^2.

2.2 O Resultado Principal

Para o que segue, o símbolo C denota uma constante genérica positiva, dependendo de Ω, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_i$, T e talvez um outro dado.

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ e consideremos o seguinte conjunto

$$\Gamma_+ := \{x \in \Gamma : (x - x_0).\nu(x) > 0\},$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior no ponto x sobre Γ.

Consideremos

$$R_0 := min\{\sqrt{d(x)};\ x \in \overline{\Omega}\} \quad \text{e} \quad R_1 := max\{\sqrt{d(x)};\ x \in \overline{\Omega}\}, \tag{2.6}$$

onde $d : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $d(x) := |x - x_0|^2$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Assumamos que vale a seguinte afirmação:

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \ \ \mathcal{O} \supset \mathcal{O}_\delta(\Gamma_+) \cap \Omega, \tag{2.7}$$

onde

$$\mathcal{O}_\delta(\Gamma_+) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x'| < \delta, \ \ x' \in \Gamma_+\}.$$

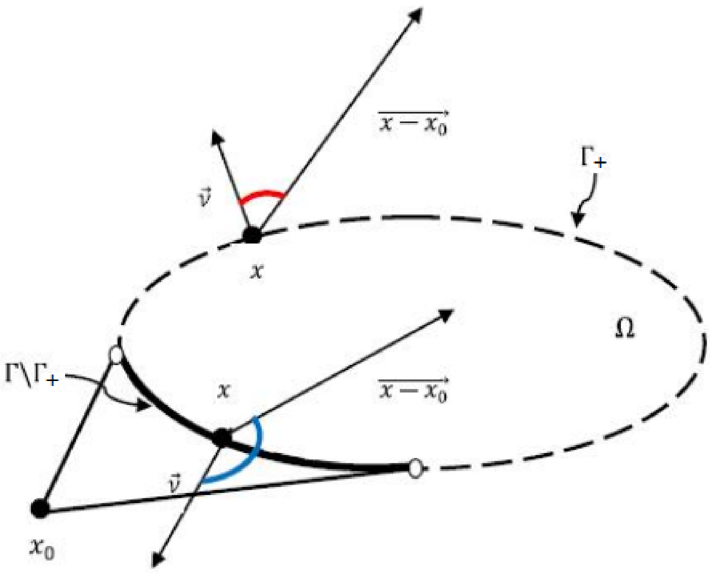

Figura 2.1: *Partição da fronteira Γ de Ω.*

Com essas notações acima, vale o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Suponhamos que* $T > 2R_1$ *e as constantes* $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2)$ *são suficientemente grandes dependendo apenas de* Ω, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_i$, $\mathcal{O}_{id}$, T *e* $||a||_{L^\infty(Q)}$. *Então, para qualquer dado inicial* $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *existem um controle* $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ *e um equilíbrio de Nash* $(v^1, v^2) = (v^1(f), v^2(f))$ *associado tal que a solução* y *do sistema* (2.1) *correspondente aos controles* v^1, v^2 *e* f *satisfaz* (2.5).

Observação 2.1 *Fazendo a mudança de variáveis* $z = y - \overline{y}$, *da linearidade e boa colocação dos sistemas* (2.1) *e* (2.4) *obtemos que*

$$\begin{cases} (y-\overline{y})_{tt} - \Delta(y-\overline{y}) + a(x,t)(y-\overline{y}) = f1_{\mathcal{O}} + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ (y-\overline{y}) = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ (y-\overline{y})(x,0) = (y-\overline{y})^0(x), \ \ (y-\overline{y})_t(x,0) = (y-\overline{y})^1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Daí, temos que $z \in L^2(Q)$ *é solução do problema*

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z + a(x,t)z = f1_{\mathcal{O}} + v^1 1_{\mathcal{O}_1} + v^2 1_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(x,0) = z^0(x), \ \ z_t(x,0) = z^1(x) & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

Dessa forma, $y(\cdot, T) = \overline{y}(\cdot, T)$, $y_t(x, T) = \overline{y}_t(x, T)$ *se, e somente se,* $z(\cdot, T) = 0$, $z_t(\cdot, T) = 0$.

Assim, podemos reescrever o Teorema 2.1 como segue:

Teorema 2.2 *Suponhamos que* $T > 2R_1$ *e as constantes* $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2)$ *são suficientemente grandes dependendo apenas de* Ω, $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_i$, $\mathcal{O}_{id}$, T *e* $||a||_{L^\infty(Q)}$. *Então, para qualquer dado inicial* $(z^0, z^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *existem um controle* $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0, T))$ *e um equilíbrio de Nash* $(v^1, v^2) = (v^1(f), v^2(f))$ *associado tal que a solução* z *do problema* (2.9) *correspondente aos controles* v^1, v^2 *e* f *satisfaz*

$$z(\cdot, T) = 0, \ \ z_t(\cdot, T) = 0 \ . \tag{2.10}$$

Capítulo 3

Equilíbrio de Nash e Sistema Otimizado

Nessa seção, provaremos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash para os funcionais custo $J_i, i = 1, 2$, definidos em (2.2). Para esse objetivo, vamos derivar os funcionais custo no sentido de Gateaux e usaremos a equação de Euler-Lagrange resultante para formular o problema nas condições do Teorema de Lax-Milgran. Além disso, vamos caracterizar o par (v^1, v^2) como solução de um sistema adjunto conveniente e por fim, obteremos um sistema otimizado cuja controlabilidade nula é equivalente ao problema que estamos resolvendo.

3.1 Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash

Usando a mudança de variáveis $z = y - \overline{y}$ e $z_{i,d} = y_{i,d} - \overline{y}$ feita anteriormente, podemos reescrever (2.2) como segue.

Lema 3.1.1 *Os funcionais*

$$J_i(f; v^1, v^2) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |z - z_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt, \quad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

são de classe C^1 e estritamente convexos.

Demonstração: *Primeiro, decompomos os fucionais $J_i, i = 1, 2,$ da seguinte forma:*

$$J_i(f; v^1, v^2) = \hat{J}_i(z) + \tilde{J}_i(v^i), \tag{3.2}$$

onde

$$\hat{J}_i(z) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |z - z_{i,d}|^2 dxdt \ \ e \ \ \tilde{J}_i(v^i) = \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^i|^2 dxdt.$$

Dados $\lambda \in (0,1), z, \tilde{z} \in L^2(Q)$, *com* $z \neq \tilde{z}$, *pela Desigualdade de Young, temos que*

$$\begin{aligned}
&\hat{J}_i(\lambda z + (1-\lambda)\tilde{z}) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\lambda z + (1-\lambda)\tilde{z} - (\lambda z + (1-\lambda)\tilde{z})_{i,d}|^2 dxdt\\
&= \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\lambda(z - z_{i,d}) + (1-\lambda)(\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d})|^2 dxdt\\
&= \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \left(\lambda^2(z - z_{i,d})^2 + 2\lambda(1-\lambda)(z - z_{i,d})(\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d}) + (1-\lambda)^2(\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d})^2\right) dxdt\\
&< \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \left(\lambda^2(z - z_{i,d})^2 + \lambda(1-\lambda)[|z - z_{i,d}|^2 + |\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d}|^2]\right) dxdt\\
&\quad + \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (1-\lambda)^2(\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d})^2 dxdt\\
&= \lambda\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |z - z_{i,d}|^2 dxdt + (1-\lambda)\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\tilde{z} - \tilde{z}_{i,d}|^2 dxdt\\
&= \lambda\hat{J}_i(z) + (1-\lambda)\hat{J}_i(\tilde{z}).
\end{aligned}$$

Observemos que a desigualdade estrita vem do fato de que $z \neq \tilde{z}$. *Analogamente, olhando para os funcionais* $\tilde{J}_i$ *obtemos:*

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_i(\lambda v^i + (1-\lambda)\tilde{v}^i) &= \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |\lambda v^i + (1-\lambda)\tilde{v}^i|^2 dxdt\\
&= \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} \left(\lambda^2|v^i|^2 + 2\lambda(1-\lambda)v^i\tilde{v}^i + (1-\lambda)^2|\tilde{v}^i|^2\right) dxdt\\
&\leq \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} \left(\lambda^2|v^i|^2 + \lambda(1-\lambda)[|v^i|^2 + |\tilde{v}^i|^2] + (1-\lambda)^2|\tilde{v}^i|^2\right) dxdt\\
&= \lambda\frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^i|^2 dxdt + (1-\lambda)\frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |\tilde{v}^i|^2 dxdt\\
&= \lambda\tilde{J}_i(v^i) + (1-\lambda)\tilde{J}_i(\tilde{v}^i).
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que os funcionais $J_i, i = 1, 2$, *são estritamentes convexos.*

Agora, definamos os espaços $\mathcal{H}_i = L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T)), \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ *e os operadores* $L_i : \mathcal{H}_i \to L^2(Q), i = 1, 2$, *dados por* $L_i(\hat{v}^i) = z^i$, *onde* z^i *é a solução do sistema*

$$\begin{cases} z^i_{tt} - \Delta z^i + a(x,t)z^i = \hat{v}^i 1_{\mathcal{O}_i} & em\ Q,\\ z^i = 0 & sobre\ \Sigma,\\ z^i(x,0) = 0, \ \ z^i_t(x,0) = 0 & em\ \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

O sistema (3.3) *admite uma única solução, e assim,* L_i *está bem definido. Além disso, sua linearidade decorre imediatamente da linearidade do sistema* (2.9). *A continuidade* *pode ser verificada facilmente. Logo,* $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i; L^2(Q)), i = 1, 2$. *Por outro lado, para cada* $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, *existe uma única solução* $u \in L^2(Q)$ *para o sistema*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x,t)u = f1_{\mathcal{O}} & em\ Q, \\ u = 0 & sobre\ \Sigma, \\ u(x,0) = z^0, \quad u_t(x,0) = z^1 & em\ \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dessa forma, pela unicidade de solução do sistema (2.9) *podemos escrever* $z = L_1v^1 + L_2v^2 + u$ *e assim,* (3.1) *pode ser reescrita como sendo*

$$J_i(f; v^1, v^2) = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^i|^2 dxdt. \tag{3.5}$$

Agora, definimos a função

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &= J_1(f; v^1 + \lambda\hat{v}^1, v^2) \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |L_1v^1 + \lambda L_1\hat{v}^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}|^2 dxdt \\ &\quad + \frac{\mu_i}{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} |v^1 + \lambda\hat{v}^1|^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ *e* $v^2 \in \mathcal{H}_2$. *Calculando a derivada de Gateaux de* ϕ_1, *com* $a = \lambda L_1\hat{v}^1$ *e* $b = L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}$ *resulta que*

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1(\lambda) - \phi_1(0)}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |a+b|^2 dxdt - \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |b|^2 dxdt \\ -\frac{\mu_1}{2}&\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |v^1|^2 dxdt + \frac{\mu_1}{2}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |v^1 + \lambda\hat{v}^1|^2 dxdt\Big) \\ &= \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |a|^2 dxdt + \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} (ab) dxdt \\ +\lambda^2\frac{\mu_1}{2}&\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |\hat{v}^1|^2 dxdt + \lambda\mu_1\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1 dxdt\Big) \\ &= \frac{1}{\lambda}\Big(\lambda^2\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |L_1\hat{v}^1|^2 dxdt \\ +\lambda&\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} L_1\hat{v}^1(L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}) dxdt \\ +\lambda\mu_1&\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1 dxdt + \lambda^2\frac{\mu_1}{2}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |\hat{v}^1|^2 dxdt\Big) \\ &= \lambda\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} |L_1\hat{v}^1|^2 dxdt + \lambda\frac{\mu_1}{2}\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} |\hat{v}^1|^2 dxdt \\ +\mu_1&\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1 dxdt + \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} L_1\hat{v}^1(L_1v^1 + L_2v^2 + u - z_{1,d}) dxdt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\phi_1(\lambda)-\phi_1(0)}{\lambda} = \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)} L_1\hat{v}^1(L_1v^1+L_2v^2+u-z_{1,d})dxdt$$
$$+\,\mu_1\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1dxdt, \forall\ \hat{v}^1\in\mathcal{H}_1.$$

Portanto,

$$J_1'(f;v^1,v^2)(\hat{v}^1,0) = \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}(z-z_{1,d})L_1\hat{v}^1dxdt + \mu_1\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1\hat{v}^1dxdt, \forall\ \hat{v}^1\in\mathcal{H}_1.$$

De maneira análoga obtemos

$$J_2'(f;v^1,v^2)(0,\hat{v}^2) = \iint_{\mathcal{O}_{2,d}\times(0,T)}(z-z_{2,d})L_2\hat{v}^2dxdt + \mu_2\iint_{\mathcal{O}_2\times(0,T)} v^2\hat{v}^2dxdt,\ \forall\ \hat{v}^2\in\mathcal{H}_2.$$

A linearidade das derivadas dos J_i segue da linearidade das L_i e das integrais.

Dada $(\hat{v}^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{H}_1$ tal que $\hat{v}^1_n\to\hat{v}^1$ em $\mathcal{H}_1$, obtemos pela desigualdade de Schwarz que

$$\left|\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}(z-z_{1,d})L_1(\hat{v}^1_n-\hat{v}^1)dxdt\right| \le \iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}|(z-z_{1,d})L_1(\hat{v}^1_n-\hat{v}^1)|dxdt$$
$$\le \left(\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}|z-z_{1,d}|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\iint_{\mathcal{O}_{1,d}\times(0,T)}|L_1(\hat{v}^1_n-\hat{v}^1)|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \|z-z_{1,d}\|_{L^2(Q)}\|L_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_i;L^2(Q))}\|\hat{v}^1_n-\hat{v}^1\|_{\mathcal{H}_1},$$

e

$$\left|\mu_1\iint_{\mathcal{O}_1\times(0,T)} v^1(\hat{v}^1_n-\hat{v}^1)dxdt\right| \le \mu_1\|v^1\|_{\mathcal{H}_1}\|\hat{v}^1_n-\hat{v}^1\|_{\mathcal{H}_1}.$$

Logo, $J_1'(f;v^1,v^2)(\hat{v}^1_n,0)\to J_1'(f;v^1,v^2)(\hat{v}^1,0)$ quando $\hat{v}^1_n\to\hat{v}^1$. Isso prova que J_1' é contínuo. De modo análogo, prova-se a continuidade de J_2'. □

Proposição 3.1 *Consideremos os funcionais J_i definidos em (3.1). As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *(v^1,v^2) é um equilíbrio de Nash para os funcionais $J_i, i=1,2$;*

ii)

$$J_1'(f;v^1,v^2)(\hat{v}^1,0) = J_2'(f;v^1,v^2)(0,\hat{v}^2) = 0,\ \forall\ \hat{v}^i\in L^2(\mathcal{O}_i\times(0,T)), i=1,2.$$

iii)

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}(z-z_{i,d})L_i\hat{v}^idxdt + \mu_i\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} v^i\hat{v}^idxdt = 0, \forall\ \hat{v}^i\in\mathcal{H}_i.$$

Demonstração: *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*

Sendo (v^1, v^2) *um equilíbrio de Nash para os custos* J_i $(i = 1, 2)$, *temos*

$$J_1(f; v^1, v^2) \leq J_1(f; \tilde{v}^1, v^2), \quad \forall \tilde{v}^1 \in \mathcal{H}_1$$

e

$$J_2(f; v^1, v^2) \leq J_2(f; v^1, \tilde{v}^2), \quad \forall \tilde{v}^2 \in \mathcal{H}_2.$$

Logo, $v^1 \in \mathcal{H}_1$ *é um mínimo do funcional* $F_1(\tilde{v}^1) = J_1(f; \tilde{v}^1, v^2)$, *isto é,*

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{F_1(v^1 + \lambda\tilde{v}^1) - F_1(v^1)}{\lambda} = & \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} (z - z_{1,d}) L_1 \tilde{v}^1 dxdt \\ & + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} v^1 \tilde{v}^1 dxdt = 0, \forall\ \tilde{v}^1 \in \mathcal{H}_1.\end{aligned}$$

O mesmo ocorre com J_2.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*

Como os funcionais J_i $(i = 1, 2)$ *são estritamente convexos e limitados inferiormente, existem únicos* $v^1 \in \mathcal{H}_1$ *e* $v^2 \in \mathcal{H}_2$ *tais que*

$$J_1(f; v^1, v^2) \leq J_1(f; \tilde{v}^1, v^2), \forall \tilde{v}^1 \in \mathcal{H}_1,$$

onde f *e* v^2 *estão fixados. Da mesma forma*

$$J_2(f; v^1, v^2) \leq J_2(f; v^1, \tilde{v}^2), \forall \tilde{v}^2 \in \mathcal{H}_2,$$

para f *e* v^1 *fixados. Assim, pela unicidade do par* $(v^1, v^2) \in \mathcal{H}$ *segue que (ii)* $\Rightarrow$ *(i).*

(ii) $\Leftrightarrow$ *(iii)*

A equivalência entre (i) e (ii) segue das expressões de J_i' $(i = 1, 2)$, *obtidas na demonstração do lema anterior.* $\square$

Agora, usaremos os fatos demonstrados acima para provarmos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash. Nesse sentido, vale o seguinte resultado:

Proposição 3.2 *Suponhamos que:*

$$\|1_{\mathcal{O}_{1,d}} L_2\|^2_{(1)} < 4\mu_2 \quad e \quad \|1_{\mathcal{O}_{2,d}} L_1\|^2_{(2)} < 4\mu_1, \tag{3.7}$$

onde $\|\|_{(i)}$ *denota a norma do espaço* $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{3-i}; L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)))$. *Então, o operador* $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, *definido por*

$$\mathbb{L}(v^1, v^2) = (L_1^*((L_1 v^1 + L_2 v^2) 1_{\mathcal{O}_{1,d}}) + \mu_1 v^1, L_2^*((L_1 v^1 + L_2 v^2) 1_{\mathcal{O}_{2,d}}) + \mu_2 v^2),$$

para todo $(v^1, v^2) \in \mathcal{H}$, *é um isomorfismo. Em particular, para cada* $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ *existe exatamente um equilíbrio de Nash* $(v^1(f), v^2(f))$.

Demonstração: *O item* (iii) *da Proposição 3.1 é equivalente a*

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (L_1 v^1 + L_2 v^2 - (z_{i,d} - u)) L_i \hat{v}^i dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} v^i \hat{v}^i dxdt = 0,$$
$$\forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i,\ \ i = 1, 2.$$

Considerando o operador $L_i^* \in \mathcal{L}(L^2(Q); \mathcal{H}_i)$, *adjunto de* L_i, *temos*

$$\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} L_i^*((L_1 v^1 + L_2 v^2 - (z_{i,d} - u))1_{\mathcal{O}_{i,d}}) \hat{v}^i dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} v^i \hat{v}^i dxdt = 0.$$
$$\forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i.$$

Consequentemente,

$$\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} \left(L_i^*((L_1 v^1 + L_2 v^2 - (z_{i,d} - u))1_{\mathcal{O}_{i,d}}) + \mu_i v^i\right) \hat{v}^i dxdt = 0, \forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i.$$

Portanto, $(v^1, v^2) \in \mathcal{H}$ *é um equilíbrio de Nash se, e somente se,*

$$L_i^*((L_1 v^1 + L_2 v^2)1_{\mathcal{O}_{i,d}}) + \mu_i v^i = L_i^*((z_{i,d} - u)1_{\mathcal{O}_{i,d}}) \text{ em } \mathcal{H}_i, \qquad i = 1, 2.$$

Dessa forma, para garantirmos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash para os funcionais custos definidos em (3.1) *é necessário e suficiente provarmos que existe uma única solução da equação*

$$\mathbb{L}(v^1, v^2) = \Psi,$$

onde $\Psi = (L_1^*((z_{1,d} - u)1_{\mathcal{O}_{1,d}}), L_2^*((z_{2,d} - u)1_{\mathcal{O}_{2,d}}))$.

Considerando em $\mathcal{H}$ *o produto interno* $\langle (v^1, v^2), (u^1, u^2) \rangle_{\mathcal{H}} = (v^1, u^1)_{\mathcal{H}_1} + (v^2, u^2)_{\mathcal{H}_2}$ *definimos a forma bilinear* $A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$A((v^1, v^2), (u^1, u^2)) = \langle \mathbb{L}(v^1, v^2), (u^1, u^2) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

A continuidade de A *segue da continuidade de* $\mathbb{L}$ *e do operador identidade de* $\mathcal{H}$. *Agora,* *mostraremos que A é coerciva. Com efeito, dado* $(v^1, v^2) \in \mathcal{H}$, *temos*

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{L}(v^1, v^2), (v^1, v^2)\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{i=1}^{2} (L_i^*((L_1 v^1 + L_2 v^2)1_{\mathcal{O}_{i,d}}) + \mu_i v^i, v^i)_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{2} (L_i^*(L_1 v^1 + L_2 v^2)1_{\mathcal{O}_{i,d}}), v^i)_{\mathcal{H}_i} + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} L_i^*((L_1 v^1 + L_2 v^2)1_{\mathcal{O}_{i,d}}) v^i dxdt + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} ((L_1 v^1 + L_2 v^2)1_{\mathcal{O}_{i,d}}) L_i(v^i) dxdt + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} (L_1 v^1 + L_2 v^2) L_i(v^i) dxdt + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} L_i v^i L_j v^j dxdt \right) + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} (L_i v^i, L_j v^j)_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |v^i|^2 dxdt \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left(\mu_i \|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i} + \|L_i v^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} \right) + \sum_{i=1}^{2} (L_{3-i} v^{3-i}, L_i v^i)_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Por outro lado, da desigualdade de Cauchy-Schwarz seguida da desigualdade de Young, em qualquer espaço de Hilbert H vale

$$-\frac{1}{2}(|a|^2_H + |b|^2_H) \leq -\langle a, b\rangle_H, \forall a, b \in H.$$

Usando esse fato obtemos

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{2} \left(\|L_i v^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} + \frac{1}{4} \|L_{3-i} v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} \right) \\
&\qquad = -\sum_{i=1}^{2} \left(\| - L_i v^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} + \left\| \frac{1}{2} L_{3-i} v^{3-i} \right\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} \right) \\
&\qquad \leq -2 \sum_{i=1}^{2} \left(-L_i v^i, \frac{1}{2} L_{3-i} v^{3-i} \right)_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{2} (L_i v^i, L_{3-i} v^{3-i})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{2} (L_i v^i, L_{3-i} v^{3-i})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \geq -\sum_{i=1}^{2} \left(\|L_i v^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} + \frac{1}{4} \|L_{3-i} v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} \right). \tag{3.9}$$

Somando $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\mu_i\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}+\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Bigg)$ *em ambos os membros da desigualdade* (3.9) *resulta que*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}+\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Big)+\sum_{i=1}^{2}(L_iv^i,L_{3-i}v^{3-i})_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}\\ \geq\sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}+\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Big)\\ -\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}+\frac{1}{4}\|L_{3-i}v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Bigg).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Comparando (3.8) *e* (3.10), *concluímos que*

$$\begin{aligned}\langle\mathbb{L}(v^1,v^2),(v^1,v^2)\rangle_{\mathcal{H}}\geq\sum_{i=1}^{2}\Big(\mu_i\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}+\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Big)\\ -\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\|L_iv^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}+\frac{1}{4}\|L_{3-i}v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\Bigg).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Em seguida, usando a continuidade dos operadores $L_i:\mathcal{H}_i\to L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)),\ i=1,2,$ *temos que*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{4}\|L_{3-i}v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}&=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{4}\|1_{\mathcal{O}_{i,d}}L_{3-i}v^{3-i}\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\\&\leq\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{4}\|1_{\mathcal{O}_{i,d}}L_{3-i}\|^2_{(i)}\|v^{3-i}\|^2_{\mathcal{H}_{3-i}}\\&=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{4}\|1_{\mathcal{O}_{3-i,d}}L_i\|^2_{(3-i)}\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}.\end{aligned}$$

Combinando a desigualdade acima com (3.11) *segue que*

$$\langle\mathbb{L}(v^1,v^2),(v^1,v^2)\rangle_{\mathcal{H}}\geq\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\mu_i-\frac{1}{4}\|1_{\mathcal{O}_{3-i,d}}L_i\|^2_{(3-i)}\Bigg)\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}.\tag{3.12}$$

Tomando $\gamma=min\{\mu_i-\frac{1}{4}\|1_{\mathcal{O}_{3-i,d}}L_i\|^2_{(3-i)}\},i=1,2,$ *segue da hipótese* (3.7) *que* $\gamma>0$, *e portanto,*

$$\langle\mathbb{L}(v^1,v^2),(v^1,v^2)\rangle_{\mathcal{H}}\geq\gamma\sum_{i=1}^{2}\|v^i\|^2_{\mathcal{H}_i}=\gamma\|(v^1,v^2)\|^2_{\mathcal{H}},\forall\ (v^1,v^2)\in\mathcal{H}.$$

Pelo Teorema de Lax-Milgran temos que, para cada $\Psi=(L_1^*((z_{1,d}-u)1_{\mathcal{O}_{1,d}}),L_2^*((z_{2,d}-u)1_{\mathcal{O}_{2,d}}))\in\mathcal{H}$, *existe um único* $(v^1,v^2)\in\mathcal{H}$ *tal que*

$$A((v^1,v^2),(u^1,u^2))=\langle\Psi,(u^1,u^2)\rangle_{\mathcal{H}},\forall\ (u^1,u^2)\in\mathcal{H}.$$

Portanto $\mathbb{L}(v^1,v^2)=\Psi$ *em* $\mathcal{H}$. □

Agora, vamos caracterizar o equilíbrio de Nash como solução do adjunto do sistema (3.3). Com efeito, multiplicando formalmente a primeira equação de (3.3) por uma função $\phi^i \in L^2(Q)$ e integrando em Q obtemos

$$\iint_Q z^i_{tt}\phi^i dxdt - \iint_Q \Delta z^i \phi^i dxdt + \iint_Q a(x,t) z^i \phi^i dxdt = \iint_Q \hat{v}^i 1_{\mathcal{O}_i} \phi^i dxdt.$$

Usando integração por partes na primeira integral e o fato de $L_i\hat{v}^i = z^i$ ser solução de (3.3), se impusermos que $\phi^i(x,T) = \phi^i_t(x,T) = 0$ em Ω, resulta que

$$\iint_Q \left(\phi^i_{tt} - \Delta\phi^i + a(x,t)\phi^i\right) L_i\hat{v}^i dxdt = \iint_Q \hat{v}^i 1_{\mathcal{O}_i}\phi^i dxdt. \tag{3.13}$$

Pela Proposição 3.1, $(v^1, v^2) \in \mathcal{H}$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (z - z_{i,d}) L_i \hat{v}^i dxdt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} v^i \hat{v}^i dxdt = 0, \forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1,2. \tag{3.14}$$

Por (3.13) e (3.14) podemos definir o seguinte sistema adjunto:

$$\begin{cases} \phi^i_{tt} - \Delta\phi^i + a(x,t)\phi^i = (z - z_{i,d})1_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \phi^i(x,T) = 0, \ \ \phi^i_t(x,T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.15) por $L_i\hat{v}^i$ e integrando em Q encontramos

$$\iint_Q \left(\phi^i_{tt} - \Delta\phi^i + a(x,t)\phi^i\right) L_i\hat{v}^i dxdt = \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} (z - z_{i,d}) L_i\hat{v}^i dxdt. \tag{3.16}$$

De (3.13), (3.14) e (3.16) segue que

$$\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)} (\phi^i + \mu_i v^i)\hat{v}^i dxdt = 0, \forall\ \hat{v}^i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 1,2. \tag{3.17}$$

Portanto, pelo Lema de Du Bois Raymond obtemos:

$$v^i = -\frac{1}{\mu_i}\phi^i|_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}, \quad i = 1,2. \tag{3.18}$$

Combinando essas novas informações com o sistema (2.9) temos:

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z + a(x,t)z = f1_{\mathcal{O}} - \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\mu_i}\phi^i 1_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\ \phi^i_{tt} - \Delta\phi^i + a(x,t)\phi^i = (z - z_{i,d})1_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ z = 0, \ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ z(\cdot,0) = z^0, \ z_t(\cdot,0) = z^1, \ \phi^i(\cdot,T) = 0, \ \phi^i_t(\cdot,T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

O sistema acima é conhecido na literatura como *sistema otimizado* relacionado ao problema de controlabilidade nula dado pelo Teorema 2.2.

3.2 O Adjunto do Sistema Otimizado

Com os fatos apresentados na seção anterior, demonstrar o Teorema 2.2 é equivalente a provarmos que o sistema de otimalidade (3.19) é nulamente controlável. Para isso, usaremos alguns argumentos de dualidade que reduzem a controlabilidade nula de um sistema linear à desigualdade de observalbilidade para as soluções do sistema adjunto associado. Vejamos qual será o sistema adjunto de (3.19).

Multiplicando formalmente a primeira equação de (3.19) por uma função $\psi : Q \to \mathbb{R}$, e integrando em Q, obtemos

$$\begin{aligned}\iint_Q z_{tt}\psi dxdt - \iint_Q \Delta z\psi dxdt + \iint_Q a(x,t)z\psi dxdt - \iint_Q f1_{\mathcal{O}}\psi dxdt \\ + \sum_{i=1}^{2}\iint_Q \frac{1}{\mu_i}\phi^i 1_{\mathcal{O}_i}\psi dxdt = 0.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Fazendo integração por partes na primeira integral de (3.20), utilizando o Teorema (1.11) e assumindo que $\psi = 0$ sobre Σ, segue que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega z_t(x,T)\psi(x,T)dx - \int_\Omega z_t(x,0)\psi(x,0)dx - \int_\Omega z(x,T)\psi_t(x,T)dx \\ &+ \int_\Omega z(x,0)\psi_t(x,0)dx + \iint_Q z\psi_{tt}dxdt - \iint_Q z\Delta\psi dxdt \\ &+ \iint_Q a(x,t)z\psi dxdt - \iint_Q f1_{\mathcal{O}}\psi dxdt + \sum_{i=1}^{2}\iint_Q \frac{1}{\mu_i}\phi^i 1_{\mathcal{O}_i}\psi dxdt = 0.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Analogamente, multiplicando formalmente a segunda equação de (3.19) por $\gamma^i : Q \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, e integrando em Q encontramos

$$\iint_Q \phi^i_{tt}\gamma^i dxdt - \iint_Q \Delta\phi^i\gamma^i dxdt + \iint_Q a(x,t)\phi^i\gamma^i dxdt - \iint_Q (z - z_{i,d})1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt = 0. \tag{3.22}$$

Fazendo integração por partes na primeira integral de (3.22), utilizando o Teorema (1.11) e assumindo que $\gamma^i = 0$ sobre Σ, vale que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi^i_t(x,T)\gamma^i(x,T)dx - \int_\Omega \phi^i_t(x,0)\gamma^i(x,0)dx - \int_\Omega \phi^i(x,T)\gamma^i_t(x,T)dx \\ &+ \int_\Omega \phi^i(x,0)\gamma^i_t(x,0)dx + \iint_Q \phi^i\gamma^i_{tt}dxdt - \iint_Q \phi^i\Delta\gamma^i dxdt \\ &+ \iint_Q a(x,t)\phi^i\gamma^i dxdt - \iint_Q z1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt + \iint_Q z_{i,d}1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt = 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Lembrando que $\phi^i(x,T)=\phi^i_t(x,T)=0$ em Ω, então de (3.23), resulta que

$$-\int_\Omega \phi^i_t(x,0)\gamma^i(x,0)dx+\int_\Omega \phi^i(x,0)\gamma^i_t(x,0)dx+\iint_Q \phi^i\gamma^i_{tt}dxdt-\iint_Q \phi^i\Delta\gamma^i dxdt$$
$$+\iint_Q a(x,t)\phi^i\gamma^i dxdt-\iint_Q z1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt+\iint_Q z_{i,d}1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt=0. \tag{3.24}$$

Somando as equações (3.21) e (3.24), com $i=1,2$ e evidenciando os termos adequadamente, segue que

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \left(\psi_{tt}-\Delta\psi+a(x,t)\psi-\sum_{i=1}^{2}\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}\right)zdxdt+\int_\Omega z_t(x,T)\psi(x,T)dx\\
&+\sum_{i=1}^{2}\iint_Q\left(\gamma^i_{tt}-\Delta\gamma^i+a(x,t)\gamma^i+\frac{1}{\mu_i}\psi 1_{\mathcal{O}_i}\right)\phi^i dxdt-\int_\Omega z_t(x,0)\psi(x,0)dx\\
&-\int_\Omega z(x,T)\psi_t(x,T)dx+\int_\Omega z(x,0)\psi_t(x,0)dx+\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \phi^i(x,0)\gamma^i_t(x,0)dx\\
&-\iint_Q f1_{\mathcal{O}}\psi dxdt-\sum_{i=1}^{2}\int_\Omega \phi^i_t(x,0)\gamma^i(x,0)dx+\sum_{i=1}^{2}\iint_Q z_{i,d}1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt=0.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Assumindo que $\psi(x,T),\psi(x,0)\in L^2(\Omega);\psi_t(x,T),\psi_t(x,0)\in H^{-1}(\Omega);\ \gamma^i(x,0)=\gamma^i_t(x,0)=0$ em $\Omega, i=1,2,$ concluímos que o *sistema adjunto* de (3.19) é:

$$\begin{cases}
\psi_{tt}-\Delta\psi+a(x,t)\psi=\sum_{i=1}^{2}\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q,\\
\gamma^i_{tt}-\Delta\gamma^i+a(x,t)\gamma^i=-\dfrac{1}{\mu_i}\psi 1_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q,\\
\psi=0,\gamma^i=0 & \text{sobre } \Sigma,\\
\psi(x,T)=\psi^T_0,\ \psi_t(x,T)=\psi^T_1,\ \gamma^i(x,0)=0,\ \gamma^i_t(x,0)=0 & \text{em } \Omega.
\end{cases} \tag{3.26}$$

Feitas essas hipóteses, em vista do sistema (3.26), a expressão (3.25) transforma-se em

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega z_t(x,T)\psi^T_0(x)dx-\left\langle\psi^T_1,z(T)\right\rangle-\int_\Omega z^1(x)\psi(x,0)dx+\left\langle\psi_t(0),z^0\right\rangle\\
&\qquad-\iint_Q f1_{\mathcal{O}}\psi dxdt+\sum_{i=1}^{2}\iint_Q z_{i,d}1_{\mathcal{O}_{i,d}}\gamma^i dxdt=0,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

onde $\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle$ denota a dualidade entre os espaços $H^{-1}(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega)$.

A igualdade acima fornece uma relação entre os sistemas (3.19) e (3.26). Essa relação é essencial, de acordo com o método da unicidade de Hilbert, para caracterizarmos a controlabilidade do sistema (3.19) como uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto (3.26). O próximo capítulo é dedicado a estudar essa desigualdade de observabilidade.

Capítulo 4

Desigualdade de Observabilidade

Este capítulo é destinado a estudarmos a desigualdade de observabilidade, de acordo com o método da unicidade de Hilbert, que é fundamental para provarmos o problema de controlabilidade nula e consequentemente o Teorema 2.2, que será tratado no próximo capítulo. Para este propósito, utilizaremos uma Desiguladade de Carleman conforme veremos na demonstração da mesma. Mais precisamente, vale o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *(Desigualdade de Observabilidade) Suponhamos que vale* (2.7) *e que* $T > 2R_1$*, onde* R_1 *é dado por* (2.6)*. Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que para todo* $(\psi_0^T, \psi_1^T) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$*, a solução associada* $(\psi, \gamma^1, \gamma^2)$ *de* (3.26) *satisfaz*

$$E_\psi(0) + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |\gamma^i|^2 dxdt \leq C \iint_{\mathcal{O} \times (0,T)} |\psi|^2 dxdt, \tag{4.1}$$

onde

$$E_\psi(t) := \frac{1}{2} \left[\|\psi(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_t(.,t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \right].$$

Demonstração: *A prova é baseada nos argumentos contidos nos trabalhos de Duyckaerts et. al [6] e Fu et. al [8], respectivamente. Para isso, introduzamos a função* $\varphi : Q \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi(x,t) := d(x) - c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2, \tag{4.2}$$

onde $c \in (0,1)$*. Suponhamos que vale* (2.7) *e seja*

$$\omega := \mathcal{O}_\delta(\Gamma_+) \cap \Omega \subset \mathcal{O} \tag{4.3}$$

Então, existe $\lambda_0 > 0$ *tal que para qualquer* $\lambda \geq \lambda_0$ *e para qualquer função* $u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$

satisfazendo

$$\begin{aligned} &u(.,0) = u(.,T) = 0, \quad u_{tt} - \Delta u \in H^{-1}(Q), \\ &\big(u, \eta_{tt} - \Delta\eta\big)_{L^2(Q)} = \big\langle u_{tt} - \Delta u, \eta\big\rangle_{H^{-1}(Q)\times H_0^1(Q)} \quad \forall \eta \in H_0^1(Q), \end{aligned} \tag{4.4}$$

vale a Desigualdade de Carlemam

$$\lambda \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|u|^2 \, dxdt \leq C \left(\|e^{\lambda\varphi}(u_{tt} - \Delta u)\|^2_{H^{-1}(Q)} + \lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|u|^2 \, dxdt \right), \tag{4.5}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de λ e u. A prova pode ser encontrada nas referências já mencionadas. Por questão de completude do trabalho também reproduzimos no Apêndice (A).

Como por hipótese $T > 2R_1$, então podemos escolher c em (4.2) *tal que*

$$\left(\frac{2R_1}{T}\right)^2 < c < \frac{2R_1}{T}. \tag{4.6}$$

Definamos

$$T_i := \frac{T}{2} - \epsilon_i T; \quad e \quad T_i' := \frac{T}{2} + \epsilon_i T, \quad i = 0, 1, \tag{4.7}$$

onde ϵ_i satisfaz que $0 < \epsilon_0 < \epsilon_1 < \dfrac{1}{2}$ e, além disso, suponhamos que

1. *ϵ_1 é suficientemente próximo de $\dfrac{1}{2}$ para garantirmos que*

$$\varphi(x,t) \leq \frac{R_1^2}{2} - c\frac{T^2}{8} < 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [(0, T_1) \cup (T_1', T)]. \tag{4.8}$$

De fato, de (4.2) *temos que:*

$$\varphi(x,t) = |x - x_0|^2 - c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

Daí,

$$\begin{aligned} 2\varphi(x,t) &= 2\Big(|x - x_0|^2 - c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2\Big) \\ &\leq \ 2R_1^2 - 2c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2 = R_1^2 + R_1^2 - 2c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2 \\ &< \ R_1^2 + c\frac{T^2}{4} - 2c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2, \end{aligned}$$

pois $\left(\dfrac{2R_1}{T}\right)^2 < c$ implica $R_1^2 < c\dfrac{T^2}{4}$.

Assim, considerando $T_1 = \dfrac{T}{2} - \epsilon_1 T$ e $T_1' = \dfrac{T}{2} + \epsilon_1 T$, temos que

$$2\varphi(x,t) < R_1^2 + c\frac{T^2}{4} - 2c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2 \ \ \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T),$$

o que vale em particular para todo $t \in (0,T_1) \cup (T_1',T)$. *Tomando* $t = \dfrac{T}{2} \pm \epsilon T$ *segue que*

$$2\varphi(x,t) < R_1^2 + c\frac{T^2}{4} - 2c\Big(\frac{T}{2} \pm \epsilon T - \frac{T}{2}\Big)^2 = R_1^2 + c\frac{T^2}{4} - 2c\epsilon^2 T^2, \ \ \forall \epsilon \in \Big(0, \frac{1}{2}\Big).$$

Fazendo $\epsilon \to \dfrac{1}{2}$, *existe* $\epsilon_1 < \dfrac{1}{2}$ *tal que*

$$2\varphi(x,t) \leq R_1^2 + c\frac{T^2}{4} - 2c\frac{T^2}{4} = R_1^2 - c\frac{T^2}{4} < 0 \quad \forall t \in (0,T_1) \cup (T_1',T),$$

e assim, obtemos

$$\varphi(x,t) \leq \frac{R_1^2}{2} - c\frac{T^2}{8} < 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times [(0,T_1) \cup (T_1',T)].$$

2. ϵ_0 *é suficientemente próximo de* 0 *para termos*

$$\varphi(x,t) \geq \frac{R_0^2}{2} \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (T_0,T_0'). \tag{4.9}$$

Com efeito, de (4.2) *temos que:*

$$\varphi(x,t) = |x - x_0|^2 - c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

Considerando $T_0 = \dfrac{T}{2} - \epsilon_0 T$ *e* $T_0' = \dfrac{T}{2} + \epsilon_0 T$, *obtemos que*

$$\varphi(x,t) \geq R_0^2 - c\Big(t - \frac{T}{2}\Big)^2 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T),$$

o que vale em particular para todo $t \in (T_0,T_0')$. *Tomando* $t = \dfrac{T}{2} \pm \epsilon T$ *segue que*

$$\varphi(x,t) \geq R_0^2 - c\Big(\frac{T}{2} \pm \epsilon T - \frac{T}{2}\Big)^2 = R_0^2 - cT^2\epsilon^2.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, *existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que*

$$\varphi(x,t) \geq R_0^2 > \frac{R_0^2}{2} \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (T_0,T_0').$$

Consideremos uma função $\xi \in C_0^\infty(0,T)$ *tal que* $\xi(t) \equiv 1$ *em* (T_1,T_1') *e* $0 \leq \xi \leq 1$. *Então,* $(\widetilde{\psi}, \widetilde{\gamma}^1, \widetilde{\gamma}^2) = (\xi\psi, \xi\gamma^1, \xi\gamma^2)$ *é a única solução do sistema*

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{tt} - \Delta\tilde{\psi} + a(x,t)\tilde{\psi} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}} + 2\xi_t\psi_t + \xi_{tt}\psi & em\ Q, \\ \tilde{\gamma}^i_{tt} - \Delta\tilde{\gamma}^i + a(x,t)\tilde{\gamma}^i = -\dfrac{1}{\mu_i}\xi\psi 1_{\mathcal{O}_i} + 2\xi_t\gamma^i_t + \xi_{tt}\gamma^i & em\ Q, \\ \tilde{\psi} = 0, \ \ \tilde{\gamma}^i = 0 & sobre\ \Sigma, \\ (\widetilde{\psi}, \tilde{\psi}_t)(.,T) = (\tilde{\gamma}^i, \tilde{\gamma}^i_t)(.,0) = 0 & em\ \Omega. \end{cases} \tag{4.10}$$

De fato, como $(\psi, \gamma^1, \gamma^2)$ *é solução de* (3.26)*, para* $\widetilde{\psi} = \xi\psi$ *na primeira linha do sistema* (4.10)*, temos:*

$$
\begin{aligned}
&(\xi\psi)_{tt} - \Delta\xi\psi + a(x,t)\xi\psi \\
&= (\xi_{tt}\psi + 2\xi_t\psi_t + \xi\psi_{tt}) - \xi\Delta\psi + a(x,t)\xi\psi \\
&= \xi(\psi_{tt} - \Delta\psi + a(x,t)\psi) + 2\xi_t\psi_t + \xi_{tt}\psi \\
&= \xi\sum_{i=1}^{2}\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}} + 2\xi_t\psi_t + \xi_{tt}\psi.
\end{aligned}
$$

Analogamente, tomando a segunda linha do sistema (4.10) *e para* $\widetilde{\gamma}^i = \xi\gamma^i$*, temos:*

$$
\begin{aligned}
&(\xi\gamma^i)_{tt} - \Delta\xi\gamma^i + a(x,t)\xi\gamma^i \\
&= (\xi_{tt}\gamma^i + 2\xi_t\gamma^i_t + \xi\gamma^i_{tt}) - \xi\Delta\gamma^i + a(x,t)\xi\gamma^i \\
&= \xi(\gamma^i_{tt} - \Delta\gamma^i + a(x,t)\gamma^i) + 2\xi_t\gamma^i_t + \xi_{tt}\gamma^i \\
&= -\xi\frac{1}{\mu_i}\psi 1_{\mathcal{O}_i} + 2\xi_t\gamma^i_t + \xi_{tt}\gamma^i.
\end{aligned}
$$

Assim, observando o sistema adjunto (3.26) *e da definição de* ξ *concluímos que* $(\widetilde{\psi}, \widetilde{\gamma}^1, \widetilde{\gamma}^2) = (\xi\psi, \xi\gamma^1, \xi\gamma^2)$ *é a única solução do sistema* (4.10)*.*

Como $\tilde{\psi} \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ *e satisfaz* (4.4)*, então podemos aplicar a Desigualdade de Carleman* (4.5) *para* $\tilde{\psi}$ *e assegurarmos que, para qualquer* $\lambda \geq \lambda_0$*, vale a seguinte estimativa:*

$$
\lambda\iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\widetilde{\psi}|^2\,dxdt \leq C\left(\|e^{\lambda\varphi}(\widetilde{\psi}_{tt} - \Delta\widetilde{\psi})\|^2_{H^{-1}(Q)} + \lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\widetilde{\psi}|^2\,dxdt\right)
$$

e por (4.10)*:*

$$
\begin{aligned}
\lambda\iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\xi\psi|^2\,dxdt \leq C\Bigg(&\left\|e^{\lambda\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}} + 2\xi_t\psi_t + \xi_{tt}\psi\Big)\right\|^2_{H^{-1}(Q)} \\
&+\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\,dxdt\Bigg).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Vamos analisar a norma da expressão (4.11)*:*

$$
\begin{aligned}
&\Big\|e^{\lambda\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}+2\xi_t\psi_t+\xi_{tt}\psi\Big)\Big\|_{H^{-1}(Q)}\\
&=\sup_{\|f\|_{H_0^1(Q)}=1}\Big\langle e^{\lambda\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}+2\xi_t\psi_t+\xi_{tt}\psi\Big),f\Big\rangle_{H^{-1}(Q)\times H_0^1(Q)}\\
&\leq \sup_{\|f\|_{H_0^1(Q)}=1}\Big\langle e^{\lambda\varphi}\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}},f\Big\rangle_{H^{-1}(Q)\times H_0^1(Q)}+\sup_{\|f\|_{H_0^1(Q)}=1}\Big\langle e^{\lambda\varphi}\Big(2\xi_t\psi_t+\xi_{tt}\psi\Big),f\Big\rangle_{H^{-1}(Q)\times H_0^1(Q)}\\
&=\sup_{\|f\|_{H_0^1(Q)}=1}\iint_Q e^{\lambda\varphi}\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}f\;dxdt+\sup_{\|f\|_{H_0^1(Q)}=1}\iint_Q e^{\lambda\varphi}\big(2\xi_t\psi_t+\xi_{tt}\psi\big)f\;dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Usando o Teorema de Imersão de Sobolev e a Desigualdade de Hölder, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\iint_Q |e^{\lambda\varphi}\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}f|\;dxdt &\leq \|e^{\lambda\varphi}\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}\|_{L^2(Q)}\|f\|_{L^2(Q)}\\
&\leq C\sum_{i=1}^{2}\|e^{\lambda\varphi}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}\|_{L^2(Q)}\|f\|_{H_0^1(Q)}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\sup_{\|f\|_{H_0^1(Q)}=1}\iint_Q e^{\lambda\varphi}\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}f\;dxdt\leq C\sum_{i=1}^{2}\|e^{\lambda\varphi}\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}\|_{L^2(Q)}. \tag{4.13}
$$

Também vale que:

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q e^{\lambda\varphi}\big(2\xi_t\psi_t+\xi_{tt}\psi\big)f\;dxdt\\
&=\iint_Q e^{\lambda\varphi}2\xi_t\psi_t f\;dxdt+\iint_Q e^{\lambda\varphi}\xi_{tt}\psi f\;dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Fazendo integração por partes, segue que

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q e^{\lambda\varphi}2\xi_t\psi_t f\;dxdt=\int_\Omega (e^{\lambda\varphi}2\xi_t\psi f)\;|_0^T\;\;dx-\iint_Q \psi(e^{\lambda\varphi}2\xi_t f)'\;dxdt\\
&=\int_\Omega [e^{\lambda\varphi}2\psi f\xi_t(T)-e^{\lambda\varphi}2\psi f\xi_t(0)]\;dx-\iint_Q \psi(e^{\lambda\varphi}2\xi_t f)'\;dxdt.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q e^{\lambda\varphi}2\xi_t\psi_t f\;dxdt=-\iint_Q \psi(e^{\lambda\varphi}2\xi_t f)'\;dxdt\\
&=-\iint_Q \psi[(e^{\lambda\varphi}2\xi_t)'f+(e^{\lambda\varphi}2\xi_t f_t)]\;dxdt\\
&=-\iint_Q \psi(e^{\lambda\varphi}2\lambda\varphi_t\xi_t f+e^{\lambda\varphi}2\xi_{tt}f+e^{\lambda\varphi}2\xi_t f_t)\;dxdt\\
&=-2\iint_Q e^{\lambda\varphi}\xi_{tt}\psi f\;dxdt-\iint_Q e^{\lambda\varphi}\psi(2\xi_t f_t+2\lambda\varphi_t\xi_t f)\;dxdt.
\end{aligned}
$$

Substituindo esta última expressão em (4.14), pela definição de ξ, e usando novamente o Teorema de Imersão de Sobolev e a Desigualdade de Hölder, deduzimos que

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q e^{\lambda\varphi}\big(2\xi_t\psi_t + \xi_{tt}\psi\big) f \, dxdt \\
&= -2\iint_Q e^{\lambda\varphi}\xi_{tt}\psi f \, dxdt - \iint_Q e^{\lambda\varphi}\psi(2\xi_t f_t + 2\lambda\varphi_t\xi_t f)\, dxdt \\
&+ \iint_Q e^{\lambda\varphi}\xi_{tt}\psi f \, dxdt \\
&= \iint_Q e^{\lambda\varphi}\psi(-\xi_{tt} f - 2\xi_t f_t - 2\lambda\varphi_t\xi_t f)\, dxdt \\
&= \iint_{\Omega\times(0,T_1)} e^{\lambda\varphi}\psi(-\xi_{tt} f - 2\xi_t f_t - 2\lambda\varphi_t\xi_t f)\, dxdt \\
&+ \iint_{\Omega\times(T_1',T)} e^{\lambda\varphi}\psi(-\xi_{tt} f - 2\xi_t f_t - 2\lambda\varphi_t\xi_t f)\, dxdt \\
&\leq \|e^{\lambda\varphi}\psi\|_{L^2(\Omega\times(0,T_1))}\| - \xi_{tt} f - 2\xi_t f_t - 2\lambda\varphi_t\xi_t f\|_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} \\
&+\|e^{\lambda\varphi}\psi\|_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\| - \xi_{tt} f - 2\xi_t f_t - 2\lambda\varphi_t\xi_t f\|_{L^2(\Omega\times(T_1',T))} \\
&\leq \|e^{\lambda\varphi}\psi\|_{L^2(\Omega\times(0,T_1))}\big(C_1\|f\|_{H_0^1(Q)} + C_2\|f\|_{H_0^1(Q)} + C_3\lambda\|f\|_{H_0^1(Q)}\big) \\
&+\|e^{\lambda\varphi}\psi\|_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\big(C_4\|f\|_{H_0^1(Q)} + C_5\|f\|_{H_0^1(Q)} + C_6\lambda\|f\|_{H_0^1(Q)}\big).
\end{aligned}
$$

Portanto, por (4.8)*:*

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\|f\|_{H_0^1(Q)}=1}\iint_Q e^{\lambda\varphi}(2\xi_t\psi t + \xi_{tt}\psi) f \, dxdt \\
&= \sup_{\|f\|_{H_0^1(Q)}=1}\iint_Q e^{\lambda\varphi}\psi(-\xi_{tt} f - 2\xi_t f_t - 2\lambda\varphi_t\xi_t f)\, dxdt \qquad (4.15)\\
&\leq Ce^{\left(R_1^2/2 - cT^2/8\right)\lambda}(1+\lambda)\Big(\|\psi\|_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big).
\end{aligned}
$$

Além disso, de (4.8) *e da definição de ξ, temos que*

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\xi\psi|^2\, dxdt = \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\xi|^2|\psi|^2\, dxdt - \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt + \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt \\
&= \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt - \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2(1-|\xi|^2)\, dxdt \\
&= \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt - \iint_{\Omega\times(0,T_1)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2(1-|\xi|^2)\, dxdt - \iint_{\Omega\times(T_1',T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2(1-|\xi|^2)\, dxdt \\
&\geq \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt - C_7 e^{2\lambda\varphi}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} - C_8 e^{2\lambda\varphi}\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt \leq \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\xi\psi|^2\, dxdt + Ce^{(R_1^2 - cT^2/4)\lambda}\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big).
$$

Multiplicando esta última desigualdade acima por $\lambda \geq 1$, obtemos $C > 0$ tal que:

$$
\begin{aligned}
&\lambda \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt \leq \lambda \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\xi\psi|^2 \, dxdt \\
&+\lambda C e^{(R_1^2 - cT^2/4)\lambda}\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big).
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Para as desigualdades (4.15) *e* (4.16) *consideramos a constante C maior que a soma de todas as constantes $C_j, j = 1, ..., 8$.*

Combinando (4.11) $-$ (4.16), *chegamos a*

$$
\begin{aligned}
&\lambda \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt \leq C\Big(\Big\|e^{\lambda\varphi}\big(\sum_{i=1}^{2}\xi\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}} + 2\xi_t\psi_t + \xi_{tt}\psi\big)\Big\|^2_{H^{-1}(Q)} \\
&+\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt\Big) + \lambda C e^{(R_1^2-cT^2/4)\lambda}\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big) \\
&\leq C\Bigg[C^2\sum_{i=1}^{2}\|e^{\lambda\varphi}\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}\|^2_{L^2(Q)} + C^2 e^{(R_1^2-cT^2/4)\lambda}(1+\lambda)^2\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big) \\
&+\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt + \lambda e^{(R_1^2-cT^2/4)\lambda}\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big)\Bigg] \\
&\leq C\Bigg[\sum_{i=1}^{2}\|e^{\lambda\varphi}\gamma^i 1_{\mathcal{O}_{i,d}}\|^2_{L^2(Q)} + \lambda^2 e^{(R_1^2-cT^2/4)\lambda}\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big) \\
&+\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt\Bigg].
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\lambda \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt \leq C\Bigg[&\lambda^2 e^{\left(R_1^2-cT^2/4\right)\lambda}\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big) \\
&+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\gamma^i|^2 \, dxdt + \lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt\Bigg],
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

onde C é uma constante positiva independente de λ.

De (4.17), *vale que*

$$
\begin{aligned}
\lambda \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt &+ \lambda\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2 \, dxdt \\
&\leq C\Bigg[\lambda^2 e^{\left(R_1^2-cT^2/4\right)\lambda}\Big(\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\Big) \\
&+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \big(\lambda e^{R_0^2\lambda} + e^{2\lambda\varphi}\big)|\gamma^i|^2 \, dxdt \\
&+\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

De (4.8) deduzimos que existe $\lambda_1 \geq \lambda_0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_1$, vale que $\lambda^2 e^{\left(R_1^2 - cT^2/4\right)} <$ 1. Consequentemente, para todo $\lambda \geq \lambda_1$, segue que

$$\begin{aligned}
&\lambda \iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt + \lambda \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2 \, dxdt \\
&\quad \leq C\Bigg[\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} \left(\lambda e^{R_0^2\lambda} + e^{2\lambda\varphi}\right)|\gamma^i|^2 \, dxdt \\
&\quad + \lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt\Bigg].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Notemos que, de (4.2), (4.6), e (4.9), resulta que

$$\iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt \geq e^{-R_1T\lambda}\|\psi\|^2_{L^2(Q)}, \tag{4.20}$$

e

$$\iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2 \, dxdt \geq e^{R_0^2\lambda} \iint_{\Omega\times(T_0,T_0')} |\psi|^2 \, dxdt. \tag{4.21}$$

Por outro lado, usando o método da energia usual ([8], Lemas 3.3 e 3.4), temos que para qualquer $S_0 \in \left(T_0, \dfrac{T}{2}\right)$ e $S_0' \in \left(\dfrac{T}{2}, T_0'\right)$, vale que

$$E_\psi(t) \leq C\left(\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')} |\psi|^2 \, dxdt + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(T_0,T_0')} |\gamma^i|^2 \, dxdt\right) \tag{4.22}$$

para todo $t \in (S_0, S_0')$, donde

$$\int_{S_0}^{S_0'} E_\psi(t) \, dt \leq C\left(\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')} |\psi|^2 \, dxdt + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(T_0,T_0')} |\gamma^i|^2 \, dxdt\right). \tag{4.23}$$

Também, novamente por ([8], Lema 3.3), resulta que

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times(0,T_1)} |\psi|^2 \, dxdt \leq \int_0^{T_1} E_\psi(t) \, dt \leq C\left(E_\psi(0) + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T_1)} |\gamma^i|^2 \, dxdt\right) \\
&\leq C\left(E_\psi(0) + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\gamma^i|^2 \, dxdt\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times(T_1',T)} |\psi|^2 \, dxdt \leq \int_{T_1'}^{T} E_\psi(t) \, dt \leq C\left(E_\psi(0) + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(T_1',T)} |\gamma^i|^2 \, dxdt\right) \\
&\leq C\left(E_\psi(0) + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\gamma^i|^2 \, dxdt\right).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}&\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))}+\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\\&\leq C\left(E_\psi(0)+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\,dx\,dt\right).\end{aligned}\tag{4.24}$$

Além disso, usando as mesmas ideias de (4.22) *e* (4.24), *encontramos que*

$$E_\psi(t)\leq C\left(E_\psi(S_0)+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,S_0)}|\gamma^i|^2dx\,dt\right)\quad\forall t\in(0,S_0),$$

e também

$$E_\psi(0)\leq C\left(E_\psi(t)+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(S_0,S_0')}|\gamma^i|^2\,dx\,dt\right)\quad\forall t\in(S_0,S_0'),$$

o que implica em

$$\begin{aligned}&\int_{S_0}^{S_0'}E_\psi(0)\,dt\leq C\left(\int_{S_0}^{S_0'}E_\psi(t)\,dt+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(S_0,S_0')}|\gamma^i|^2\,dx\,dt\right)\\&\Rightarrow E_\psi(0)\leq\frac{C}{|S_0'-S_0|}\left(\int_{S_0}^{S_0'}E_\psi(t)\,dt+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(S_0,S_0')}|\gamma^i|^2\,dxdt\right)\\&\Rightarrow E_\psi(0)\leq C\left(\int_{S_0}^{S_0'}E_\psi(t)\,dt+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\,dxdt\right).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Das estimativas de energia para γ^i, *utilizando a Desigualdade de Poincaré e Fórmulas de Green, obtemos que*

$$\|\gamma^i\|^2_{L^2(\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T))}\leq\frac{C}{\min{(\mu_1,\mu_2)^2}}\|\psi\|^2_{L^2(Q)}.\tag{4.26}$$

Combinando (4.23), (4.25) *e* (4.26), *segue que*

$$\begin{aligned}&E_\psi(0)\leq C\left(\int_{S_0}^{S_0'}E_\psi(t)\,dt+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\,dxdt\right)\\&\leq C\left(\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\,dxdt+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(T_0,T_0')}|\gamma^i|^2\,dxdt+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\,dxdt\right)\\&\leq C\left(\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\,dxdt+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\,dxdt\right)\\&\leq C\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\,dxdt+\frac{C}{\min{(\mu_1,\mu_2)^2}}\|\psi\|^2_{L^2(Q)}.\end{aligned}\tag{4.27}$$

De (4.24), (4.26) *e* (4.27), *vale que*

$$
\begin{aligned}
&\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\\
&\le C\left(E_\psi(0) + \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\,dxdt\right)\\
&\le C\left(C\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\,dxdt + \frac{C}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\,dxdt\right)\\
&\le C\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\,dxdt + \frac{C}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\|\psi\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Também, de (4.2) *e* (4.26), *temos que*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}(\lambda e^{R_0^2\lambda} + e^{2\lambda\varphi})|\gamma^i|^2\,dxdt\\
&\le \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}\lambda e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\,dxdt + \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}\lambda e^{2\lambda\varphi}|\gamma^i|^2\,dxdt\\
&\le \frac{C\lambda e^{2R_1^2\lambda}}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + \frac{C\lambda e^{2R_1^2\lambda}}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\|\psi\|^2_{L^2(Q)}\\
&= \frac{2C\lambda e^{2R_1^2\lambda}}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\|\psi\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

De (4.19), (4.20), (4.28) *e* (4.29), *vemos que*

$$
\begin{aligned}
\lambda\iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\,dxdt &+ \lambda\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\,dxdt\\
&\le C\Bigg[\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}\big(\lambda e^{R_0^2\lambda} + e^{2\lambda\varphi}\big)|\gamma^i|^2\,dxdt\\
&\quad + \lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)}e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\,dxdt\Bigg]
\end{aligned}
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
\lambda e^{-R_1T\lambda}\|\psi\|^2_{L^2(Q)} &+ \lambda\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\,dxdt\\
&\le C\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\,dxdt + \frac{C}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\|\psi\|^2_{L^2(Q)}\\
&\quad + \frac{2C\lambda e^{2R_1^2\lambda}}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + C\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)}e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\,dxdt
\end{aligned}
$$

e desse modo,

$$
\begin{aligned}
&\lambda e^{-R_1 T\lambda}\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + \lambda\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\, dxdt \\
&\qquad \le C\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\, dxdt + \frac{C}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\left(1+2\lambda e^{2R_1^2\lambda}\right)\|\psi\|^2_{L^2(Q)} \\
&\qquad + C\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt.
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

Isso vale para todo $\lambda \ge \lambda_1$*, onde* λ_1 *depende de* $\Omega, \mathcal{O}$*,* $\mathcal{O}_i$*,* $\mathcal{O}_{i,d}$*,* T *e* $\|a\|_{L^\infty(Q)}$*.*

Por outro lado, se $\lambda_2 \ge \lambda_1$ *satisfaz* $\lambda_2 e^{R_0^2\lambda_2} - C \ge 1$*, então de* (4.19), (4.21), (4.28) *e* (4.29)*, deduzimos que para todo* $\lambda \ge \lambda_2$*, teremos*

$$
\begin{aligned}
\lambda\iint_Q e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt &+ \lambda\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\, dxdt \\
&\le C\Bigg[\|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(0,T_1))} + \|\psi\|^2_{L^2(\Omega\times(T_1',T))} \\
&+ \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}\left(\lambda e^{R_0^2\lambda} + e^{2\lambda\varphi}\right)|\gamma^i|^2\, dxdt \\
&+ \lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt\Bigg]
\end{aligned}
$$

assim,

$$
\begin{aligned}
&\lambda e^{R_0^2\lambda}\iint_{\omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\, dxdt + \lambda\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\, dxdt \\
&\qquad \le C\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\, dxdt + \frac{C}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\left(1+2\lambda e^{2R_1^2\lambda}\right)\|\psi\|^2_{L^2(Q)} \\
&\qquad + C\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
&\left(\lambda e^{R_0^2\lambda} - C\right)\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\, dx\, dt + \lambda\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\, dx\, dt \\
&\qquad \le \frac{C}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\left(1+2\lambda e^{2R_1^2\lambda}\right)\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + C\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dx\, dt
\end{aligned}
$$

o que implica em

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Omega\times(T_0,T_0')}|\psi|^2\, dx\, dt + \lambda\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\, dx\, dt \\
&\qquad \le \frac{C}{\min(\mu_1,\mu_2)^2}\left(1+2\lambda e^{2R_1^2\lambda}\right)\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + C\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dx\, dt.
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

Substituindo (4.31) *em* (4.30), *nos conduz a*

$$\begin{aligned} &\lambda e^{-R_1 T\lambda}\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + \lambda \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} e^{R_0^2\lambda}|\gamma^i|^2\, dx\, dt \\ &\leq \frac{C}{\min{(\mu_1,\mu_2)^2}}\Big(1+2\lambda e^{2R_1^2\lambda}\Big)\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + C\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Agora, fixando $\lambda = \lambda_2$ *e tomando* μ_1 *e* μ_2 *suficientemente grande, obtemos que*

$$\frac{C}{\min{(\mu_1,\mu_2)^2}}\Big(1+2\lambda e^{2R_1^2\lambda}\Big) \leq \frac{\lambda}{2}e^{-R_1 T\lambda},$$

e assim, de (4.32), *vale que*

$$\frac{\lambda}{2}e^{-R_1 T\lambda}\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + \lambda e^{R_0^2\lambda}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\, dxdt \leq C\lambda^2 \iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt.$$

Considerando a constante $C_9 = min\left\{\frac{\lambda}{2}e^{-R_1 T\lambda}, \lambda e^{R_0^2}\lambda\right\}$, *resulta que*

$$\begin{aligned} &C_9\|\psi\|^2_{L^2(Q)} + C_9\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\, dxdt \leq C\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt \\ &\Rightarrow \|\psi\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\, dxdt \leq \frac{C}{C_9}\lambda^2\iint_{\omega\times(0,T)} e^{2\lambda\varphi}|\psi|^2\, dxdt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\psi\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2\, dxdt \leq C\iint_{\omega\times(0,T)}|\psi|^2\, dxdt \tag{4.33}$$

Agora, combinando (4.27) *e* (4.33), *deduzimos* (4.1) *e assim a prova está concluída.* □

Capítulo 5

Controlabilidade Nula

O objetivo principal deste capítulo é provar o Teorema 2.2. Para isso, utilizaremos a Desigualdade de Observabilidade vista no capítulo anterior.

5.1 Prova do Teorema 2.2

Consideremos a relação de igualdade dada em (3.27):

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big[z_t(x,T)\psi_0^T(x) - z^1(x)\psi(x,0) \Big] dx + \Big\langle \psi_t(0), z^0 \Big\rangle - \Big\langle \psi_1^T, z(T) \Big\rangle \\
&= \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} f\psi dxdt - \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

onde (z, ϕ^1, ϕ^2) e $(\psi, \gamma^1, \gamma^2)$ são as soluções de (3.19) e (3.26) associados aos dados iniciais (z^0, z^1) e (ψ_0^T, ψ_1^T), respectivamente. Assim, provar a controlabilidade nula é equivalente a encontrar, para cada $(z^0, z^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, um controle $f \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$ tal que, para todo $(\psi_0^T, \psi_1^T) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ se tenha

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} f\psi dxdt = &- \int_\Omega z^1(x)\psi(x,0)dx + \Big\langle \psi_t(0), z^0 \Big\rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Para isso, dado $\epsilon > 0$, consideremos o funcional $F_\epsilon : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned}
F_\epsilon(\psi_0^T, \psi_1^T) := &\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \epsilon \|(\psi_0^T, \psi_1^T)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \\
&+ \Big\langle\Big\langle (\psi(0), \psi_t(0)), (z^0, z^1) \Big\rangle\Big\rangle - \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde

$$\Big\langle\Big\langle(\psi(0),\psi_t(0)),(z^0,z^1)\Big\rangle\Big\rangle := \int_\Omega z^1(x)\psi(x,0)dx - \Big\langle \psi_t(0), z^0\Big\rangle.$$

O Lema seguinte nos fornece algumas propriedades de F_ϵ.

Lema 5.1.1 *O funcional $F_\epsilon : L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\to\mathbb{R}$, definido em (5.3) é contínuo, coercivo e estritamente convexo.*

Demonstração: *Com efeito, pelo Teorema 4.1, temos que*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\psi|^2dxdt+\epsilon\|(\psi_0^T,\psi_1^T)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\\
&\quad=\frac{1}{4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\psi|^2dxdt+\frac{1}{4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\psi|^2dxdt+\epsilon\|(\psi_0^T,\psi_1^T)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\\
&\quad\geq\frac{1}{4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}|\psi|^2dxdt+\epsilon\|(\psi_0^T,\psi_1^T)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}+\frac{1}{4C}E_\psi(0)\\
&\qquad+\frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{5.4}$$

Além disso, pela Desigualdade de Young, vale que

$$\begin{aligned}
\Big\langle\Big\langle(\psi(0),\psi_t(0)),(z^0,z^1)\Big\rangle\Big\rangle &= \int_\Omega\left(\sqrt{4C}z^1(x)\right)\left(\frac{\psi(x,0)}{\sqrt{4C}}\right)dx\\
&\quad-\Big\langle\frac{1}{\sqrt{4C}}\psi_t(0),\sqrt{4C}z^0(x)\Big\rangle\\
&\geq -2C\|z^1(x)\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{4C}\cdot\frac{1}{2}\|\psi(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\quad-\frac{1}{4C}\cdot\frac{1}{2}\|\psi_t(0)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}-2C\|z^0(x)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\\
&= -2C\|z^1(x)\|^2_{L^2(\Omega)}-2C\|z^0(x)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\\
&\quad-\frac{1}{4C}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\Big[\|\psi(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\psi_t(0)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\Big]}\\
&= -2C\|z^1(x)\|^2_{L^2(\Omega)}-2C\|z^0(x)\|^2_{H_0^1(\Omega)}-\frac{1}{4C}E_\psi(0),
\end{aligned}\tag{5.5}$$

e

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}z_{i,d}\gamma^i dxdt &= -\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}\left(\sqrt{2C}z_{i,d}\right)\left(\frac{\gamma^i}{\sqrt{2C}}\right)dxdt\\
&\geq -C\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|z_{i,d}|^2dxdt-\frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2dxdt.
\end{aligned}\tag{5.6}$$

Combinando (5.4) $-$ (5.6), *encontramos*

$$\begin{aligned}
F_\epsilon(\psi_0^T,\psi_1^T)&\geq\epsilon\|(\psi_0^T,\psi_1^T)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\\
&\quad-C\left(2\|z^1(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\|z^0(x)\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|z_{i,d}|^2dxdt\right).
\end{aligned}\tag{5.7}$$

Como o termo negativo do lado direito da desigualdade acima independe de (ψ_0^T, ψ_1^T)*, temos que* $F_\epsilon(\psi_0^T, \psi_1^T) \geq \tilde{\epsilon}\|(\psi_0^T, \psi_1^T)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$*, para* $\|(\psi_0^T, \psi_1^T)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$ *suficientemente grande, bastando tomar* $\tilde{\epsilon} = min\left\{\epsilon, \frac{1}{4}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2\, dxdt\right\}$*, e assim a coercividade de* F_ϵ *é garantida.*

Com um procedimento análogo ao que foi feito no capítulo 3, é possível mostrarmos que F_ϵ *é contínuo e estritamente convexo.* □

Mostraremos agora que existe um controle $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ que satisfaz a igualdade (5.2) para todo $(\psi_0^T, \psi_1^T) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Pelas propriedades de F_ϵ no Lema (5.1.1) acima, concluímos que existe um único mínimo $(\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T)$ para o funcional F_ϵ. Assim, temos duas possibilidades, $(\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T) = 0$ ou

$$\left\langle F'_\epsilon(\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T), (\psi_0^T, \psi_1^T)\right\rangle = 0, \quad \forall(\psi_0^T, \psi_1^T) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega). \tag{5.8}$$

Considerando o operador $L_\epsilon^i : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \to L^2(Q)$ dado por $L_\epsilon^i(\psi_0^T, \psi_1^T) = \gamma^i$, onde γ^i é solução de (3.26), reescrevemos (5.3) como sendo

$$\begin{aligned} F_\epsilon(\psi_0^T, \psi_1^T) := &\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \epsilon\|(\psi_0^T, \psi_1^T)\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \\ &+ \left\langle\left\langle(\psi(0), \psi_t(0)), (z^0, z^1)\right\rangle\right\rangle - \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d} L_\epsilon^i(\psi_0^T, \psi_1^T) dxdt, \end{aligned}$$

para todo $(\psi_0^T, \psi_1^T) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Notemos que, para $\|(\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T)\| \neq 0$, vale que

$$\begin{aligned} &\frac{F_\epsilon\Big((\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T) + \lambda(\psi_0^T, \psi_1^T)\Big) - F_\epsilon\Big((\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T)\Big)}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \left\langle\left\langle(\psi(0), \psi_t(0)), (z^0, z^1)\right\rangle\right\rangle \\ &\quad + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_\epsilon\psi dxdt - \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt \\ &\quad + \epsilon\cdot\frac{\|\big((\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T) + \lambda(\psi_0^T, \psi_1^T)\big)\| - \|(\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T)\|}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{2}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\psi|^2 dxdt + \left\langle\left\langle(\psi(0), \psi_t(0)), (z^0, z^1)\right\rangle\right\rangle \\ &\quad + \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_\epsilon\psi dxdt - \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt + \\ &\quad + \epsilon\cdot\frac{\|\big((\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T) + \lambda(\psi_0^T, \psi_1^T)\big)\|^2 - \|(\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T))\|^2}{\lambda} \\ &\quad \cdot\frac{1}{\|\big((\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T) + \lambda(\psi_0^T, \psi_1^T)\big)\| + \|(\psi_{\epsilon,0}^T, \psi_{\epsilon,1}^T)\|}. \end{aligned}$$

Logo, $\langle F'_\epsilon(\psi^T_{\epsilon,0},\psi^T_{\epsilon,1}),(\psi^T_0,\psi^T_1)\rangle = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_\epsilon\psi dxdt + \epsilon\left(\frac{(\psi^T_{\epsilon,0},\psi^T_{\epsilon,1})}{\|\psi^T_{\epsilon,0},\psi^T_{\epsilon,1})\|},(\psi^T_0,\psi^T_1)\right) + \left\langle\left\langle(\psi(0),\psi_t(0)),(z^0,z^1)\right\rangle\right\rangle \\ -\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt = 0,\end{aligned} \tag{5.9}$$

para todo $(\psi^T_0,\psi^T_1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, onde denotamos por $(\psi_\epsilon,\gamma^1_\epsilon,\gamma^2_\epsilon)$ a solução de (3.26), associada ao estado $(\psi^T_0,\psi^T_1) = (\psi^T_{\epsilon,0},\psi^T_{\epsilon,1})$.

Fazendo $f = f_\epsilon = \psi_\epsilon 1_{\mathcal{O}\times(0,T)}$ em (5.1), e denotando $(z_\epsilon,\phi^1_\epsilon,\phi^2_\epsilon)$ a solução correspodente de (3.19), obtemos

$$\begin{aligned}-\int_\Omega z^1(x)\psi(x,0)dx + \left\langle\psi_t(0),z^0\right\rangle = \iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}\psi_\epsilon\psi dxdt - \int_\Omega z_{\epsilon,t}(x,T)\psi^T_0(x)dx \\ + \left\langle\psi^T_1,z_\epsilon(T)\right\rangle - \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left\langle\left\langle(\psi(0),\psi_t(0)),(z^0,z^1)\right\rangle\right\rangle = &-\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}\psi_\epsilon\psi dxdt \\ &+ \left(z_{\epsilon,t}(x,T),\psi^T_0(x)\right)_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\ &- \left\langle\psi^T_1,z_\epsilon(T)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H^1_0(\Omega)} \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Definamos a dualidade entre os espaços $L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)$ por

$$\left\langle\left\langle(z_\epsilon(x,T),z_{\epsilon,t}(x,T)),(\psi^T_0,\psi^T_1)\right\rangle\right\rangle = \left(z_{\epsilon,t}(x,T),\psi^T_0\right)_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} - \left\langle\psi^T_1,z_\epsilon(x,T)\right\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}.$$

Desse modo, podemos reescrever (5.10) como sendo

$$\begin{aligned}\left\langle\left\langle(\psi(0),\psi_t(0)),(z^0,z^1)\right\rangle\right\rangle = &-\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)}\psi_\epsilon\psi dxdt \\ &+ \left\langle(z_\epsilon(x,T),z_{\epsilon,t}(x,T)),(\psi^T_0,\psi^T_1)\right\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Substituindo (5.11) em (5.9), temos que

$$\int_\Omega\left(\left(z_\epsilon(x,T),z_{\epsilon,t}(x,T)\right) + \frac{\epsilon}{\|(\psi^T_{\epsilon,0},\psi^T_{\epsilon,1})\|}(\psi^T_{\epsilon,0},\psi^T_{\epsilon,1})\right)(\psi^T_0,\psi^T_1)dx = 0, \tag{5.12}$$

para todo $(\psi^T_0,\psi^T_1)\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$.

Dessa forma, pelo Lema de Du Bois-Raymond, segue que

$$\big(z_\epsilon(x,T), z_{\epsilon,t}(x,T)\big) + \frac{\epsilon}{\|(\psi^T_{\epsilon,0}, \psi^T_{\epsilon,1})\|}(\psi^T_{\epsilon,0}, \psi^T_{\epsilon,1}) = 0$$

e portanto,

$$\|(z_\epsilon(\cdot,T)),(z_{\epsilon,t}(\cdot,T))\| \leq \epsilon. \tag{5.13}$$

Utilizando a relação (5.9), válida para todo $(\psi^T_0, \psi^T_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, e sabendo que para cada (ψ^T_0, ψ^T_1) existe ψ associada, tomemos $(\psi^T_0, \psi^T_1) = (\psi^T_{\epsilon,0}, \psi^T_{\epsilon,1})$ e assumimos que $\psi = \psi_\epsilon$ na primeira integral. Logo,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{O}\times(0,T)} \psi_\epsilon\psi_\epsilon \, dxdt + \epsilon\|(\psi^T_{\epsilon,0}, \psi^T_{\epsilon,1})\| + \Big\langle\Big\langle (\psi(0), \psi_t(0)), (z^0, z^1) \Big\rangle\Big\rangle \\
&-\sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt = 0.
\end{aligned}$$

Como $f_\epsilon = \psi_\epsilon$ em $\mathcal{O} \times (0,T)$, e utilizando a Desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned}
\|f_\epsilon\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} &= -\epsilon - \int_\Omega z^1(x)\psi(x,0)dx + \Big\langle \psi_t(0), z^0 \Big\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} z_{i,d}\gamma^i dxdt \\
&\leq \frac{C^2}{2}\sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |z_{i,d}|^2 dxdt + C^2 \int_\Omega |z^1(x)|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2C^2}\sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\gamma^i|^2 dxdt + \frac{1}{4C^2}\int_\Omega |\psi(x,0)|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{1}{4C^2}\|\psi_t(0)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + C^2\|z^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\
&= \frac{C^2}{2}\sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |z_{i,d}|^2 dxdt + C^2\|z^1\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{1}{2C^2}\sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\gamma^i|^2 dxdt + \frac{1}{4C^2}\|\psi(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{1}{4C^2}\|\psi_t(0)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + C^2\|z^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\
&\quad = \frac{C^2}{2}\sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |z_{i,d}|^2 dxdt + \frac{1}{2C^2}\sum_{i=1}^{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)} |\gamma^i|^2 dxdt \\
&\quad + C^2 \underbrace{\Big(\|z^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|z^1\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)} \\
&\quad + \frac{1}{2C^2}\cdot \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\|\psi(x,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_t(x,0)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\Big)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\|f_\epsilon\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq \frac{C^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|z_{i,d}|^2dxdt + \frac{1}{2C^2}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|\gamma^i|^2dxdt \\ + C^2\|(z^0,z^1)\|\|^2_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \frac{1}{2C^2}E_\psi(0),\end{aligned} \tag{5.14}$$

onde C representa a constante da desigualdade de observabilidade. Como $(\psi_\epsilon, \gamma^1_\epsilon, \gamma^2_\epsilon)$ é solução de (3.26), segue da desigualdade de observabilidade (4.1) que

$$\frac{1}{2C^2}\sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_i\times(0,T)}|\gamma^i|^2dxdt \leq \frac{1}{2}\|f_\epsilon\|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} - \frac{1}{2C^2}E_\psi(0). \tag{5.15}$$

Combinando (5.14) e (5.15) e organizando os termos concluímos que

$$\|f_\epsilon\|_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))} \leq C\left(\|(z^0,z^1)\|\|^2_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2}\iint_{\mathcal{O}_{i,d}\times(0,T)}|z_{i,d}|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.16}$$

De (5.16), temos que (f_ϵ) é uniformemente limitada em $L^2(\mathcal{O}\times(0,T))$ e assim, pelo Teorema 1.3, segue que (f_ϵ) possui uma subsequência que converge fracamente para alguma função $\hat{f} \in L^2(\mathcal{O}\times(0,T)$. Portanto, o associado z_ϵ satisfaz

$$(z_\epsilon(\cdot,T), z_{\epsilon,t}(\cdot,T)) \rightharpoonup (\hat{z}(\cdot,T), (\hat{z}_t(\cdot,T)) \tag{5.17}$$

em $H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)$ quando $\epsilon \to 0$, onde $(\hat{z}, \hat{\phi}^1, \hat{\phi}^2)$ é a solução de (3.19) associada a $\hat{f}$.

De (5.13) e (5.17), resulta que

$$\|(\hat{z}(\cdot,T)), \hat{z}_t(\cdot,T))\| \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\|(z_\epsilon(\cdot,T)), (z_{\epsilon,t}(\cdot,T))\| \leq \liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon = 0,$$

ou seja,

$$(\hat{z}(\cdot,T), \hat{z}_t(\cdot,T)) = 0.$$

Portanto, concluimos que $\hat{z}$ satisfaz (2.10) e a controlabilidade nula de (3.19) é satisfeita.

Apêndice A

O objetivo deste apêndice é provar a Desigualdade de Carleman (4.5) utilizada no capítulo (4). Antes, apresentaremos alguns resultados que serão utilizados na demonstração da mesma e que podem ser encontrados no trabalho de Fu et. al [8].

Dado $T > 0$, seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ com bordo Γ de classe $\in C^2$. Sejam ω um subconjunto não vazio e aberto de Ω, e $\mathcal{X}_\omega$ a função característica de ω. Denotamos $\sum_{i,j=1}^{n}$ e $\sum_{i=1}^{n}$ simplesmente por $\sum_{i,j}$ e $\sum_{i}$, respectivamente. Para simplificarmos as notações, usaremos que $y_i = y_{xi}$, onde x_i é a i-ésima coordenada de um ponto genérico $x = (x_1, ..., x_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Seja $a^{ij}(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ fixo, satisfazendo

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \ \forall x \in \overline{\Omega}, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{A.1}$$

e para alguma constante $\beta > 0$,

$$\sum_{i,j} a^{i,j}(x)\xi^i\xi^j \geq \beta\|\xi\|^2 \quad \forall (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \tag{A.2}$$

com $\xi = (\xi^1, ..., \xi^n)$.

Existe uma função $d(\cdot) \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo as seguintes condições:

(i). Para alguma constante $\mu_0 > 0$, vale que

$$\sum_{i,j} \left\{ \sum_{i'j'} \left[2a^{ij'}(a^{i'j}d_{i'})_{j'} - a^{ij}_{j'}a^{i'j'}d_{i'} \right] \right\} \xi^i\xi^j \geq \mu_0 \sum_{i,j} a^{ij}\xi^i\xi^j \quad \forall (x, \xi^1, ..., \xi^n) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n. \tag{A.3}$$

(ii). Não há ponto crítico da função $d(\cdot)$ em Ω, ou seja,

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \|\nabla d(x)\| > 0. \tag{A.4}$$

Consideremos a seguinte equação hiperbólica linear não homogênea:

$$\begin{cases} \mathcal{P}z = f & \text{em } Q, \\ z = 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \tag{A.5}$$

Definição A.1 *Dizemos que* $z \in L^2(Q)$ *é uma solução fraca para* (A.5) *se*

$$(z, \mathcal{P}\eta)_{L^2(Q)} = \int_0^T \langle f(t,\cdot), \eta(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\, dt \quad \forall \eta \in C_0^2((0,T); H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)).$$

Observemos que em (A.5), nenhuma condição inicial é especificada. Assim, podemos provar o seguinte resultado de regularidade para o sistema (A.5), cuja demonstração pode ser encontrada em [8] .

Lema A.0.1 *Sejam* $0 < t_1 < t_2 < T$, $f \in L^1(0,T; H^{-1}(\Omega))$, *e* $g \in L^2((t_1,t_2)\times\Omega)$ *dados. Suponha que* $z \in L^2(Q)$ *seja uma solução fraca para* (A.5) *e* $z = g$ *em* $(t_1,t_2)\times\Omega$. *Então* $z \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H^{-1}(\Omega))$, *e existe uma constante* $C > 0$ *dependendo apenas de* T, t_1, t_2, Ω *e* a^{ij}, *de modo que*

$$\|z\|_{C([0,T];L^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leq C\Big[\|f\|_{L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|g\|_{L^2((t_1,t_2)\times\Omega)}\Big]. \tag{A.6}$$

Vemos que g desempenha o papel de valor inicial para a solução fraca z.

Agora veremos um problema auxiliar de controle ideal. Fixamos φ como em (4.2), um parâmetro $\lambda > 0$ e uma função $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ satisfazendo $u(0,x) = u(T,x) = 0$ para $x \in \Omega$. Para qualquer $K > 1$, escolhemos uma função $\varrho(x) \equiv \varrho^K(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\min_{x\in\overline{\Omega}} \varrho(x) = 1$ de modo que (lembremos da condição (A.4) para ω):

$$\varrho(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \omega, \\ K & \text{para } \operatorname{dist}(x,\omega) \geq \dfrac{1}{\ln K}. \end{cases} \tag{A.7}$$

Em seguida, tomemos um inteiro qualquer $m \geq 3$, e seja $h = \dfrac{T}{m}$. Definamos

$$u_m^i \equiv u_m^i(x) \equiv u(ih,x), \quad \varphi_m^i \equiv \varphi_m^i(x) \equiv \varphi(ih,x), \quad i = 0,1,...,m. \tag{A.8}$$

Seja $\{(z_m^i, r_{1m}^i, r_{2m}^i, r_m^i)\}_{i=0}^m \in (H_0^1(\Omega)\times(L^2(\Omega))^3)^{m+1}$ satisfazendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{z_m^{i+1} - 2z_m^i + z_m^{i-1}}{h^2} - \sum\limits_{j_1,j_2}^n \partial_{x_{j_2}}(a^{j_1j_2}\partial_{x_{j_1}} z_m^i) & \\ = \dfrac{r_m^{i+1} - r_m^i}{h} + r_{2m}^i + \lambda u_m^i e^{2\lambda\varphi_m^i} + r_m^i, \quad (1 \leq i \leq m-1) & \text{em } \Omega, \\ z_m^i = 0 \quad (0 \leq i \leq m) & \text{sobre } \Gamma, \\ z_m^0 = z_m^m = r_{2m}^0 = r_{2m}^m = r_m^0 = r_m^m = 0, \quad r_{1m}^0 = r_{1m}^1 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{A.9}$$

Observemos que não assumimos r_{1m}^0 e r_{1m}^1 iguais a zero, em vez disso tomamos $r_{1m}^0 = r_{1m}^1$. Dentro do sistema (A.9), $(r_{1m}^i, r_{2m}^i, r_m^i) \in (L^2(\Omega))^3$ $(i = 0, 1, ..., m)$ podem ser considerados como controles. O conjunto das *sequências admissíveis* para (A.9) é definido como sendo

$$\mathcal{A}_{a,d} \triangleq \Big\{ \{(z_m^i, r_{1m}^i, r_{2m}^i, r_m^i)\}_{i=0}^m \in (H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^3)^{m+1} \mid \\ \{(z_m^i, r_{1m}^i, r_{2m}^i, r_m^i)\}_{i=0}^m \text{ satisfazendo (A.9)} \Big\}.$$

Se $\{(0, 0, 0, -\lambda u_m^i e^{\lambda\varphi_m^i})\}_{i=0}^m \in \mathcal{A}_{a,d}$, temos que $\mathcal{A}_{a,d} \neq \emptyset$.

Agora, apresentemos o seguinte custo funcional

$$J(\{(z_m^i, r_{1m}^i, r_{2m}^i, r_m^i)\}_{i=0}^m) = \frac{h}{2} \int_\Omega \varrho \frac{\|r_{1m}^m\|^2}{\lambda^2} e^{-2\lambda\varphi_m^m}\, dx \\ + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \left[\int_\Omega \|z_m^i\|^2 e^{-2\lambda\varphi_m^i}\, dx + \int_\Omega \varrho \left(\frac{\|r_{1m}^i\|^2}{\lambda^2} + \frac{\|r_{2m}^i\|^2}{\lambda^4} \right) e^{-2\lambda\varphi_m^i}\, dx + K \int_\Omega \|r_m^i\|^2\, dx \right] \tag{A.10}$$

Consideremos o seguinte problema de controle ideal:
Devemos encontrar um $\{(\hat{z}_m^i, \hat{r}_{1m}^i, \hat{r}_{2m}^i, \hat{r}_m^i)\}_{i=0}^m \in \mathcal{A}_{a,d}$ de tal modo que

$$J(\{(\hat{z}_m^i, \hat{r}_{1m}^i, \hat{r}_{2m}^i, \hat{r}_m^i)\}_{i=0}^m) = \min_{(z_m^i, r_{1m}^i, r_{2m}^i, r_m^i)\}_{i=0}^m \in \mathcal{A}_{a,d}} J(\{(z_m^i, r_{1m}^i, r_{2m}^i, r_m^i)\}_{i=0}^m). \tag{A.11}$$

Notemos que para qualquer $\{(z_m^i, r_{1m}^i, r_{2m}^i, r_m^i)\}_{i=0}^m \in \mathcal{A}_{a,d}$, pelos resultados de regularidade padrão de equações elípticas, tem-se que $z_m^i \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Os seguintes resultados tem um papel crucial na prova da Desigualdade de Carleman (4.5), aqui apresentada no Teorema (A.2).

Proposição A.1 *Para qualquer $K > 1$ e $m \geq 3$, o problema* (A.11) *admite uma única solução $\{(\hat{z}_m^i, \hat{r}_{1m}^i, \hat{r}_{2m}^i, \hat{r}_m^i)\}_{i=0}^m \in \mathcal{A}_{a,d}$ (que depende de K). Além disso, para*

$$p_m^i \equiv p_m^i(x) \triangleq K\hat{r}_m^i, \quad 0 \leq i \leq m \tag{A.12}$$

temos

$$\hat{z}_m^0 = \hat{z}_m^m = p_m^0 = p_m^m = 0 \text{ em } \Omega,\ \hat{z}_m^i, p_m^i \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ para } 1 \leq i \leq m-1, \tag{A.13}$$

e as seguintes condições de otimização são mantidas:

$$\begin{cases} \dfrac{p_m^i - p_m^{i-1}}{h} + \varrho \dfrac{\hat{r}_{1m}^i}{\lambda^2} e^{-2\lambda\varphi_m^i} = 0 & \text{em } \Omega, \\ p_m^i - \varrho \dfrac{\hat{r}_{2m}^i}{\lambda^4} e^{-2\lambda\varphi_m^i} = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m, \tag{A.14}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{p_m^{i+1} - 2p_m^i + p_m^{i-1}}{h^2} + \sum\limits_{j_1,j_2=1}^{n} \partial_{x_{j_2}}(a^{j_1 j_2}\partial_{x_{j_1}} p_m^i) + \hat{z}_m^i e^{-2\lambda\varphi_m^i} = 0 & \text{em } \Omega, \\ p_m^i = 0 & \text{sobre } \Gamma, \\ 1 \leq i \leq m-1. \end{cases} \tag{A.15}$$

Além disso, existe uma constante $C = C(K,\lambda) > 0$, independente de m, tal que

$$h\sum_{i=1}^{m-1}\int_\Omega \left[\|\hat{z}_m^i\|^2 + \|\hat{r}_m^i\|^2 + \|\hat{r}_{2m}^i\|^2 + K\|\hat{r}_m^i\|^2\right] dx + h\int_\Omega \|\hat{r}_{1m}^m\|^2\, dx \leq C, \tag{A.16}$$

e

$$h\sum_{i=0}^{m-1}\int_\Omega \left[\frac{(\hat{z}_m^{i+1} - \hat{z}_m^i)^2}{h^2} + \frac{(\hat{r}_{1m}^{i+1} - \hat{r}_{1m}^i)^2}{h^2} + \frac{(\hat{r}_{2m}^{i+1} - \hat{r}_{2m}^i)^2}{h^2} + K\frac{(\hat{r}_m^{i+1} - \hat{r}_m^i)^2}{h^2}\right] dx \leq C. \tag{A.17}$$

A prova da Proposição (A.1) *pode ser vista no apêndice C de [8].*

Teorema A.1 *Tomemos $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo* (A.1) *e* (A.2)*, e sejam válidas as condições* (A.3) *e* (A.4)*. Então existe um $\lambda_0 > 1$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\mathcal{P}u \in L^2(Q)$, vale*

$$\begin{aligned} &\lambda \iint_Q (\lambda^2 u^2 + u_t^2 + \|\nabla u\|^2) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \\ &\leq C\left[\|e^{\lambda\varphi}\mathcal{P}u\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda^2 \iint_{(0,T)\times\omega} (\lambda^2 u^2 + u_t^2) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt\right]. \end{aligned}$$

A prova do Teorema (A.1) *encontra-se no apêndice B de [8].*

Teorema A.2 *Tomemos $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfazendo* (A.1) *e* (A.2)*, e sejam válidas as condições* (A.3) *e* (A.4)*. Então, para qualquer $\lambda \geq \lambda_0 \geq 1$, e qualquer $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ satisfazendo $u(0,x) = u(T,x) = 0$ para $x \in \Omega$, $\mathcal{P}u \in H^{-1}(Q)$, e*

$$(u, \mathcal{P}\eta)_{L^2(Q)} = \langle \mathcal{P}, \eta\rangle_{H^{-1}(Q)\times H_0^1(Q)}\ \forall \eta \in H_0^1(Q) \text{ com } \mathcal{P}\eta \in L^2(Q), \tag{A.18}$$

temos que

$$\lambda \iint_Q u^2 e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \leq C\left(\|e^{\lambda\varphi}\mathcal{P}u\|_{H^{-1}(Q)}^2 + \lambda^2 \iint_{(0,T)\times\omega} u^2 e^{2\lambda\varphi}\, dxdt\right), \tag{A.19}$$

onde φ é o mesmo que no Teorema (A.1).

Demonstração: *A ideia principal é aplicar* (A.18) *a algum η especial com $\mathcal{P}\eta = ... + \lambda u e^{2\lambda\varphi}$ que produz o termo desejado $\lambda \iint_Q u^2 e^{2\lambda\varphi}\, dxdt$ e reduz a estimativa para $\|\eta\|_{H_0^1(Q)}$. Devemos empregar a proposição* (A.1) *para fornecer o η desejado. Dividimos a prova em etapas.*

Etapa 1.

Primeiro, recuperemos as funções $(\hat{z}_m^i, \hat{r}_{1m}^i, \hat{r}_{2m}^i, \hat{r}_m^i)_{i=0}^m$ *na Proposição* (A.1). *Definamos*

$$\tilde{z}^m(t,x) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{m-1}\Big[(t-ih)\hat{z}_m^{i+1}(x) - \Big(t-(i+1)h\Big)\hat{z}_m^i(x)\Big]\mathcal{X}_{[ih,(i+1)h]}(t),$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_1^m(t,x) &= \hat{r}_{1m}^0(x)\mathcal{X}_{\{0\}}(t)\\ &\quad + \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{m-1}\Big[(t-ih)\hat{r}_{1m}^{i+1}(x) - \Big(t-(i+1)h\Big)\hat{r}_{1m}^i(x)\Big]\mathcal{X}_{[ih,(i+1)h]}(t),\\ \tilde{r}_2^m(t,x) &= \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{m-1}\Big[(t-ih)\hat{r}_{2m}^{i+1}(x) - \Big(t-(i+1)h\Big)\hat{r}_{2m}^i(x)\Big]\mathcal{X}_{[ih,(i+1)h]}(t),\\ \tilde{r}^m(t,x) &= \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{m-1}\Big[(t-ih)\hat{r}_m^{i+1}(x) - \Big(t-(i+1)h\Big)\hat{r}_m^i(x)\Big]\mathcal{X}_{[ih,(i+1)h]}(t).\end{aligned}$$

De (A.16) *e* (A.17), *podemos encontrar uma subsequência de* $(\tilde{z}^m, \tilde{r}_1^m, \tilde{r}_2^m, \tilde{r}^m)$ *que converge fracamente para algum* $(\tilde{z}, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}) \in (H^1(0,T;L^2(\Omega)))^4$, *com* $m \to \infty$.

Para qualquer constante $K > 1$, *tomemos*

$$\tilde{p} \triangleq K\tilde{r}.$$

No que segue, escolheremos K *para ser suficientemente grande (ver* (A.36) *mais adiante). Por* (A.14) − (A.17), *e observando o Lemma* (A.0.1), *veremos que*

$$\tilde{z}, \tilde{p} \subset C([0,T];H_0^1(\Omega)) \in C^1([0,T];L^2(\Omega)),$$

e

$$\begin{cases}\mathcal{P}\tilde{z} = \tilde{r}_{1,t} + \tilde{r}_2 + \lambda u e^{2\lambda\varphi} + \tilde{r} & \textit{em } Q,\\ \mathcal{P}\tilde{p} + \tilde{z}e^{-2\lambda\varphi} = 0 & \textit{em } Q,\\ \tilde{p} = \tilde{z} = 0 & \textit{sobre } \Sigma,\\ \tilde{p}(0) = \tilde{p}(T) = \tilde{z}(0) = \tilde{z}(T) = 0 & \textit{em } \Omega,\\ \tilde{p}_t + \varrho\dfrac{\tilde{r}_1}{\lambda^2}e^{-2\lambda\varphi} = 0 & \textit{em } Q,\\ \tilde{p} - \varrho\dfrac{\tilde{r}_2}{\lambda^4}e^{-2\lambda\varphi} = 0 & \textit{em } Q.\end{cases} \tag{A.20}$$

Etapa 2.

Aplicando o Teorema (A.1) *a* $\tilde{p}$ *em* (A.20), *obtemos que*

$$\begin{aligned}
&\lambda \iint_Q (\lambda^2 \tilde{p}^2 + \tilde{p}_t^2 + \|\nabla \tilde{p}\|^2) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \\
&\leq C\Big[\iint_Q \tilde{z}^2 e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt + \lambda^2 \iint_{(0,T)\times\omega} (\lambda^2 \tilde{p}^2 + \tilde{p}_t^2) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \Big] \\
&= C\Big[\iint_Q \tilde{z}^2 e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt + \iint_{(0,T)\times\omega} \Big(\lambda^4 \varrho^2 \frac{\tilde{r}_2^2}{(\lambda^4)^2} e^{-4\lambda\varphi} + \lambda^2 \varrho^2 \frac{\tilde{r}_1^2}{\lambda^4} e^{-4\lambda\varphi} \Big) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \Big] \\
&\leq C\Big[\iint_Q \tilde{z}^2 e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt + \iint_{(0,T)\times\omega} \Big(\frac{\tilde{r}_1^2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^4} \Big) e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt \Big].
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Daqui em diante C *é uma constante independente de* K *e* λ. *Por* (A.20) *novamente, concluímos que* $\tilde{p}_t$ *satisfaz*

$$\begin{cases}
\mathcal{P}\tilde{p}_t + (\tilde{z} e^{-2\lambda\varphi})_t = 0 & \textit{em } Q, \\
\tilde{p}_t = 0 & \textit{sobre } \Sigma, \\
\tilde{p}_{tt} + \dfrac{\varrho}{\lambda}\Big(\dfrac{\tilde{r}_{1,t}}{\lambda} - 2\varphi_t \tilde{r}_1 \Big) e^{-2\lambda\varphi} = 0 & \textit{em } Q, \\
\tilde{p}_t - \dfrac{\varrho}{\lambda^2}\Big(\dfrac{\tilde{r}_{2,t}}{\lambda^2} - \dfrac{2}{\lambda}\varphi_t \tilde{r}_2 \Big) e^{-2\lambda\varphi} = 0 & \textit{em } Q.
\end{cases} \tag{A.22}$$

Aplicando o Teorema (A.1) *a* $\tilde{p}_t$ *e observando* (A.22), *resulta que*

$$\begin{aligned}
&\lambda \iint_Q (\lambda^2 \tilde{p}_t^2 + \tilde{p}_{tt}^2 + \|\nabla \tilde{p}_t\|^2) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \\
&\leq C\Big[\|e^{\lambda\varphi} \mathcal{P}\tilde{p}_t\|^2_{L^2(Q)} + \lambda^2 \iint_{(0,T)\times\omega} (\lambda^2 \tilde{p}_t^2 + \tilde{p}_{tt}^2) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \Big] \\
&= C\Big[\|e^{\lambda\varphi} (e^{-2\lambda\varphi}\tilde{z})_t\|^2_{L^2(Q)} + \lambda^2 \iint_{(0,T)\times\omega} (\lambda^2 \tilde{p}_t^2 + \tilde{p}_{tt}^2) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \Big] \\
&= C\Big[\iint_Q e^{-2\lambda\varphi} (\tilde{z}_t^2 - 4\tilde{z}_t \tilde{z} \lambda \varphi_t + \lambda^2 \tilde{z}^2 4\varphi_t^2)\, dxdt + \iint_{(0,T)\times\omega} (\lambda^4 \tilde{p}_t^2 + \lambda^2 \tilde{p}_{tt}^2) e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \Big] \\
&= \Big[\iint_Q e^{-2\lambda\varphi} (\tilde{z}_t^2 - 4\tilde{z}_t \tilde{z} \lambda \varphi_t + \lambda^2 \tilde{z}^2 4\varphi_t^2)\, dxdt \\
&+ \iint_{(0,T)\times\omega} \Big(\lambda^4 \frac{\varrho^2}{\lambda^4} \Big(\frac{\tilde{r}_{2,t}^2}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^3} \tilde{r}_{2,t} \varphi_t \tilde{r}_2 + \frac{4}{\lambda^2} \varphi_t^2 \tilde{r}_2^2 \Big) e^{-2\lambda\varphi} \\
&+ \lambda^2 \frac{\varrho^2}{\lambda^2} \Big(\frac{\tilde{r}_{1,t}^2}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda} \tilde{r}_{1,t} \varphi_t \tilde{r}_1 + 4\varphi_t^2 \tilde{r}_1^2 \Big) e^{-2\lambda\varphi} \Big)\, dxdt \Big] \\
&= \Big[C \iint_Q e^{-2\lambda\varphi} (\tilde{z}_t^2 - 4\tilde{z}_t \tilde{z} \lambda \varphi_t + \lambda^2 \tilde{z}^2 4\varphi_t)\, dxdt \\
&+ \iint_{(0,T)\times\omega} \varrho^2 e^{-2\lambda\varphi} \Big(\frac{\tilde{r}_{1,t}^2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_{2,t}^2}{\lambda^4} + 4\varphi_t^2 \Big(\tilde{r}_1^2 + \frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^2} \Big) - \frac{4}{\lambda} \varphi_t \Big(\tilde{r}_{1,t} \tilde{r}_1 + \frac{\tilde{r}_{2,t}}{\lambda^2} \tilde{r}_2 \Big) \Big)\, dxdt \Big] \\
&\leq C\Big[\iint_Q (\tilde{z}_t^2 + \lambda^2 \tilde{z}^2) e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt + \iint_{(0,T)\times\omega} \Big(\frac{\tilde{r}_{1,t}^2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_{2,t}^2}{\lambda^4} + \tilde{r}_1^2 + \frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^2} \Big) e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt \Big].
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Etapa 3.

De (A.20) *e observando que*

$$-\iint_Q (\tilde{r}_{1,t}+\tilde{r}_2)\tilde{p}\; dxdt = \iint_Q (\tilde{r}_1\tilde{p}_t - \tilde{r}_2\tilde{p})\; dxdt = -\iint_Q \Big(\varrho\frac{\tilde{r}_1^2}{\lambda^2}e^{-2\lambda\varphi} - \varrho\frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^4}e^{-2\lambda\varphi}\Big)\; dxdt$$
$$= \iint_Q \varrho\Big(\frac{\tilde{r}_1^2}{\lambda^2} - \frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^4}\Big)e^{-2\lambda\varphi}\; dxdt, \tag{A.24}$$

e lembrando que $\tilde{p} = K\tilde{r}$, *obtemos que*

$$0 = (\mathcal{P}\tilde{z} - \tilde{r}_{1,t} - \tilde{r}_2 - \lambda u e^{2\lambda\varphi} - \tilde{r}, \tilde{p})_{L^2(Q)}$$
$$= \iint_Q \mathcal{P}\tilde{z}\tilde{p}\; dxdt - \iint_Q (\tilde{r}_{1,t}+\tilde{r}_2)\tilde{p}\; dxdt - \lambda\iint_Q ue^{2\lambda\varphi}\tilde{p}\; dxdt - \iint_Q \tilde{r}\tilde{p}\; dxdt$$
$$= \iint_Q \mathcal{P}\tilde{p}\tilde{z}\; dxdt - \iint_Q (\tilde{r}_{1,t}+\tilde{r}_2)\tilde{p}\; dxdt - \lambda\iint_Q ue^{2\lambda\varphi}\tilde{p}\; dxdt - \iint_Q \tilde{r}\tilde{p}\; dxdt$$
$$= \iint_Q \tilde{z}^2 e^{-2\lambda\varphi}\; dxdt - \iint_Q \varrho\Big(\frac{\tilde{r}_1^2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^4}\Big)e^{-2\lambda\varphi}\; dxdt - \lambda\iint_Q u\tilde{p}e^{2\lambda\varphi}\; dxdt - K\iint_Q \tilde{r}^2\; dxdt. \tag{A.25}$$

Consequentemente,

$$\iint_Q \tilde{z}^2 e^{-2\lambda\varphi}\; dxdt + \iint_Q \varrho\Big(\frac{\tilde{r}_1^2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^4}\Big)e^{-2\lambda\varphi}\; dxdt + K\iint_Q \tilde{r}^2\; dxdt = -\lambda\iint_Q u\tilde{p}e^{2\lambda\varphi}\; dxdt. \tag{A.26}$$

Combinando (A.21) *e* (A.26), *chegamos a*

$$\iint_Q \tilde{z}^2 e^{-2\lambda\varphi}\; dxdt + \iint_Q \varrho\Big(\frac{\tilde{r}_1^2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^4}\Big)e^{-2\lambda\varphi}\; dxdt + K\iint_Q \tilde{r}^2\; dxdt \le \frac{C}{\lambda}\iint_Q u^2 e^{2\lambda\varphi}\; dxdt. \tag{A.27}$$

Etapa 4.

Usando (A.20) *e* (A.22) *novamente, e observando que* $\tilde{p}_{tt}(0) = \tilde{p}_{tt}(T) = 0$ *em* Ω, *encontramos que*

$$0 = (\mathcal{P}\tilde{z} - \tilde{r}_{1,t} - \tilde{r}_2 - \lambda u e^{2\lambda\varphi} - \tilde{r}, \tilde{p}_{tt})_{L^2(Q)}$$
$$= \iint_Q \mathcal{P}\tilde{z}\tilde{p}_{tt}\; dxdt - \iint_Q (\tilde{r}_{1,t}+\tilde{r}_2)\tilde{p}_{tt}\; dxdt - \lambda\iint_Q u\tilde{p}_{tt}e^{2\lambda\varphi}\; dxdt - \iint_Q \tilde{r}\tilde{p}_{tt}\; dxdt$$
$$= \iint_Q \mathcal{P}\tilde{p}_{tt}\tilde{z}\; dxdt - \iint_Q (\tilde{r}_{1,t}+\tilde{r}_2)\tilde{p}_{tt}\; dxdt - \lambda\iint_Q u\tilde{p}_{tt}e^{2\lambda\varphi}\; dxdt - \iint_Q \tilde{r}\tilde{p}_{tt}\; dxdt$$
$$= -\iint_Q \tilde{z}(e^{-2\lambda\varphi}\tilde{z})_{tt}\; dxdt - \iint_Q (\tilde{r}_{1,t}+\tilde{r}_2)\tilde{p}_{tt}\; dxdt - \lambda\iint_Q u\tilde{p}_{tt}e^{2\lambda\varphi}\; dxdt - \iint_Q \tilde{r}\tilde{p}_{tt}\; dxdt. \tag{A.28}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&-\iint_Q \tilde{z}(e^{-2\lambda\varphi}\tilde{z})_{tt}\, dxdt = \iint_Q \Big(\tilde{z}_t^2 e^{-2\lambda\varphi} - \frac{\tilde{z}^2}{2}(e^{-2\lambda\varphi})_{tt}\Big)\, dxdt \\
&= \iint_Q (\tilde{z}_t^2 + \lambda\varphi_{tt}\tilde{z}^2 - 2\lambda^2\varphi_t^2\tilde{z}^2)e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Da terceira e quarta igualdade em (A.22)*, segue que*

$$\begin{aligned}
&-\iint_Q (\tilde{r}_{1,t} + \tilde{r}_2)\tilde{p}_{tt}\, dxdt = -\iint_Q \tilde{r}_{1,t}\tilde{p}_{tt}\, dxdt - \iint_Q \tilde{r}_2\tilde{p}_{tt}\, dxdt \\
&= -\iint_Q \tilde{r}_{1,t}\tilde{p}_{tt}\, dxdt - \int_\Omega (\tilde{r}_2\tilde{p}_t)\,\big|_0^T\, dx + \iint_Q \tilde{r}_{2,t}\tilde{p}_t\, dxdt \\
&= \iint_Q \tilde{r}_{1,t}\frac{\varrho}{\lambda}\Big(\frac{\tilde{r}_{1,t}}{\lambda} - 2\varphi_t\tilde{r}_1\Big)e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt + \iint_Q \tilde{r}_{2,t}\frac{\varrho}{\lambda^2}\Big(\frac{\tilde{r}_{2,t}}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda}\varphi_t\tilde{r}_2\Big)e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt \\
&= \iint_Q \varrho\Big(\frac{\tilde{r}_{1,t}}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_{2,t}}{\lambda^4} - \frac{2}{\lambda}\varphi_t\tilde{r}_1\tilde{r}_{1,t} - \frac{2}{\lambda^3}\varphi_t\tilde{r}_2\tilde{r}_{2,t}\Big)e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Ainda, de $\tilde{p} \triangleq K\tilde{r}$ *e integrando por partes, deduzimos que*

$$-\iint_Q \tilde{r}\tilde{p}_{tt}\, dxdt = K\iint_Q \tilde{r}_t^2\, dxdt. \tag{A.31}$$

Combinando (A.28) $-$ (A.31)*, nos conduz a*

$$\begin{aligned}
&-\iint_Q (\tilde{r}_{1,t} + \tilde{r}_2)\tilde{p}_{tt}\, dxdt - \iint_Q \tilde{r}\tilde{p}_{tt}\, dxdt - \iint_Q \tilde{z}(e^{-2\lambda\varphi}\tilde{z})_{tt}\, dxdt \\
&= \lambda\iint_Q u\tilde{p}_{tt}e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \\
&\Rightarrow \iint_Q \varrho\Big(\frac{\tilde{r}_{1,t}^2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_{2,t}^2}{\lambda^4} - \frac{2}{\lambda}\varphi_t\tilde{r}_1\tilde{r}_{1,t} - \frac{2}{\lambda^3}\varphi_t\tilde{r}_2\tilde{r}_{2,t}\Big)e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt + K\iint_Q \tilde{r}_t^2\, dxdt \\
&+ \iint_Q (\tilde{z}_t^2 + \lambda\varphi_{tt}\tilde{z}^2 - 2\lambda^2\varphi_t\tilde{z}^2)e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt = \lambda\iint_Q u\tilde{p}_{tt}e^{2\lambda\varphi}\, dxdt.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Agora, por (A.32)$+C\lambda^2$(A.27) *(com* $C > 0$ *suficientemente grande), usando Desigualdade de Cauchy-Schwartz e observando* (A.23)*, vale que*

$$\iint_Q (\tilde{z}_t^2 + \lambda^2\tilde{z}^2)e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt + \iint_Q \varrho\Big(\frac{\tilde{r}_{1,t}^2}{\lambda^2} + \frac{\tilde{r}_{2,t}^2}{\lambda^4} + \tilde{r}_1^2 + \frac{\tilde{r}_2^2}{\lambda^2}\Big)e^{-2\lambda\varphi} \le C\lambda\iint_Q u^2e^{2\lambda\varphi}\, dxdt. \tag{A.33}$$

Etapa 5.

Em (A.20), *temos*

$$\begin{aligned}
&(\tilde r_{1,t}+\tilde r_2+\lambda ue^{2\lambda\varphi}+\tilde r,\tilde z e^{-2\lambda\varphi})_{L^2(Q)}=(\mathcal P\tilde z,\tilde z e^{-2\lambda\varphi})_{L^2(Q)}\\
&=-\iint_Q \tilde z_t(\tilde z e^{-2\lambda\varphi})_t\,dxdt+\sum_{i,j}\iint_Q a^{ij}\tilde z_i(\tilde z e^{-2\lambda\varphi})_j\,dxdt\\
&=-\iint_Q(\tilde z_t^2+\lambda\varphi_{tt}-2\lambda^2\varphi_t^2\tilde z^2)e^{-2\lambda\varphi}\,dxdt+\sum_{i,j}\iint_Q a^{ij}\tilde z_i\tilde z_j e^{-2\lambda\varphi}\,dxdt\\
&-2\lambda\sum_{i,j}\iint_Q a^{ij}\tilde z_i\tilde z\varphi_j e^{-2\lambda\varphi}\,dxdt.
\end{aligned}\tag{A.34}$$

Agora, combinado com (A.2), *e lembrando que* $\lambda\geq\lambda_0>1$, *resulta que*

$$\begin{aligned}
&\iint_Q\|\nabla\tilde z\|^2e^{-2\lambda\varphi}\,dxdt\\
&\leq C\iint_Q\Big[\|\tilde r_{1,t}+\tilde r_2+\tilde r\|\|\tilde z\|e^{-2\lambda\varphi}+\lambda\|u\tilde z\|+(\tilde z_t^2+\lambda^2\tilde z^2)e^{-2\lambda\varphi}\Big]\,dxdt\\
&\leq C\iint_Q\Big[u^2e^{2\lambda\varphi}+\Big(\frac{\tilde r_{1,t}^2}{\lambda^2}+\frac{\tilde r_2^2}{\lambda^2}+\tilde r^2+\tilde z_t^2+\lambda^2\tilde z^2\Big)e^{-2\lambda\varphi}\Big]\,dxdt.
\end{aligned}\tag{A.35}$$

Combinando (A.27) – (A.33), *e* (A.35), *escolhemos a constante* K *em* (A.27) *de modo que*

$$K\geq Ce^{2\lambda max_{(t,x)\in Q}|\varphi|}\tag{A.36}$$

(Para absorver o termo $C\iint_Q\tilde r^2e^{-2\lambda\varphi}\,dxdt$ *no lado direito de* (A.35)*) e notando que* $x\geq 1$ *em* Ω *deduzimos que*

$$\begin{aligned}
&\iint_Q(\|\nabla\tilde z\|^2+\tilde z_t^2+\lambda^2\tilde z^2)e^{-2\lambda\varphi}\,dxdt+\iint_Q\varrho\Big(\frac{\tilde r_{1,t}^2}{\lambda^2}+\frac{\tilde r_{2,t}^2}{\lambda^4}+\tilde r_1^2+\frac{\tilde r_2^2}{\lambda^2}\Big)e^{-2\lambda\varphi}\,dxdt\\
&\leq C\lambda\iint_Q u^2e^{2\lambda\varphi}\,dxdt.
\end{aligned}\tag{A.37}$$

Etapa 6.

Lembremos que $(\tilde z,\tilde r_1,\tilde r_2,\tilde r)$ *depende de* K. *Agora, fixamos* λ *e deixamos* $K\to\infty$. *De* (A.27) *e* (A.37) *concluímos que existe uma subsequência de* $(\tilde z,\tilde r_1,\tilde r_2,\tilde r)$ *que converge fracamente para algum* $(\check z,\check r_1,\check r_2,0)$ *em* $H_0^1(Q)\times(H^1(0,T;L^2(\Omega)))^2\times L^2(Q)$, *com* $\sup\check r_i\subset\overline{(0,T)\times\omega}$ $(i=1,2)$ *uma vez que* $\varrho(x)\equiv\varrho^K(x)\to\infty$ *para qualquer* $x\notin\omega$, *com* $K\to\infty$. *Por* (A.20), *deduzimos que* $(\check z,\check r_1,\check r_2)$ *satisfaz*

$$\begin{cases}\mathcal P\check z=\check r_{1,t}+\check r_2+\lambda ue^{2\lambda\varphi} & em\ Q,\\ \check z=0 & em\ \partial Q.\end{cases}\tag{A.38}$$

Usando (A.37) *novamente, obtemos*

$$\|\check z e^{-\lambda\varphi}\|^2_{H_0^1(Q)}+\frac{1}{\lambda^2}\iint_{(0,T)\times\omega}(\check r_{1,t}^2+\check r_2^2)e^{-2\lambda\varphi}\,dxdt\leq C\lambda\iint_Q u^2e^{2\lambda\varphi}\,dxdt.\tag{A.39}$$

Agora, por (A.18) *com* η *substituído pelo* $\check{z}$ *acima, nos leva a*

$$(u, \check{r}_{1,t} + \check{r}_2 + \lambda u e^{2\lambda\varphi})_{L^2(Q)} = \langle \mathcal{P}u, \check{z} \rangle_{H^{-1}(Q)\times H_0^1(Q)}.$$

Portanto, observando que $\sup \check{r}_i \subset \overline{(0,T)\times\omega}$ $(i = 1, 2)$, *concluímos que para todo* $\epsilon > 0$, *vale que*

$$\begin{aligned}
&\lambda \iint_Q u^2 e^{2\lambda\varphi}\, dxdt = \langle \mathcal{P}u, \check{z} \rangle_{H^{-1}(Q)\times H_0^1(Q)} - (u, \check{r}_{1,t} + \check{r}_2)_{L^2((0,T)\times\omega)} \\
&\leq C\Big\{ \frac{1}{\epsilon}\Big[\|e^{\lambda\varphi}\mathcal{P}u\|^2_{H^{-1}(Q)} + \lambda^2 \iint_{(0,T)\times\omega} u^2 e^{2\lambda\varphi}\, dxdt \Big] \\
&+\epsilon\Big[\|\check{z}e^{-\lambda\varphi}\|^2_{H_0^1(Q)} + \frac{1}{\lambda^2}\iint_{(0,T)\times\omega} (\check{r}_{1,t}^2 + \check{r}_2^2) e^{-2\lambda\varphi}\, dxdt \Big]\Big\}.
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Finalmente escolhendo ϵ *em* (A.40) *suficientemente pequeno e observando* (A.39) *chegamos a estimativa desejada* (A.19). $\square$

Referências Bibliográficas

[1] ARARUNA, F. D.; FERNÁNDEZ-CARA, E.; SILVA, L.C., *Hierarchic control for the wave equation,* Journal of Optimization Theory and Applications, v. 1, p. 264-288, 2018.

[2] BOTELHO, G., PEREGRINO, D., TEIXEIRA, E.*Fundamentos de Análise Funcional* - Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2011.

[4] DÍAZ, J. I.; LIONS, -J. L.; *On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies.* Ocean circulation and pollution control: a mathematical and numerical investigation, Madrid, 1997. Springer, Berlin, p. 17-27, 2004.

[5] DÍAZ, J. I.; *On the von Neumann problem and the approximate controllability of Stackelberg -Nash strategies for some environmental problems.* Rev. R. Acad. Cien., Ser. A. Math. **96** p. 343-356, 2002.

[6] DUYCKAERSTS, T.; ZHANG, X.; ZUAZUA, E., *On the optimality of the observability inequalities for parabolic and hyperbolic systems with potentils,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, v. 25, p. 1-41, 2008.

[7] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS, 1997.

[8] FU, X.; YONG, J., ZHANG, X., *Exact controllability for multidimensional semilinear hyperbololic equations,* SIAM J. Control Optim. v. 46, p. 1578-1614, 2007.

[9] JESUS,I. P., LIMA,O.A., CLARK,M.R., *Análise Funcional: Uma introdução,* 1º ed. Teresina, EDUFPI, 2018.

[10] LIONS, J. -L., *Hierarchic control*, Mathematical Science, Proc. Indian Academic Science, **104**, 295-304, 1994.

[11] LIONS, J. -L.; *Contrôle de Pareto de systèmes distribués. Le cas d'èvolution.* C.R. Acad.Sci. Paris, Sér. I **302** p. 413-417, 1986.

[12] LIONS, J. -L.; *Some remarks on Stackelberg's optimization.* Math. Models Methods Appl. Sci. **4** p. 477-487, 1994.

[13] MEDEIROS, L. A. & Milla Miranda, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

[14] MATOS, M. P. *Integral de Bochner e os espaços* $L^p(0,T;X)$. Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 1998.

[15] MIRANDA, M.M.; MEDEIROS, L.A.*Espaços de Sobolev:* Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.

[16] NASH, J.F.; *Noncoopertive games. Ann. Math.* **54** P.286-295, 1951.

[17] RAMOS, A.M.; GLOWINSKI, R. PERIAUX, J., *Pointwise control of the Burgers equation and related Nash equilibria problems: A computational approach.* J. Optim. Theory Appl. **112** p.499-516, 2001.

[18] RAMOS, A.M.; GLOWINSKI, R.; PERIAUX, J., *Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial differential equations.* J. Optim. Theory Appl. **112**, 457-498, 2002.

[19] SANTIAGO, C.R., *Controle Hierárquico da Equação da Onda.* Dissertação de Mestrado, João Pessoa, UFPB, 2011.

[20] VON STACKELBERG, H. Marktform und gleichgewicht. Springer, Berlin, Germany, 1934.