UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Métricas V-Estáticas com curvatura não-negativa

Ana Júlia Girardi Zanetti

Teresina - 2024

Ana Júlia Girardi Zanetti

Dissertação de Mestrado:

Métricas V-Estáticas com curvatura não-negativa

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar

Teresina - 2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Divisão de Representação da Informação

Z28m Zanetti, Ana Júlia Girardi.
Métricas V-Estáticas com curvatura não-negativa / Ana Júlia Girardi Zanetti. -- 2024.
89 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2024.
"Orientador: Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar".

1. Métrica Crítica. 2. Curva de Ricci. 3. Produto Warped. 4. Variedades Einstein. I. Baltazar, Halyson Irene. II. Título.

CDD 510

Bibliotecária: Francisca das Chagas Dias Leite – CRB3/1004

Dedico este trabalho a Deus. Pois dEle, por Ele e para Ele são todas as coisas.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pois sem Ele nada disso seria possível. Sua presença foi meu sustento nos momentos em que cogitei desistir. Tenho plena convicção de que toda a minha força vem Dele. Sua orientação e apoio foram constantes em minha jornada acadêmica, guiando-me até aqui. Obrigada por me permitir realizar mais um sonho.

Ao meu maior presente, minha família. Sou abençoada em ter vocês em minha vida. Em especial, à minha mãe, por todas as suas orações, zelo, apoio e cuidado, e ao meu pai, por ser minha maior fonte de inspiração, meu exemplo de humildade, determinação e bondade. Agradeço também à minha irmã Vanessa, por sempre acreditar no meu potencial.

Às minhas melhores amigas, Bruna, Ingridy e Ruana, pelos momentos compartilhados durante essa trajetória e por serem sinônimo de lar.

Aos meus amigos da pós-graduação, que compartilharam essa jornada comigo. Obrigada por todos os sorrisos e por todo o amor. Em especial, Danilo, Eduardo, Elliel, Emanuely, Fáuster, Honório, Isaque, Jefferson, José, Júnior, Luzivânia, Pedro, Suerlan, Thiago, Vinicius(B) e Vinicius(W).

A todo o corpo docente do Departamento de Matemática da UFPI, especialmente àqueles que participaram da minha formação durante esses dois anos, Joel, Wilson, Paulo Alexandre e, também, ao professor Mário Gomes, por todo o carinho (e pelas resmas de papel). Acrescento também meu sincero agradecimento ao Cícero Aquino, por todos os ensinamentos na área de Geometria e pelas aulas excepcionais. Não poderia deixar de agradecer também à secretária incrível que temos no Programa de Pós Graduação, Larisse, obrigada pela terapia gratuita e pela amizade.

Ao melhor orientador que eu poderia ter, Halyson Baltazar, expresso minha gratidão por toda a orientação e apoio proporcionado ao longo deste percurso de mestrado. Desde o terceiro período da graduação, não fui apenas guiada academicamente, mas também inspirada a buscar o melhor de mim mesma em todos os âmbitos, inclusive na corrida. Agradeço principalmente pela paciência, competência, incentivo, profissionalismo e prontidão no decorrer desta jornada.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"Seja forte e corajoso! Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar".

Josué 1:9 - Bíblia Sagrada.

Resumo

Este trabalho é baseado nos artigos *"Critical metrics of the functional on three-dimensional manifolds"* de Huyia He, *"On critical point equation of compact manifolds with zero radial Weyl curvature"* de Halyson Baltazar e *"Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary"*, escrito por este último com Ernani Ribeiro, e visam estudar os resultados que classificam as métricas críticas do funcional curvatura escalar total, métricas críticas do funcional volume e métricas estáticas. Abordaremos essas três métricas críticas quando a curvatura de Ricci é não-negativa para variedades tridimensionais, e posteriormente, para curvatura seccional não-negativa em dimensão $n \geqslant 3$.

Palavras chaves: Métrica Crítica; Curvatura de Ricci; Produto Warped; Variedades Einstein.

Abstract

This work is based in the articles *"Critical metrics of the functional on three-dimensional manifolds"* of Huyia He, *"On critical point equation of compact manifolds with zero radial Weyl curvature"* of Halyson Baltazar and *"Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary"*, written by the latter with Ernani Ribeiro, which aim to study results that classify critical metrics of the total scalar curvature functional, critical metrics of the volume functional and static metrics. We will explore these three critical metrics when the Ricci curvature is nonnegative for three-dimensional manifolds and afterword, for nonnegative sectional curvature in dimension $n \geqslant 3$.

Keywords: Critical metrics; Ricci curvature; Warped product; Einstein manifolds.

Sumário

Introdução

O presente trabalho será embasado nos artigos [2], [4] e [27]. No que segue, forneceremos um breve desenvolvimento histórico dos problemas estudados, bem como os resultados obtidos nos últimos anos.

Um problema fundamental em Geometria Diferencial consiste em determinar métricas Riemannianas em uma determinada variedade M^n que forneça curvatura escalar constante. Neste contexto é crucial compreender as métricas críticas dos funcionais Riemannianos, dentre eles, o funcional curvatura escalar total e o funcional volume.

Einstein e Hilbert provaram que os pontos críticos do funcional curvatura escalar total restrito ao conjunto de métricas Riemannians em M^n de volume unitário são necessariamente Einstein, ou seja, o tensor de Ricci é múltiplo da métrica. Veja Teorema 4.21, [10].

No que segue, (M^n, g) representa uma variedade Riemanniana compacta, conexa, orientada, de dimensão $n \geqslant 3$, $\mathcal{M}$ o conjunto de estruturas Riemannianas suaves sobre M^n de volume unitário e $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ um conjunto de métricas Riemannianas com curvatura escalar constante.

Dada uma métrica $g \in \mathcal{M}$, definimos o funcional de Einstein-Hilbert (ou funcional curvatura escalar total) $\mathcal{R} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{R}(g) = \int_M R_g dM_g,$$

onde R_g é a curvatura escalar de M^n.

É importante ressaltar que os pontos críticos desse funcional são precisamente as métricas Einstein.

Temos que $\mathfrak{L}_g^*$ é o L^2-adjunto formal da linearização do operador curvatura escalar

$$\mathfrak{L}_g(h) = -\Delta_g(tr_g h) + div_g div_g h - hRic_g,$$

dado por

$$\mathfrak{L}_g^*(f) := -(\Delta_g f)g + \mathrm{Hess}_g f - f\mathrm{Ric}_g, \tag{1}$$

onde f é uma função suave em M^n e $\Delta_g, \mathrm{Hess}_g$ e Ric_g são o Laplaciano, o Hessiano e o tensor de Ricci de M^n, respectivamente.

Com essas considerações, a equação de Euler-Lagrange de $\mathcal{R}$ restrita ao conjunto $\mathcal{C}$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = \mathrm{Ric}_g - \frac{R_g}{n}g. \tag{2}$$

Na mesma terminologia usada em [10], [16], [39], uma métrica CPE (*Critical Point Equation*) pode ser definida do seguinte modo.

Definição 0.0.1. *Uma **métrica CPE** é uma tripla* (M^n, g, f)*,* $(n \geqslant 3)$*, onde* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana compacta (sem bordo), orientada, com curvatura escalar constante e* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave não constante satisfazendo a equação*

$$-(\Delta_g f)g + \mathrm{Hess}_g f - f\mathrm{Ric}_g = \mathrm{Ric}_g - \frac{R_g}{n}g. \tag{3}$$

Tomando o traço na equação acima, obtemos a seguinte fórmula para o laplaciano,

$$\Delta f = -\frac{R}{n-1}f. \tag{4}$$

Por volta dos anos de 80 foi conjecturado que toda métrica CPE é necessariamente Einstein. Essa conjectura foi proposta em [10] e será apresentada abaixo.

Conjectura 1 (Conjectura CPE)**.** *Uma métrica CPE é sempre Einstein.*

Observe que as métricas CPE são Einstein se $f = 0$. Ademais, a conjectura CPE combinada com o Teorema de Obata [37, Teorema 2], nos permite deduzir que uma métrica CPE com função potencial não constante é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n$ e f é a função altura na esfera.

Ao longo das últimas décadas, vários pesquisadores tentaram solucionar essa conjectura, mas somente resultados parciais foram provados. Em 1983, Lafontaine [33] mostrou a conjectura para uma variedade localmente conformemente plana. Em 2000, Hwang [29] provou a conjectura assumindo que $f \geqslant -1$. Em 2010, Chang, Hwang e Yun [14] demonstraram a validade da conjectura para variedades tridimensionais com grupos de segunda homologia nulos tal que $\mathsf{Ker}\mathfrak{L}_{\mathsf{g}}^*(\mathsf{f}) \neq 0$. Em 2013, Qing e Yuan [39] obtiveram respostas positivas para variedades com tensor de Bach nulo em qualquer dimensão.

Mais tarde, em 2014, Chang, Hwang e Yun ([16], [17]) estabeleceram a conjectura sob a suposição de curvatura harmônica, que é claramente mais fraca que a condição localmente conformemente considerada por Lafontaine. Esses mesmos autores em [15] foram capazes de resolver a conjectura para uma variedade que satisfaz a condição do tensor de Ricci paralelo. Em 2014, Barros e Ribeiro Jr [6] mostraram que a conjectura também é verdadeira para variedades semi conformemente plana de dimensão 4. É importante evidenciar que esse resultado foi melhorado pelos mesmos autores e Leandro em [7], sob a harmonicidade da parte autodual do tensor de Weyl.

Destacamos agora que, em 2018, Baltazar [2] mostrou que a conjectura vale para variedades tridimensionais com curvatura seccional não-negativa. Em 2023, Huiya He [27] generalizou o resultado de Baltazar, provando a validade da conjectura para variedades tridimensionais com curvatura de Ricci não-negativa. Os dois últimos resultados referidos serão abordados com maior profundidade nesta dissertação. Mais precisamente, por [27], temos o seguinte teorema.

Teorema 0.0.2. *Seja* $(\mathsf{M}^3, \mathsf{g}, \mathsf{f})$ *uma métrica CPE tridimensional compacta, orientada, conexa com curvatura de Ricci não-negativa. Então,* M^3 *é isométrica a esfera padrão* $\mathbb{S}^3$.

Posteriormente, também foi dada atenção a um outro tipo de equação do ponto crítico, a métrica V-estática. Seguindo a terminologia usada por Miao e Tam [35], bem como Corvino, Eichmair e Miao [22], temos a seguinte definição.

Definição 0.0.3. *Uma métrica* g *é **V-estática** se existe uma função suave* f *de* M^n *e uma constante* κ *satisfazendo a equação V-estática*

$$\mathfrak{L}_{\mathsf{g}}^*(\mathsf{f}) = \kappa \mathsf{g}. \tag{5}$$

As métricas V-estáticas são essenciais para compreender a relação entre volume e curvatura escalar. Deste modo, fica estabelecido o problema de encontrar pontos estacionários para o funcional volume sobre o espaço das métricas com curvatura escalar constante [22],[35],[36] e [44].

Por outro lado, quando $\kappa = 0$ na Equação (5), como em [26] e [32], pode-se definir o espaço estático no vácuo, por simplicidade, métrica estática.

Definição 0.0.4. *Um **espaço estático no vácuo** é uma tripla* (M^n, g, f), $(n \geqslant 3)$, *onde* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana compacta, orientada, conexa, com bordo suave* ∂M *e* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave tal que* $f^{-1}(0) = \partial M$ *satisfazendo*

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = 0. \tag{6}$$

Agora, iremos recordar um exemplo clássico de tripla estática positiva com bordo não-vazio.

Exemplo 1. *Um exemplo de tripla estática positiva com bordo conexo é obtido escolhendo* $(\mathbb{S}_+^n(r), g)$, *onde* $\mathbb{S}_+^n(r)$ *é o hemisfério superior aberto de raio* r *em* $\mathbb{R}^{n+1}$, *dotado com a métrica euclidiana* g. *Assim,* $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}(r)$ *é o equador, a função altura* f *sobre* $\mathbb{S}_+^n(r)$ *é positiva, anula-se precisamente sobre* $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}(r)$, *e satisfaz à Eq. (6).*

Em 1984, Boucher, Gibbons e Horowitz [11] propuseram que tal exemplo é a única tripla estática positiva com bordo conexo e curvatura escalar positiva. Este problema é em verdade uma reformulação da bem conhecida *Cosmic no-Hair Conjecture*, a qual afirma que o único espaço-tempo estático no vácuo, com constante cosmológica positiva e horizonte de eventos conexo é o espaço de *de Sitter* de raio r. Destacamos que existem triplas estáticas positivas com bordo duplo, o que torna a conexidade na fronteira realmente necessária, a saber, o *espaço de Nariai.* Aqui, enunciaremos a conjectura da seguinte forma.

Conjectura 2 (Cosmic no-hair conjecture)**.** *O Exemplo (1) é a única tripla estática positiva com horizonte simples (i.e., bordo conexo) e curvatura escalar positiva.*

Em relação à essa conjectura, houveram algumas contribuições parciais objetivando resolvê-la. Nesse sentido, consulte [1], [4], [5], [28], [31], [33], [39]. Embora todas as evidências indicassem que a conjectura fosse válida, Gibbons, Hartnoll e Pope [25] construíram contraexemplos para a conjectura *cosmic no-hair* nos casos $4 \leqslant n \leqslant 8$, usando métricas Einstein não homogêneas encontradas por Böhm. Mais tarde, em 2023, Costa, Diógenes, Pinheiro e Ribeiro Jr. [20], forneceram um novo contraexemplo (simplesmente conexo) para a conjectura cósmica no-hair para dimensão arbitrária $n \geqslant 4$.

Sabemos que se (M^n, g) for Einstein, basta aplicar o teorema do tipo Obata devido a Reilly [41] (ver também [37]) para concluir que a única variedade compacta Einstein que satisfaz a Equação (6), é a esfera padrão. Espaços estáticos no vácuo localmente conformemente planos foram classificados em [31] e [33] de forma independente. Outrossim, Qing e Yuan [39] obtiveram um resultado de classificação para espaços estáticos assumindo a nulidade do tensor de Bach. Tratando-se do seguinte teorema.

Teorema 0.0.5. *(Kobayashi [31], Lafontaine [33], Qing e Yuan [39]) Seja* (M^n, g, f) *uma tripla estática positiva com curvatura escalar* $R = n(n-1)$. *Suponha que* (M^n, g) *possui tensor de Bach nulo, então* (M^n, g, f) *é dada por uma tripla estática equivalente a uma das seguintes triplas estáticas:*

(i) Um hemisfério padrão

$$(\mathbb{S}^n_+, g_{\mathbb{S}^{n-1}}, f = x_{n+1}).$$

(ii) Um cilindro padrão sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ *com a métrica produto*

$$\left(M = \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right] \times \mathbb{S}^{n-1}, dt^2 + \frac{n-2}{n} g_{\mathbb{S}^{n-1}}, f = sen(\sqrt{n}t)\right).$$

(iii) Para algum $m \in \left(0, \sqrt{\frac{(n-2)^{n-2}}{n^n}}\right)$, *o espaço de Schwarzshild definido por*

$$\left(M = [r_1, r_2] \times \mathbb{S}^{n-1}, g = \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2} dt^2 + t^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}, f_t = \sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}\right),$$

onde $r_1 < r_2$ *são zeros positivos de* f.

Observação 0.0.6. *Segue diretamente da definição do tensor de Bach que, variedades conformemente planas possuem tensor de Bach nulo. Desse modo, como as três estruturas acima são conformemente planas, podemos concluir que para triplas estáticas positivas, variedades conformementes planas são equivalentes a variedades com tensor de Bach nulo.*

Relembremos agora que o funcional volume $V : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é dado por

$$V_g = \int_M dV_g.$$

Quando $\kappa = 1$ na Equação (5), Miao e Tam em [35] estudaram o funcional volume definido acima, restrito ao espaço das métricas de curvatura escalar constante com métrica prescrita no bordo e obtiveram uma condição necessária e suficiente para uma métrica ser um ponto crítico.

Como em [30] e [36], temos a definição a seguir.

Definição 0.0.7. *Uma* ***métrica crítica de Miao-Tam*** *é a tripla* (M^n, g, f), $(n \geqslant 3)$, *onde* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana conexa, compacta, orientada, com bordo suave* ∂M *e* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave tal que* $f^{-1}(0) = \partial M$ *que satisfaz ao seguinte sistema de equações*

$$\mathfrak{L}_g^*(f) = g. \tag{7}$$

Miao e Tam, em 2011, estudaram as métricas críticas sobre a condição Einstein. Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado.

Teorema 0.0.8. *(Miao-Tam [36]) Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica Miao-Tam Einstein, conexa, compacta, com bordo suave* ∂M*, então* M^n *é isométrica a bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa* $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$, *ou* $\mathbb{S}^n$.

Em [36], Miao e Tam substituiram a hipótese de Einstein por localmente conformemente plana com bordo isométrico a esfera e obtiveram o mesmo resultado para as variedades simplesmente conexas. Baseado no trabalho de Cao-Chen [13], Barros-Diógenes-Ribeiro [8] provaram que, se uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade compacta M de dimensão 4, simplesmente conexa, com bordo isométrico à esfera padrão $\mathbb{S}^3$ possui tensor de Bach nulo, então M^4 deve ser isométrica à bola geodésica em uma forma espacial simplesmente conexa $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{H}^4$, ou $\mathbb{S}^4$.

Além disso, Baltazar-Ribeiro [4] provaram uma fórmula geral tipo-Bochner para mostrar que uma métrica crítica Miao-Tam (M^3, g, f) compacta, orientada e conexa, com bordo suave ∂M e curvatura seccional não-negativa e f não-negativa, é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$. Veja também [3], [5], [9] e [43] para mais resultados relacionados.

Com o conteúdo abordado neste trabalho de dissertação, será possível demonstrar o seguinte teorema para espaços V-estáticos tridimensionais com curvatura de Ricci não-negativa, o qual foi provado recentemente em [27].

Teorema 0.0.9. *Seja* (M^3, g, f) *uma métrica V-estática tridimensional compacta, orientada, conexa com um bordo suave* ∂M *e curvatura de Ricci não-negativa. Se* f *e* κ *satisfazem uma das seguintes condições:*

(i) $\kappa \geqslant 0$ *e* $f > 0$,

(ii) $\kappa \leqslant 0$ *e* $f < 0$.

Então M^3 *é localmente conformemente plana.*

Especificamente, quando $\kappa = 0$, vale o seguinte corolário.

Corolário 0.0.10. *Seja* (M^3, f, g) *um espaço estático no vácuo tridimensional compacto, orientado, conexo com bordo suave* ∂M*, curvatura de Ricci não-negativa e* f *não-negativa. Então,* (M^3, g, f) *é dada por um espaço estático equivalente a uma das seguintes coleções:*

(i) O hemisfério padrão

$$(\mathbb{S}^3_+, g_{can}, f = x_4),$$

onde g_{can} *é a métrica da esfera unitária padrão.*

(ii) O cilindro padrão sobre $\mathbb{S}^2$ *com a métrica produto*

$$\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times \mathbb{S}^2, g_{prod} = dt^2 + \frac{1}{3} g_{can}, f = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{sen}(\sqrt{3}t)\right).$$

Ademais, quando $\kappa > 0$, provaremos o seguinte resultado sob a condição de $f \geqslant 0$.

Teorema 0.0.11. *Seja* (M^3, g, f) *uma métrica V-estática tridimensional compacta, orientada, conexa com bordo suave* ∂M *e curvatura de Ricci não-negativa. Se* $\kappa > 0$ *e* $f \geqslant 0$, M^3 *é uma variedade de Einstein.*

Como corolário direto, temos o seguinte resultado.

Corolário 0.0.12. *Seja* (M^3, g, f) *uma métrica crítica Miao-Tam tridimensional compacta, orientada, conexa com bordo suave* ∂M*, curvatura de Ricci não-negativa e f não-negativa. Então,* M^3 *é isométrica a bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^3$ *ou* $\mathbb{S}^3$*.*

Na segunda parte desta dissertação, iremos nos fundamentar em [2] e [4], utilizando porém uma equação que engloba os três tipos de métricas apresentadas acima. Note que a equação V-estática engloba também a métrica CPE, para isto basta fazer $f = 1 + F$ e $\kappa = -\frac{R}{n}$, onde R é constante. Desse modo, quando nos referirmos à equação V-estática, estaremos fazendo menção aos três tipos de métricas estudados nesta dissertação. Para mais informações, veja o Capítulo 2.

No que segue, é importante lembrarmos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) tem curvatura de Weyl radialmente nula quando, para uma função potencial adequada f em M^n,

$$W(.,.,., \nabla f) = 0.$$

O próximo teorema unifica os resultados obtidos em [2] e [4], e este será essencial para entendermos a classificação das métricas V-estáticas para o caso de curvatura seccional não-negativa.

Teorema 0.0.13. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica satisfazendo a Equação (5). Então, temos a seguinte fórmula integral*

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M f^2|\nabla \mathrm{Ric}|^2\, dM_g + \frac{3n-5}{2(n-1)}\int_M f^2|C|^2\, dM_g + \frac{2n\kappa}{n-1}\int_M f|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\, dM_g \\ &\quad +3\int_M f^2\left(\frac{n}{n-2}\mathrm{tr}(\mathring{\mathrm{Ric}}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right) dM_g - \frac{n-2}{n-1}\int_M fC_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l f\, dM_g \\ &\quad +\frac{3}{n-1}\int_M f^2R|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2\, dM_g. \end{aligned} \tag{8}$$

Assim, obtemos alguns corolários específicos para cada uma das métricas críticas estudadas.

- Métricas CPE:

Corolário 0.0.14. *A conjectura CPE é verdadeira para variedades n-dimensionais com curvatura seccional não-negativa satisfazendo a condição de curvatura de Weyl radialmente nula.*

É conhecido que, o tensor Weyl é identicamente nulo quando $n = 3$. Então, é fácil verificar que a métrica CPE com curvatura seccional não-negativa deve ser isométrica a esfera padrão. Desse modo, fica estabelecido o seguinte

Corolário 0.0.15. *A conjectura CPE é verdadeira para variedades 3-dimensional com curvatura seccional não-negativa.*

- Métricas Miao-Tam:

Corolário 0.0.16. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica Miao-Tam, orientada, compacta, conexa com bordo suave* ∂M*, curvatura seccional não-negativa e curvatura de Weyl radialmente nula. Então,* M^n *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$*.*

- Métricas Estáticas:

Corolário 0.0.17. *Seja* (M^n, g, f) *uma tripla estática positiva com curvatura seccional não-negativa, curvatura de Weyl radialmente nula e curvatura escalar R=n(n-1). Então,* M^n *é isométrica ao hemisfério padrão* $\mathbb{S}^n_+$ *ou ao cilindro padrão sobre* $\mathbb{S}^{n-1}$ *com a métrica produto descrita no Teorema (0.0.5).*

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Operadores Diferenciais

Nesta seção apresentaremos noções iniciais de operadores diferenciais utilizados no decorrer deste trabalho.

No que segue, M^n, ou simplesmente M, denotará uma variedade Riemanniana n-dimensional com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇.

Definição 1.1.1. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***gradiente*** *de* f *é o campo vetorial suave* ∇f*, definido sobre* M *por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \tag{1.1}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.1.2. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta* $U \subset M$*. Então, em* U *temos que*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

Demonstração. Em U podemos escrever $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, desse modo

$$\langle \nabla f, e_j \rangle = \sum_{i}^{n} a_i \langle e_i, e_j \rangle = a_j.$$

Por outro lado, por definição $\langle \nabla f, e_j \rangle = e_j(f)$, logo $a_j = e_j(f)$, e assim obtemos

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

□

A seguir temos algumas propriedades do gradiente.

Proposição 1.1.3. *Se* $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Basta observar que, sendo X um campo suave sobre M, segue diretamente da definição de gradiente que

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f+g), X\rangle &= X(f+g) = X(f) + X(g) \\ &= \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla(fg), X\rangle &= X(fg) = gX(f) + fX(g) \\ &= \langle g\nabla f, X\rangle + \langle f\nabla g, X\rangle \\ &= \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle. \end{aligned}$$

□

Agora definamos o divergente de um campo vetorial.

Definição 1.1.4. *Seja* X *um campo vetorial suave em* M^n. *A* ***divergência*** *de* X *é a função suave* $\mathrm{div}X : M^n \to \mathbb{R}$, *dada para* $p \in M$ *por*

$$(\mathrm{div}X)(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \tag{1.2}$$

onde $v \in T_pM$ *e* tr *denota o traço do operador linear entre chaves. Similarmente à definição anterior, a divergência de um* $(1, r)$*-tensor* T *é definida como sendo o* $(0, r)$*-tensor*

$$\begin{aligned} (\mathrm{div}T)(v_1, ..., v_r) &= \{w \mapsto (\nabla_w T)(v_1, ..., v_r)\} \\ &= g^{jk}\nabla_j T_k(v_1, ..., v_r). \end{aligned}$$

Em particular, se T é um $(0, 2)$*-tensor, então em coordenadas temos*

$$(\mathrm{div}T)_i = g^{jk}\nabla_k T_{ij}.$$

Particularmente, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.5. *Se* X,Y *são campos vetoriais suaves em* M^n *e* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

(i) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$.

(ii) $\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + \langle \nabla f, X\rangle$.

Demonstração. Considere X e Y campos suaves definidos em M^n e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(X+Y) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(X+Y), e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle \\
&= \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(fX) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(fX), e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)X + \sum_{i=1}^{n} f\nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i, X \right\rangle + \left\langle f\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i, X \right\rangle + f\left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\
&= \langle \nabla f, X\rangle + f\mathrm{div}X.
\end{aligned}$$

□

Nesse contexto, relembremos o Teorema da Divergência.

Teorema 1.1.6 (Teorema da Divergência). *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana compacta orientada e* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Se o bordo de* M *é munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão* $j : \partial M \to M$ *e* ν *denota a normal unitária exterior a* M *ao longo de* ∂M, *então*

$$\int_M (\mathrm{div}X)\, dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle\, d(\partial M).$$

Definição 1.1.7. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave.O* ***Laplaciano*** *de* f *é a função* $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Em particular, deduzimos as seguintes propriedades.

Proposição 1.1.8. *Dadas* $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ *funções suaves, temos*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

Demonstração. Por (1.1.3), (1.1.5) e fazendo uso da Definição (1.1.7), é válido que

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= div(\nabla(fg)) = div(f\nabla g + g\nabla f) \\ &= div(f\nabla g) + div(g\nabla f) \\ &= f div(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle + g div(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle. \end{aligned}$$

Para o caso particular, basta fazer $g = f$ na equação acima. □

Definição 1.1.9. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***Hessiano*** *de* f *é o campo de operadores lineares* $(Hessf)_p : T_pM \to T_pM$*, definido para* $v \in T_pM$ *por*

$$(Hessf)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Proposição 1.1.10. *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

$$\Delta f = tr(Hessf).$$

Demonstração. É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada $p \in M$. Para tanto, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial $\{e_1, ..., e_n\}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} tr(Hessf)_p &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla f, e_i \right\rangle_p \\ &= div(\nabla f)(p) \\ &= \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

1.2 Tensores

Nesta seção apresentaremos alguns tensores clássicos que serão utilizados neste trabalho. Para um maior aprofundamento do que iremos expôr, recomendamos ao leitor as referências [12] e [23].

Definição 1.2.1. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita e* V^* *o espaço dual de* V. *Um s-tensor covariante em* V *é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s \ vezes} \to \mathbb{R}.$$

Um r-tensor contravariante é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r \ vezes} \to \mathbb{R}.$$

Um tensor do tipo (r, s) *é um tensor s-covariante e r-contravariante, isto é, uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r \ vezes} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{s \ vezes} \to \mathbb{R}.$$

No que segue, (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O anel comutativo das funções diferenciáveis (ou de classe C^∞) sobre M será denotado por $C^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.2.2. *Um campo de tensores ou um campo tensorial* A *em uma variedade* M^n *é um tensor sobre o* $C^\infty(M)$*-módulo* $\mathfrak{X}(M)$. *Assim, um* (r, s)*-tensor* A *é uma aplicação*

$$A : \mathfrak{X}(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

multilinear sobre $C^\infty(M)$. *Mais precisamente,* A *é uma aplicação multilinear sobre* $C^\infty(M)$ *que associa a cada* $(r + s)$*-upla* $(Y^1, ..., Y^r, X_1, ..., X_s)$ *uma função diferenciável*

$$f = A(Y^1, ..., Y^r, X_1, ..., X_s) : M^n \to \mathbb{R}.$$

A posição que Y^i *ocupa é chamada i-ésima entrada contravariante e a posição que* X_j *ocupa é chamada de j-ésima entrada covariante. Desta maneira, os* $(0, s)$*-tensores são ditos covariantes e os* $(r, 0)$*-tensores são ditos contravariantes. Denotamos por* $\mathfrak{T}_s^r$ *o módulo de todos os* (r, s)*-tensores sobre* $C^\infty(M)$.

Definição 1.2.3. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana. O* ***tensor curvatura de Riemann*** *é o* $(1,3)$*-tensor*

$$R_m = \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$R_m(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Em coordenadas,

$$R_m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Ademais, quando necessário, faremos a seguinte convenção $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$. *Também é possível interpretar o tensor* R_m *como um* $(0,4)$*-tensor, definido por*

$$R_m = \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),$$

onde

$$R_m(X, Y, Z, W) = g(R_m(X, Y)Z, W).$$

Em coordenadas,

$$R_m(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}.$$

Proposição 1.2.4. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $R_m(X, Y, W, Z) = -R_m(Y, X, W, Z) = R_m(Y, X, Z, W)$.

(ii) $R_m(X, Y, W, Z) = R_m(W, Z, X, Y)$.

(iii) Primeira Identidade de Bianchi

$$R_m(X, Y, W, Z) + R_m(Y, W, X, Z) + R_m(W, X, Y, Z) = 0.$$

Em coordenadas,

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

(iv) Segunda Identidade de Bianchi

$$(\nabla_W R_m)(X, Y, Z, U) + (\nabla_Y R_m)(W, X, Z, U) + (\nabla_X R_m)(Y, W, Z, U) = 0.$$

Em coordenadas,

$$\nabla_l R_{ijks} + \nabla_j R_{liks} + \nabla_i R_{jlks} = 0.$$

Demonstração. Para as demonstrações dos itens veja [23]. □

Definição 1.2.5. *O **tensor curvatura de Ricci** é o* $(0,2)$*-tensor*

$$\mathsf{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^{\infty}(M)$$

dado pelo traço do tensor curvatura de Riemann, isto é,

$$\mathsf{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}\{Y \mapsto R_m(X,Y)Z\},$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*. Em coordenadas,*

$$(\mathsf{Ric})_{ik} = R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}.$$

Proposição 1.2.6. *A curvatura de Ricci é um campo tensorial simétrico, isto é,*

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

Demonstração. De fato, fazendo uso da Proposição (1.2.4),

$$R_{ij} = \sum_{k,m=1}^{n} g^{km} R_{ikjm} = \sum_{k,m=1}^{n} g^{km} R_{jmik} = \sum_{k,m=1}^{n} g^{mk} R_{jmik} = R_{ji}.$$

□

Definição 1.2.7. *A **curvatura escalar** de uma variedade é a função* $R : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$R = \mathrm{tr}(\mathsf{Ric}).$$

Em coordenadas,

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Proposição 1.2.8. *(Identidade de Ricci) Seja* M *uma variedade Riemanniana e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Para quaisquer campos* $X, Y, X \in \mathfrak{X}(M)$*, vale a seguinte identidade*

$$(\nabla_X \mathrm{Hess} f)(Y,Z) - (\nabla_Y \mathrm{Hess} f)(X,Z) = \langle R(X,Y)Z, \nabla f \rangle.$$

Em coordenadas,

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = R_{ijkl} \nabla_l f.$$

Demonstração. Para a demonstração veja [18]. □

Proposição 1.2.9. *Em uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *vale* *(i) Identidade de Ricci contraída uma vez*

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = g^{ls} \nabla_l R_{ijks}; \tag{1.3}$$

(ii) Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes

$$g^{jk} \nabla_j R_{ik} = \frac{1}{2} \nabla_i R. \tag{1.4}$$

Demonstração. Para demonstrar o item (i), tome o traço na Segunda Identidade de Bianchi, obtendo

$$\begin{aligned}
0 &= g^{ls}\nabla_l R_{jiks} + g^{ls}\nabla_j R_{ilks} + g^{ls}\nabla_i R_{ljks} \\
&= g^{ls}\nabla_l R_{jiks} + \nabla_j (g^{ls} R_{ilks}) - \nabla_j (g^{ls}) R_{ilks} + \nabla_i (g^{ls} R_{ljks}) - \nabla_i (g^{ls}) R_{ljks} \\
&= g^{ls}\nabla_l R_{jiks} + \nabla_j (g^{ls} R_{ilks}) + \nabla_i (g^{ls} R_{ljks}) \\
&= g^{ls}\nabla_l R_{jiks} + \nabla_j (g^{ls} R_{ilks}) - \nabla_i (g^{ls} R_{jlks}) \\
&= -g^{ls}\nabla_l R_{ijks} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = g^{ls} \nabla_l R_{ijks}.$$

Para mostrar o item (ii), vamos reescrever a equação acima da seguinte maneira

$$\nabla_j R_{ik} = \nabla_i R_{jk} + g^{ls} \nabla_l R_{ijks}. \tag{1.5}$$

Tomando o traço de (1.5), temos

$$\nabla_i (g^{jk} R_{jk}) = g^{jk} \nabla_j R_{ik} + g^{ls} \nabla_l (g^{jk} R_{ijsk}),$$

isto é,

$$\nabla_i R = g^{jk} \nabla_j R_{ik} + g^{ls} \nabla_l R_{is}.$$

Portanto,

$$\nabla_i R = 2 g^{jk} \nabla_j R_{ik},$$

onde foram feitas as trocas convenientes dos índices $s \leftrightarrow k$ e $l \leftrightarrow j$. Assim, concluímos a demonstração. □

Definição 1.2.10. *Dados dois vetores* X *e* Y *não nulos e linearmente independentes em* T_pM*, a curvatura seccional do plano* σ *gerado pelos vetores* X *e* Y *é dada por*

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2 |Y|^2 - g(X, Y)^2}.$$

Utilizando a curvatura seccional, podemos dar uma interpretação geométrica para a curvatura de Ricci. De fato, seja X um vetor unitário em T_pM e $\{X, E_2, ..., E_n\}$ uma base ortonormal de T_pM.

Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,X) = R_{11} &= \sum_{k,m=1}^{n} g^{km} R_{k11m} = \sum_{k,m=1}^{n} \delta^{km} R(X, E_k, E_m, X) = \sum_{k=1}^{n} R(X, E_k, E_k, X) \\ &= \sum_{k=2}^{n} R(X, E_k, E_k, X) = \sum_{k=2}^{n} \frac{R(X, E_k, E_k, X)}{|X \wedge E_k|}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

ou seja,

$$\mathrm{Ric}(X,X) = \sum_{k=2}^{n} K(X, E_k). \tag{1.7}$$

Definição 1.2.11. *Seja* T *um tensor de ordem* r. *A diferencial covariante* ∇T *de* T *é um tensor de ordem* $(r+1)$ *dada por*

$$\nabla T\left(Y_1, \ldots, T_r, Z\right) = Z\left(T\left(Y_1, \ldots, Y_r\right)\right) - T\left(\nabla_Z Y_1, \ldots, Y_r\right) - \ldots - T\left(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r\right).$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, *a derivada covariante* $\nabla_Z T$ *de* T *em relação a* Z *é um tensor de ordem r dado por*

$$\nabla_Z T\left(Y_1, \ldots, Y_r\right) = \nabla T\left(Y_1, \ldots, Y_r, Z\right).$$

Proposição 1.2.12. *Seja* T *um* $(0,2)$*-tensor e* g *a métrica Riemanniana, então*

$$\langle g, T \rangle = \mathrm{tr}\{T\}.$$

Demonstração. Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal. Sendo T um $(0,2)$-tensor e escrevendo $T_{ij} = T\left(e_i, e_j\right)$, temos

$$\langle g, T \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} T_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} T_{ij} = \sum_{i} T_{ii} = \mathrm{tr}_g\{T\}.$$

Portanto, $\langle g, T \rangle = \mathrm{tr}\{T\}$. □

Para $n \geqslant 3$, a decomposição ortogonal do tensor de Riemann é dada por

$$R_m = W + A \oslash g \tag{1.8}$$

onde A é o tensor de Schouten,

$$A = \frac{1}{n-2}\left(\mathrm{Ric} - \frac{R}{2(n-1)} g\right), \tag{1.9}$$

W é o tensor de Weyl e $\owedge$ é o produto de Kulkarni-Nomizo entre tensores simétricos de ordem 2 definido por

$$(T \owedge S)_{ijkl} = T_{ik}S_{jl} + T_{jl}S_{ik} - T_{il}S_{jk} - T_{jk}S_{il}, \tag{1.10}$$

para quaisquer $(0,2)$-tensores T e S. Logo, podemos reescrever (1.8) como

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(Ric \owedge g)_{ijkl} - \frac{R}{2(n-1)(n-2)}(g \owedge g)_{ijkl} \\ &= W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}\right) \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Proposição 1.2.13. *O tensor de Weyl satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) W *é livre de traços.*

(ii) $W_{ijkl} = -W_{jikl} = W_{jilk}$.

(iii) O tensor W *satisfaz a primeira identidade de Bianchi, isto é,*

$$W_{ijkl} + W_{jkil} + W_{kijl} = 0.$$

Demonstração. Para o item (i), tome o traço do tensor W em relação a i, k. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} g^{ik}W_{ijkl} &= \sum_{i,k}\Big(g^{ik}R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left(g^{ik}R_{ik}g_{jl} + g^{ik}R_{jl}g_{ik} - g^{ik}R_{il}g_{jk} - g^{ik}R_{jk}g_{il}\right) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g^{ik}g_{ik}g_{jl} - g^{ik}g_{il}g_{jk}\right)\Big) \\ &= \sum_{i,k}\Big(R_{jl} - \frac{1}{n-2}\left(Rg_{jl} + nR_{jl} - \delta_{ij}R_{il} - \delta_{kl}R_{jk}\right) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(ng_{jl} - \delta_{kl}g_{jk}\right)\Big) \\ &= \sum_{k}\Big(R_{jl} - \frac{1}{n-2}\left(Rg_{jl} + nR_{jl} - R_{jl} - \delta_{kl}R_{jk}\right) \\ &\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(ng_{jl} - \delta_{kl}g_{jk}\right)\Big), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k} g^{ik} W_{ijkl} &= R_{jl} - \frac{1}{n-2}\left(Rg_{jl} + nR_{jl} - R_{jl} - R_{jl}\right) \\
&\quad + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(ng_{jl} - g_{jl}\right) \\
&= R_{jl} - \frac{1}{n-2}\left(Rg_{jl} + (n-2)R_{jl}\right) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(n-1)g_{jl} \\
&= -\frac{R}{n-2}g_{jl} + \frac{R}{n-2}g_{jl} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, é possível mostrar que em quaisquer dois índices o tensor de Weyl é livre de traços.

Para demonstrar o item (ii), observe que

$$\begin{aligned}
W_{ijkl} &= R_{ijkl} - (A \owedge g)_{ijkl} \\
&= -R_{jikl} - \left(A_{ik}g_{jl} + A_{jl}g_{ik} - A_{il}g_{jk} - A_{jk}g_{il}\right) \\
&= -R_{jikl} + A_{jk}g_{il} + A_{il}g_{jk} - A_{jl}g_{ik} - A_{ik}g_{jl} \\
&= -\left(R_{jikl} - (A \owedge g)_{jikl}\right) \\
&= -W_{jikl},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-W_{jikl} &= -\left(R_{jikl} - (A \owedge g)_{jikl}\right) \\
&= -R_{jikl} + A_{jk}g_{il} + A_{il}g_{jk} - A_{jl}g_{ik} - A_{ik}g_{jl} \\
&= R_{jilk} - \left(A_{jl}g_{ik} + A_{ik}g_{jl} - A_{jk}g_{il} - A_{il}g_{jk}\right) \\
&= R_{jilk} - (A \owedge g)_{jilk} \\
&= W_{jikl},
\end{aligned}$$

o que prova o item (ii).

Substituindo a Equação (1.8) na primeira identidade de Bianchi, temos

$$\begin{aligned}
0 &= R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} \\
&= \left(W_{ijkl} + (A \owedge g)_{ijkl}\right) + \left(W_{jkil} + (A \owedge g)_{jkil}\right) \\
&\quad + \left(W_{kijl} + (A \owedge g)_{kijl}\right).
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} W_{ijkl} + W_{jkil} + W_{kijl} &= -(A \owedge g)_{ijkl} - (A \owedge g)_{jkil} - (A \owedge g)_{kijl} \\ &= -A_{ik}g_{jl} - A_{jl}g_{ik} + A_{il}g_{jk} + A_{jk}g_{il} \\ &\quad -A_{ji}g_{kl} - A_{kl}g_{ji} + A_{jl}g_{ki} + A_{ki}g_{jl} \\ &\quad -A_{kj}g_{il} - A_{il}g_{kj} + A_{kl}g_{ij} + A_{ij}g_{kl} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que mostra o item (iii). □

Observação 1.2.14. *Em uma variedade Riemanniana com dimensão $n = 3$, o tensor de Weyl se anula. Veja Exercício 1.58 de [18].*

Definição 1.2.15. *O **tensor de Cotton** é um $(0, 3)$-tensor em (M, g) dado por*

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} \left(g_{jk} \nabla_i R - g_{ik} \nabla_j R \right). \tag{1.12}$$

Em termos do tensor Schouten (1.9), é válido reescrever o tensor de Cotton como

$$C_{ijk} = (n-2)(\nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik}). \tag{1.13}$$

Proposição 1.2.16. *Para $n \geqslant 4$, os tensores de Cotton e de Weyl satisfazem a seguinte relação*

$$C_{ijk} = -\frac{n-2}{n-3} \nabla_l W_{ijkl}. \tag{1.14}$$

Proposição 1.2.17. *(Propriedades do tensor de Cotton)*

(i) O tensor de Cotton é antissimétrico nas duas primeiras entradas, isto é, $C_{ijk} = -C_{jik}$, $\forall i, j, k$;

(ii) O tensor de Cotton é livre de traços, ou seja, $g^{ij} C_{ijk} = g^{ik} C_{ijk} = 0$.

Demonstração. Pela definição do tensor de Cotton,

$$\begin{aligned} C_{ijk} &= (n-2)(\nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik}) \\ &= -(n-2) \left(\nabla_j A_{ik} - \nabla_i A_{jk} \right) \\ &= -C_{jik}, \end{aligned}$$

o que demonstra o item (i).

Para demonstrar o item (ii), da Equação (1.14), temos

$$g^{ij}C_{ijk} = -g^{ij}\frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl} = -\frac{n-2}{n-3}\nabla_l g^{ij}W_{ijkl} = 0,$$

já que o tensor de Weyl é livre de traços. □

Teorema 1.2.18. *(Weyl-Schouten) Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão* n*. Então,*

(i) Se $n = 2$*, então* (M^n, g) *é localmente conformemente plana.*

(ii) Se $n = 3$*, então* (M^n, g) *é localmente conformemente plana se, e somente se, o tensor de Cotton é nulo.*

(iii) Se $n \geqslant 4$*, então* (M^n, g) *é localmente conformemente plana se, e somente se, o tensor de Weyl é nulo.*

Demonstração. Vide Proposição 1.62 de [18]. □

Definição 1.2.19. *Em uma variedade Riemanniana* (M^n, g)*,* $(n \geqslant 4)$*, o tensor de* ***Bach*** *é definido como*

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ikjl}. \tag{1.15}$$

Proposição 1.2.20. *O tensor de Bach é livre de traços em dimensão* $n \geqslant 4$*, o que pode ser expresso como* $\mathrm{tr}(B) = 0$*.*

Demonstração. Segue diretamente do fato do Cotton e do Weyl serem tensores livres de traço. □

Para o que se segue, diremos que uma métrica Riemanniana é **Bach-flat** quando o tensor de Bach é nulo, isto é, $B_{ij} = 0$.

Por fim, o tensor sem traço $\mathring{T}$ de um $(0, 2)$-tensor T arbitrário em uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dado por

$$\mathring{T}_{ij} = T_{ij} - \frac{\mathrm{tr}(T)}{n}g_{ij}.$$

Outrossim, note que

$$|\mathring{T}|^2 = |T - \frac{\mathrm{tr}(T)}{n}g|^2 = |T|^2 - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}(T))^2.$$

1.3 Variedades de Einstein

Agora, falaremos sobre variedades de Einstein, juntamente com algumas de suas propriedades.

Definição 1.3.1. *Uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *é chamada variedade de Einstein se o tensor de Ricci é um múltiplo da métrica g, ou seja,*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \lambda g(X,Y)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *em que* $\lambda : M \to \mathbb{R}$ *é uma função diferenciável. Em coordenadas,*

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}. \tag{1.16}$$

Observação 1.3.2. *Observe que ao tomar o traço em (1.16), segue que* $R = \lambda n$. *Implicando em* $\lambda = \dfrac{R}{n}$. *Logo,* M *é uma variedade de Einstein se, e somente se,*

$$\mathrm{Ric} = \frac{R}{n} g. \tag{1.17}$$

Proposição 1.3.3. *(Lema de Schur) Seja* (M^n, g) *uma variedade de Einstein conexa de dimensão* $n \geqslant 3$, *então* λ *é constante.*

Demonstração. Das equações (1.16) e (1.17), e pela Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes (1.4), obtemos

$$n\nabla_i\lambda = \nabla_i(n\lambda) = \nabla_i R = 2g^{jk}\nabla_j R_{ik} = 2\nabla_k R_{ik} = 2\nabla_k \lambda g_{ik} = 2\nabla_i\lambda. \tag{1.18}$$

Sendo assim,

$$(n-2)\nabla_i\lambda = 0.$$

Portanto, para $n \geqslant 3$, como M é conexa, segue que λ é constante. □

1.4 Métricas Conformes

O objetivo dessa seção é apresentar algumas relações existentes com respeito a métricas conformes. Veremos como a conexão de Levi-Civita, o gradiente, o divergente, o laplaciano e o tensor de Ricci mudam em uma variedade Riemanniana sob uma mudança conforme da métrica. Tais relações serão essenciais para o entendimento dos exemplos referente à métrica tripla estática positiva. É válido ainda informar que a maioria das demonstrações encontram-se em [12].

Definição 1.4.1. *Duas métricas Riemannianas* g *e* $\tilde{g}$ *em uma variedade diferenciável* M *são ditas* ***conformes*** *se existe uma função positiva suave* $f : M \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\tilde{g} = fg.$$

A função f é denominada o **fator de conformidade** entre as métricas. O conjunto de todas as métricas conformes a uma métrica g é chamado de classe conforme e é denotado por $[g]$, isto é,

$$[g] := \{\tilde{g} = fg; f \in C^\infty(M) \text{ é positiva }\}.$$

No restante desta seção, (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana n-dimensional com métrica g, e $\tilde{g} = fg$ é outra métrica em M, conforme a g. Por razões específicas, escreveremos com frequência $f = e^{2h}$, onde $h : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave.

Proposição 1.4.2. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana e* $\tilde{g} = e^{2h}g$*, com* $h \in C^\infty(M)$*. Se* $f : M \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

$$\tilde{\nabla} f = e^{-2h}\nabla f. \tag{1.19}$$

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ um referencial local em $U \in M$, ortonormal em relação à métrica g, é imediato verificar que $\{e^{-h}e_1, e^{-h}e_2, ..., e^{-h}e_n\}$ é um referencial ortonormal em relação à $\tilde{g}$. Daí, pela Proposição (1.1.2), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} f &= \sum_{i=1}^{n} e^{-h}e_i(f)e^{-h}e_i \\ &= e^{-2h}\sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i \\ &= e^{-2h}\nabla f. \end{aligned}$$

□

A seguir, relacionaremos as conexões de Levi-Civita de $\tilde{g}$ e g. Para isso, lembre da **fórmula de Koszul** (pg. 45 de [23]): se $\langle , \rangle$ é a métrica Riemanniana de M, ∇ a conexão de Levi-Civita correspondente e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$2\langle Z, \nabla_Y X\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle. \tag{1.20}$$

Proposição 1.4.3. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana com métrica* g *e* $\tilde{g} = e^{2h}g$*, com* $h : M \to \mathbb{R}$ *suave. Se* ∇ *e* $\tilde{\nabla}$ *denotam respectivamente as conexões de Levi-Civita de* g *e* $\tilde{g}$*, então, para todos* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, temos*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(h)Y + Y(h)X - g(X, Y)\nabla h, \tag{1.21}$$

onde ∇h *denota o gradiente de* h *na métrica* g.

Demonstração. Segue da fórmula de Koszul para $\tilde{g}\left(\nabla_X Y, Z\right)$ que

$$\begin{aligned} 2e^{2h} g\left(\tilde{\nabla}_X Y, Z\right) &= 2\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_X Y, Z\right) \\ &= X(\tilde{g}(Y,Z)) + Y(\tilde{g}(X,Z)) - Z(\tilde{g}(X,Y)) \\ &\quad -\tilde{g}([X,Y],Z) - \tilde{g}([Y,Z],X) + \tilde{g}([Z,X],Y) \\ &= X\left(e^{2h}g(Y,Z)\right) + Y\left(e^{2h}g(X,Z)\right) - Z\left(e^{2u}g(X,Y)\right) \\ &\quad -e^{2h}g([X,Y],Z) - e^{2h}g([Y,Z],X) + e^{2h}g([Z,X],Y) \\ &= 2X(h)e^{2h}g(Y,Z) + 2Y(h)e^{2h}g(X,Z) - 2Z(h)e^{2h}g(X,Y) \\ &\quad +e^{2h}X(g(Y,Z)) + e^{2h}Y(g(X,Z)) - e^{2h}Z(g(X,Y)) \\ &\quad -e^{2h}g([X,Y],Z) - e^{2h}g([Y,Z],X) + e^{2h}g([Z,X],Y). \end{aligned}$$

Cancelando o fator $2e^{2h}$ e substituindo a fórmula de Koszul para $g\left(\nabla_X Y, Z\right)$ nas duas últimas linhas acima, obtemos

$$\begin{aligned} g\left(\tilde{\nabla}_X Y, Z\right) &= X(h)g(Y,Z) + Y(h)g(X,Z) - Z(h)g(X,Y) + g\left(\nabla_X Y, Z\right) \\ &= g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g(X(h)Y + Y(h)X, Z) - g(Z, \nabla h)g(X,Y) \\ &= g\left(\nabla_X Y + X(h)Y + Y(h)X - g(X,Y)\nabla h, Z\right). \end{aligned}$$

Por fim, como a igualdade acima é válida para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$, segue a relação (1.21). $\square$

Iremos analisar agora a mudança do divergente para a métrica conforme.

Proposição 1.4.4. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana com métrica* g, *e* $\tilde{g} = e^{2h}g$, *com* $h : M \to \mathbb{R}$ *suave. Para* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *temos*

$$\tilde{\operatorname{div}} X = \operatorname{div} X + nX(h). \tag{1.22}$$

Demonstração.

$$\tilde{\operatorname{div}} X = \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i} X, \tilde{e}_i\right) = g\left(\tilde{\nabla}_{e_i} X, e_i\right).$$

Segue então de (1.21) que

$$\begin{aligned} \tilde{\operatorname{div}} X &= g\left(\nabla_{e_i} X + e_i(h)X + X(h)e_i - g\left(e_i, X\right)\nabla h, e_i\right) \\ &= g\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right) + e_i(h)g\left(X, e_i\right) + X(h)g\left(e_i, e_i\right) - g\left(e_i, X\right)g\left(\nabla h, e_i\right) \\ &= \operatorname{div} X + nX(h). \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 1.4.5. *Nas notações acima, se* $f : M \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

$$\tilde{\Delta} f = e^{-2h}(\Delta f + (n-2)g(\nabla f, \nabla h)).$$

Em particular, se $n = 2$ *ou h é constante, então*

$$\tilde{\Delta} f = e^{-2h}\Delta f.$$

Demonstração. Segue de (1.19) e (1.22) que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} f &= \tilde{\text{div}}(\tilde{\nabla} f) = \tilde{\text{div}}\left(e^{-2h}\nabla f\right) \\
&= \text{div}\left(e^{-2h}\nabla f\right) + ne^{-2h}\nabla f(h) \\
&= e^{-2h}\,\text{div}(\nabla f) + g\left(\nabla\left(e^{-2h}\right), \nabla f\right) + ne^{-2h}\nabla f(h) \\
&= e^{-2h}\Delta f + g\left(\nabla\left(e^{-2h}\right), \nabla f\right) + ne^{-2h}g(\nabla f, \nabla h).
\end{aligned}$$

Ademais, temos $\nabla\left(e^{-2h}\right) = -2e^{-2h}\nabla h$, de modo que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} f &= e^{-2h}\Delta f - 2e^{-2h}g(\nabla h, \nabla f) + ne^{-2h}g(\nabla f, \nabla h) \\
&= e^{-2h}(\Delta f + (n-2)g(\nabla h, \nabla f)).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.4.6. *Se* Ric *e* $\tilde{\text{Ric}}$ *denotam respectivamente as curvaturas de Ricci de* M *com respeito às métricas* g *e* $\tilde{g} = e^{2h}g$, *então*

$$\tilde{R_{ij}} = R_{ij} - (n-2)\nabla_i\nabla_j h + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h - (\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2)g_{ij}. \tag{1.23}$$

Demonstração. Vide [40]. □

Corolário 1.4.7. *Seja* $\tilde{g} = e^{-2h}g$, *então*

$$\tilde{R} = e^{-2h}(R - 2(n-1)\Delta h - (n-2)(n-1)|\nabla h|^2). \tag{1.24}$$

1.5 Produto Warped

Nesta seção, abordaremos os conhecimentos sobre Produtos Warped que serão necessários para os cálculos desenvolvidos nos exemplos de métricas estáticas. Para tal exposição, nos baseamos nas informações apresentadas em [21], [24] e [38].

Sejam N^n uma variedade Riemanniana n-dimensional e $\mathbb{R} \times N^n$ a variedade produto

$(n+1)$-dimensional.

Defina em $\mathbb{R} \times N^n$ a métrica Riemanniana

$$\langle , \rangle = \sigma^*(dt)^2 + (\phi \circ \sigma)^2 \pi^* \langle , \rangle_N, \tag{1.25}$$

onde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave positiva, $\sigma : \mathbb{R} \times N^n \to \mathbb{R}$ e $\pi : \mathbb{R} \times N^n \to N^n$ são as projeções canônicas de $\mathbb{R} \times N^n$ em cada fator e $\langle , \rangle_N$ é a métrica em N^n. Podemos escrever por simplicidade,

$$\langle , \rangle = dt^2 + \phi^2 \langle , \rangle_N.$$

Escreveremos $M = \mathbb{R} \times_\phi N^n$ para representar a variedade produto $\mathbb{R} \times N^n$ munida com a métrica (1.25) e diremos nesse caso que $\mathbb{R} \times_\phi N^n$ é o produto warped de $\mathbb{R}$ por N^n com a **função warped** ϕ. A variedade $\mathbb{R}$ é chamada de **base** e N^n de **fibra** do produto warped $\mathbb{R} \times N^n$.

Como σ e π são submersões, temos que, dado $q = (t, p) \in M$, $\sigma^{-1}(t)$ e $\pi^{-1}(p)$ são subvariedade de M com dimensão n e 1, respectivamente.
Por exemplo, a subvariedade $\sigma^{-1}(t)$ é a variedade $\{t\} \times N^n$ com a métrica

$$\langle , \rangle = (\phi(t))^2 \pi^* \langle , \rangle_N.$$

Dizemos que $\sigma^{-1}(t) = \{t\} \times N^n$ é uma **folha** de M e $\pi^{-1}(p) = \mathbb{R} \times \{p\}$ é uma **fibra** de M.

Ademais, um vetor tangente a M será chamado de **vertical** se ele for tangente a uma fibra e um campo de vetores será vertical se for inteiramente composto por vetores verticais. Analogamente, um vetor tangente a M e normal a uma fibra será chamado de vetor **horizontal** e um campo de vetores será horizontal se for composto somente por vetores horizontais. Veja que, em cada ponto $q = (t, p) \in M$, vetor horizontal em q é tangente a folha $\sigma^{-1}(t)$, e vetor vertical em q é tangente a fibra $\pi^{-1}(p)$.

Observação 1.5.1. *Dado* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, tem-se* $[X, \partial_t] = 0$*. De fato, seja* $\{t, x_1, \ldots, x_n\}$ *um sistema de coordenadas em* $M = \mathbb{R} \times_\phi N^n$*. Assim, se* $h \in C^\infty(N)$ *e* $X = \sum_i \alpha_i \partial_i$*, então*

$$\begin{aligned}\partial_t(X(h)) = \partial_t\left(\sum_i \alpha_i \partial_i(h)\right) &= \sum_i \partial_t\left(\alpha_i \partial_i(h)\right) \\ &= \sum_i \left\{\partial_t\left(\alpha_i\right)\partial_i(h) + \alpha_i \partial_t\left(\partial_i(h)\right)\right\}.\end{aligned}$$

Como α_i *não depende de* t*, então* $\partial_t(\alpha_i) = 0$*.*

Usando o Teorema de Schwarz do $\mathbb{R}^n$*, obtemos*

$$\partial_t(X(h)) = X(\partial_t(h)).$$

Portanto o colchete $[X, \partial_t] = 0$*.*

Proposição 1.5.2. *Sejam* $M = \mathbb{R} \times_\phi N^n$ *e* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, ou seja,* X *é um campo horizontal. Então:*

(i) $\nabla_X \partial_t = \nabla_{\partial_t} X = \dfrac{\phi'}{\phi} X$,

(ii) $\nabla_{\partial_t} \partial_t = 0$.

Demonstração. (i) Devemos notar que $\langle \nabla_X \partial_t, \partial_t \rangle = 0$. De fato, pela fórmula de Koszul, temos

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X \partial_t, \partial_t \rangle = & X\langle \partial_t, \partial_t \rangle + \partial_t \langle \partial_t, X \rangle - \partial_t \langle X, \partial_t \rangle \\ & - \langle X, [\partial_t, \partial_t] \rangle + \langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle + \langle \partial_t, [X, \partial_t] \rangle. \end{aligned}$$

Com exceção dos termos $\langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle$ e $\langle \partial_t, [X, \partial_t] \rangle$ todos os outros termos são nulos, de forma que a equação acima reduz-se a

$$2\langle \nabla_X \partial_t, \partial_t \rangle = \langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle + \langle \partial_t, [X, \partial_t] \rangle.$$

Como o colchete de campos é anti-simétrico, ou seja, $[X, Y] = -[Y, X], \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos $\langle \nabla_X \partial_t, \partial_t \rangle = 0$. Logo, $\nabla_X \partial_t$ é horizontal.

Segue da observação (1.5.1) e da simetria da conexão afim de M^{n+1} que $\nabla_{\partial_t} X = \nabla_X \partial_t$.

Para mostrarmos que $\nabla_X \partial_t = \dfrac{\phi'}{\phi} X$, tome Y um campo horizontal. Desse modo,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X \partial_t, Y \rangle &= X\langle \partial_t, Y \rangle + \partial_t \langle Y, X \rangle - Y\langle X, \partial_t \rangle \\ &\quad - \langle X, [\partial_t, Y] \rangle + \langle \partial_t, [Y, X] \rangle + \langle Y, [X, \partial_t] \rangle \\ &= \partial_t \langle Y, X \rangle + \langle \partial_t, [Y, X] \rangle = \partial_t \langle Y, X \rangle, \end{aligned}$$

onde usamos a observação (1.5.1) e na última equação que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ é ortogonal a ∂_t.

Da definição da métrica de M^{n+1}, (1.25), segue que

$$2\langle \nabla_X \partial_t, Y\rangle = \partial_t \left(\phi^2 \langle X, Y\rangle_N\right),$$

pois $(\pi_{\mathbb{R}})_* (X) = 0, \forall X \in \mathfrak{X}(N)$.

Assim, como $\partial_t (\langle X, Y\rangle_N) = 0$, então

$$2\langle \nabla_X \partial_t, Y\rangle = \partial_t \left(\phi^2\right) \langle X, Y\rangle_N = 2\phi\partial_t(\phi)\langle X, Y\rangle_N = \frac{2\phi'\phi^2}{\phi}\langle X, Y\rangle_N.$$

Novamente da definição da métrica, temos $\langle X, Y\rangle = \phi^2\langle X, Y\rangle_N$, assim,

$$\langle \nabla_X \partial_t, Y\rangle = \left\langle \frac{\phi'}{\phi} X, Y \right\rangle. \tag{1.26}$$

Agora generalizaremos para um campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrário. Como $Z = Z^* + \langle Z, \partial_t\rangle\, \partial_t$, onde $Z^* = (\pi_N)_* (Z)$, então

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \partial_t, Z\rangle &= \langle \nabla_X \partial_t, Z^*\rangle + \langle Z, \partial_t\rangle \langle \nabla_X \partial_t, \partial_t\rangle = \langle \nabla_X \partial_t, Z^*\rangle \\ &= \left\langle \frac{\phi'}{\phi} X, Z^* \right\rangle = \left\langle \frac{\phi'}{\phi} X, Z \right\rangle, \end{aligned}$$

onde usamos a Equação (1.26) e $\langle \nabla_X \partial_t, \partial_t\rangle = 0$. Como Z é arbitrário, segue que $\nabla_X \partial_t = \dfrac{\phi'}{\phi} X$.

Agora provaremos o item (ii). Iniciamos mostrando que $\langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_t\rangle = 0$.

De fato, pela compatibilidade da conexão com a métrica, temos

$$\langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_t\rangle = \partial_t (\langle \partial_t, \partial_t\rangle) - \langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_t\rangle,$$

o que implica em

$$\langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, \partial_t\rangle = \frac{1}{2}\partial_t(1) = 0. \tag{1.27}$$

Com o mesmo raciocínio e o item (i) dessa proposição vamos mostrar que $\langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, X\rangle = 0$.

De fato,

$$\langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, X\rangle = \partial_t (\langle \partial_t, X\rangle) - \langle \partial_t, \nabla_{\partial_t} X\rangle,$$

resultando em

$$\langle \nabla_{\partial_t} \partial_t, X\rangle = \partial_t (\langle \partial_t, X\rangle) + \left\langle \partial_t, \frac{\phi'}{\phi} X \right\rangle.$$

Como $\langle \partial_t, X\rangle = 0$, então

$$\langle \nabla_{\partial_t}\partial_t, X\rangle = 0. \tag{1.28}$$

Segue de (1.27) e (1.28) que $\nabla_{\partial_t}\partial_t$, é horizontal e vertical. Logo é nulo e isto conclui a demonstração. □

Para finalizar esta seção, forneceremos algumas informações do tensor de Riemann em relação a vetores horizontais.

Proposição 1.5.3. *(O'Neill) Sejam $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Escrevamos então $U = U^* + \langle U, \partial_t\rangle\partial_t$, $V = V^* + \langle V, \partial_t\rangle\partial_t$ e $W = W^* + \langle W, \partial_t\rangle\partial_t$, onde $Z^* = (\pi_N)_*(Z)$ é a projeção do campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ sobre a fibra N^n. Então:*

(i) $R(U^*, V^*)\partial_t = 0$;

(ii) $R(U^*, \partial_t)W^* = -R(\partial_t, U^*)W^* = -\langle U^*, W^*\rangle\dfrac{\phi''}{\phi}\partial_t = -(\langle U, W\rangle - \langle U, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle)\dfrac{\phi''}{\phi}\partial_t$;

(iii) $R(U^*, \partial_t)\partial_t = \dfrac{\phi''}{\phi}U^* = \dfrac{\phi''}{\phi}(U - \langle U, \partial_t\rangle\partial_t)$;

(iv) $R(\partial_t, V^*)W^* = \langle V^*, W^*\rangle\dfrac{\phi''}{\phi}\partial_t = (\langle V, W\rangle - \langle V, \partial_t\rangle\langle W, \partial_t\rangle)\dfrac{\phi''}{\phi}\partial_t$;

(v) $R(\partial_t, V^*)\partial_t = -R(V^*, \partial_t)\partial_t = -\dfrac{\phi''}{\phi}V^* = -\dfrac{\phi''}{\phi}(V - \langle V, \partial_t\rangle\partial_t)$;

(vi) $R(\partial_t, \partial_t) = 0$.

Demonstração. Vide 7.42 de [38]. □

Capítulo 2

Exemplos e propriedades

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns exemplos das métricas estudadas nesta dissertação, bem como expôr relações essenciais para a demonstração dos resultados posteriores.

Iniciaremos relembrando a definição de métricas V-estáticas fazendo a seguinte análise. Note que as equações (3) e (5) podem ser unificadas desta forma:
Pela definição (0.0.1), segue que a métrica CPE $(M^n, g, \tilde{f})$ satisfaz

$$-(\Delta\tilde{f})g_{ij} + \nabla_i\nabla_j\tilde{f} - \tilde{f}R_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij},$$

onde R é uma constante.
Faça $\tilde{f} = f - 1$. Desse modo,

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - (f-1)R_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}, \tag{2.1}$$

o que implica em

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - fR_{ij} = -\frac{R}{n}g_{ij}, \tag{2.2}$$

onde $-\frac{R}{n}$ é uma constante. Obviamente, (2.2) é uma equação V-estática. Sendo assim, resumimos a equação da métrica CPE e a equação da métrica V-estática desse modo:

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - fR_{ij} = \kappa g_{ij}, \tag{2.3}$$

onde κ é uma constante. Tomando o traço na fórmula acima,

$$\Delta f = -\frac{fR + n\kappa}{n-1}. \tag{2.4}$$

Subtituindo (2.4) em (2.3),

$$fR_{ij} - \nabla_i\nabla_j f - \frac{fR}{n-1}g_{ij} = \frac{\kappa}{n-1}g_{ij}. \tag{2.5}$$

Sendo (M^n, g, f) uma solução não-trivial da Equação (3) Einstein, então aplicando o Teorema de Obata [37], podemos deduzir que (M^n, g) é isométrica à esfera padrão. Esse é o único exemplo de métrica CPE que conhecemos até os dias atuais, e essa questão gerou a conjectura CPE exposta na introdução deste mesmo trabalho.

Exemplo 2. *Considere* $\mathbb{S}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ *a função altura definida por* $f(x_1, ..., x_{n+1}) = x_{n+1}$. *Desse modo,* $\mathrm{Hess} f = -fg$, $-\Delta f = nf$ *e* $\mathrm{Ric} = (n-1)g$ *(ver o apêndice da dissertação [42]), o que implica em*

$$-(\Delta f)g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} = nfg - fg - f(n-1)g = 0,$$

e por outro lado,

$$\mathrm{Ric} - \frac{R}{n} = 0.$$

Observação 2.0.1. *No presente exposto, iremos considerar somente a tripla estática positiva, isto é, o caso em que* $R > 0$. *De fato, tomando o traço em*

$$-(\Delta f)g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} = 0,$$

obtemos

$$\Delta f = -\frac{R}{n-1} f. \tag{2.6}$$

Multiplicando por f *em ambos os lados,*

$$f\Delta f = -\frac{R}{n-1} f^2. \tag{2.7}$$

Porém, $\mathrm{div}(f\nabla f) = |\nabla f|^2 + f\Delta f$. *Substituindo (2.7) e integrando, vale*

$$\int_M \left(|\nabla f|^2 - \frac{R}{n-1} f^2 \right) dM_g = 0.$$

Supondo $R \leqslant 0$, *temos*

$$|\nabla f|^2 = \frac{R}{n-1} f^2,$$

o que implica em $|\nabla f|^2 = 0$, *e, consequentemente,* $f = 0$ *(caso trivial).*

Apresentaremos agora alguns exemplos de métricas estáticas.

Exemplo 3. *(Espaço de Schwarzschild) Para alguma constante* $m \in \left(0, \sqrt{\frac{(n-2)^{n-2}}{n^n}}\right)$, *consideremos o espaço de Schwarzschild definido por*

$$\left(M = [r_1, r_2] \times \mathbb{S}^{n-1}, g = \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2} dt^2 + t^2 s, f(t) = \sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2} \right),$$

onde $0 < r_1 < r_2$ *são raízes de* f *e* s *denota a métrica canônica de* $\mathbb{S}^{n-1}$*. Neste caso, trata-se de uma tripla estática positiva conformemente plana que não satisfaz a condição de Ricci paralelo. De fato, definamos*

$$\tilde{g} = dt^2 + \phi^2(t)s,$$

onde $\phi(t) = t\sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}$*.*

Veja que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2}\tilde{g} &= \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2}(dt^2 + \phi^2(t)s) \\ &= \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2}dt^2 + \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2}t^2(1 - 2mt^{2-n} - t^2)s \\ &= \frac{1}{1 - 2mt^{2-n} - t^2}dt^2 + t^2 s \\ &= g. \end{aligned}$$

Desse modo, $\tilde{g}$ *é conforme à métrica* g*.*

Afim de facilitar os cálculos, podemos escrever

$$e^{2h} = (1 - 2mt^{2-n} - t^2)^{-1}. \tag{2.8}$$

Portanto, $\tilde{g} = e^{-2h}g$*.*

Para o que segue, seja $\{\tilde{e}_1 = \partial t, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_n\}$ *um referencial ortonormal para* $(M, \tilde{g})$ *com* $\{\tilde{e}_i\}_{i\geqslant 2}$ *tangente à esfera* $\mathbb{S}^{n-1}$*. Sendo assim, usando a equação de Gauss e a Proposição (1.5.2),*

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} &= \tilde{R}^M_{ijkl} + (s_{ik}s_{jl} - s_{il}s_{jk}) \\ &= \tilde{R}^M_{ijkl} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2(\tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl} - \tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Consequentemente, tomando o traço em jl*,*

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ik} &= \sum_{j=2}^{n}\tilde{R}_{ijkj} + \frac{\phi'^2}{\phi^2}\left(\tilde{g}_{ik}(n-1) - \sum_{j=2}^{n}\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\right) \\ &= \sum_{j=2}^{n}\tilde{R}_{ijkj} + \frac{\phi'^2}{\phi^2}(\tilde{g}_{ik}(n-1) - \tilde{g}_{ik}) \\ &= \sum_{j=2}^{n}\tilde{R}_{ijkj} + \frac{\phi'^2}{\phi^2}(n-2)\tilde{g}_{ik}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Observe que

$$\tilde{R}^M_{ik} = \sum_{j=1}^{n}\tilde{R}_{ijkj} = \tilde{R}_{i1k1} + \sum_{j=2}^{n}\tilde{R}_{ijkj},$$

ou seja,

$$\sum_{j=2}^{n} \tilde{R}_{ijkj} = \tilde{R}^M_{ik} - \tilde{R}_{i1k1}.$$

Desse modo, substituindo em (2.10),

$$R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ik} = \tilde{R}^M_{ik} - \tilde{R}_{i1k1} + \frac{\phi'^2}{\phi^2}(n-2)\tilde{g}_{ik},$$

e, utilizando a Proposição (1.5.3), segue que

$$\begin{aligned} \tilde{R}^M_{ik} &= R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ik} + \tilde{R}_{i1k1} - \frac{\phi'^2}{\phi^2}(n-2)\tilde{g}_{ik} \\ &= R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ik} + \left(-\frac{\phi''}{\phi}\tilde{g}_{ik} \right) - \frac{\phi'^2}{\phi^2}(n-2)\tilde{g}_{ik}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \tilde{R}^M_{ik} &= \frac{n-2}{\phi^2}\tilde{g}_{ik} - \frac{\phi''}{\phi}\tilde{g}_{ik} - \frac{\phi'^2}{\phi^2}(n-2)\tilde{g}_{ik} \\ &= \left[-\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \right) \right] \tilde{g}_{ik}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

para todo $2 \leqslant i, k \leqslant n$.

Vejamos agora que, para todo $i \geqslant 2$, $\tilde{Ric}^M(\partial t, e_i) = 0$ *e* $\tilde{Ric}^M(\partial t, \partial t) = -\dfrac{\phi''}{\phi}(n-1)$.

De fato,

$$\tilde{Ric}^M(\partial t, e_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle \tilde{R}(\partial t, e_j)e_i, e_j \rangle = 0. \tag{2.12}$$

Outrossim,

$$\begin{aligned} \tilde{Ric}^M(\partial t, \partial t) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{R}(\partial t, e_i)\partial t, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{n} \langle \tilde{R}(\partial t, e_i)\partial t, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{n} \langle -\tilde{\nabla}_{\partial t}\tilde{\nabla}_{e_i}\partial t + \tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{\nabla}_{\partial t}\partial t + \tilde{\nabla}_{[\partial t, e_i]}\partial t, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Fazendo uso da Proposição (1.5.2) e utilizando o fato de $\tilde{\nabla}$ *ser a conexão de Levi-Civita, em particular,* $[\partial t, e_i] = \tilde{\nabla}_{\partial t}e_i - \tilde{\nabla}_{e_i}\partial t = 0$,

$$\tilde{Ric}^M(\partial t, \partial t) = \sum_{i=2}^{n} \left\langle -\tilde{\nabla}_{\partial t}\left(\frac{\phi'}{\phi}e_i \right), e_i \right\rangle,$$

em consonância com as propriedades de conexão e a Proposição (1.5.2),

$$\tilde{Ric}^M(\partial t, \partial t) = \sum_{i=2}^{n} \left\langle -\left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' e_i - \frac{\phi'}{\phi}\tilde{\nabla}_{\partial t}e_i, e_i \right\rangle.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{Ric}^M(\partial t, \partial t) &= \sum_{i=2}^{n}\left[-\left(\frac{\phi''\phi-\phi'^2}{\phi^2}\right)-\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\right]\langle e_i, e_i\rangle \\
&= \left[-\frac{\phi''}{\phi}+\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2-\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\right]\sum_{i=2}^{n}\langle e_i, e_i\rangle \\
&= -\frac{\phi''}{\phi}(n-1). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Através dessas informações, conseguimos desenvolver os cálculos para obter o tensor de Ricci. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\tilde{Ric}^M(X, Y) &= \tilde{Ric}^M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\tilde{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\tilde{e}_j\right) \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[x_i y_1 \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_i, \tilde{e}_1)+\sum_{j=2}^{n} x_i y_j \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)\right] \\
&= x_1 y_1 \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1)+\sum_{i=2}^{n} x_i y_1 \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_i, \tilde{e}_1)+\sum_{j=2}^{n} x_1 y_j \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_1, \tilde{e}_j) \\
&\quad +\sum_{i,j=2}^{n} x_i y_j \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j).
\end{aligned}$$

Utilizando (2.12), temos

$$\tilde{Ric}^M(X, Y) = x_1 y_1 \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1)+\sum_{i,j=2}^{n} x_i y_j \tilde{Ric}^M(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j).$$

Substituindo (2.13) e (2.11),

$$\tilde{Ric}^M(X, Y) = x_1 y_1\left[-\frac{\phi''}{\phi}(n-1)\right]\tilde{g}_{11}+\left[-\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]\sum_{i,j=2}^{n} x_i y_j \tilde{g}_{ij}.$$

Façamos $\mu = \left[-\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]$ *afim de reduzir os cálculos. Sendo assim,*

$$\begin{aligned}
\tilde{Ric}^M(X, Y) &= -x_1 y_1\left(\frac{\phi''}{\phi}\right)(n-1)\tilde{g}_{11}+\mu\tilde{g}\left(\sum_{i\geqslant 2}^{n} x_i\tilde{e}_i, \sum_{j\geqslant 2}^{n} y_j\tilde{e}_j\right) \\
&= -x_1 y_1\left(\frac{\phi''}{\phi}\right)(n-1)\tilde{g}_{11}+\mu\tilde{g}(X-x_1\tilde{e}_1, Y-y_1\tilde{e}_1) \\
&= -x_1 y_1\left(\frac{\phi''}{\phi}\right)(n-1)\tilde{g}_{11}+\mu\tilde{g}(X, Y)-\mu y_1\tilde{g}(X, \tilde{e}_1)-\mu x_1\tilde{g}(\tilde{e}_1, Y) \\
&\quad +\mu x_1 y_1\tilde{g}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1).
\end{aligned}$$

Fazendo uso de (2.11), note que

$$\mu y_1\tilde{g}(X,\tilde{e}_1)=\mu y_1\tilde{g}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\tilde{e}_i,\tilde{e}_i\right)=\mu y_1\tilde{g}(x_1\tilde{e}_1,\tilde{e}_1)=\mu x_1y_1\tilde{g}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1),$$

e, analogamente,

$$\mu x_1\tilde{g}(\tilde{e}_1,Y)=\mu x_1y_1\tilde{g}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{Ric}^M(X,Y) &= \mu\tilde{g}(X,Y)+\left(-\mu-(n-1)\frac{\phi''}{\phi}\right)x_1y_1\tilde{g}(\tilde{e}_1,\tilde{e}_1)\\ &= \mu\tilde{g}(X,Y)+\left[\frac{\phi''}{\phi}-(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)-(n-1)\frac{\phi''}{\phi}\right]dt^2(X,Y)\\ &= \mu\tilde{g}-(n-2)\left[\frac{\phi''}{\phi}+\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right]dt^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{Ric}^M(X,Y)=\left[-\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]\tilde{g}-(n-2)\left[\frac{\phi''}{\phi}+\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right]dt^2. \tag{2.14}$$

Ademais, através da expressão acima podemos obter a curvatura escalar da métrica $\tilde{g}$*. Note que*

$$\begin{aligned}R_{\tilde{g}} &= Ric^M_{\tilde{g}}(\partial t,\partial t)+Ric^M_{\tilde{g}}(\tilde{e}_2,\tilde{e}_2)+\ldots+Ric^M_{\tilde{g}}(\tilde{e}_n,\tilde{e}_n)\\ &= \left[-\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]-(n-2)\left(\frac{\phi''}{\phi}+\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\\ &\quad+\sum_{i=2}^{n}\left[-\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]\tilde{g}(\tilde{e}_i,\tilde{e}_i)\\ &= -\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}-(n-2)\frac{\phi''}{\phi}-(n-2)\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\\ &\quad+\left[-\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right](n-1)\\ &= -2(n-1)\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)(n-1)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\\ &= (n-1)\left[-2\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right].\end{aligned}$$

Desse modo,

$$R_{\tilde{g}}=(n-1)\left[-2\frac{\phi''}{\phi}+(n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]. \tag{2.15}$$

Agora, desde que as métricas g *e* $\tilde{g}$ *são conformes, por meio da Equação (1.24), vale a seguinte relação*

$$R_g=e^{-2h}(R_{\tilde{g}}-2(n-1)\Delta_{\tilde{g}}h-(n-2)(n-1)|\nabla^{\tilde{g}}h|^2). \tag{2.16}$$

Calculemos $\Delta_{\tilde{g}}h$ *e* $\nabla^{\tilde{g}}h$*, para assim substituirmos na expressão acima. Note que,*

$$\nabla^{\tilde{g}}h = \left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\partial t, \tag{2.17}$$

então

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_{\tilde{g}}h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) &= \langle \nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{e}_i} \nabla^{\tilde{g}}h, \tilde{e}_j\rangle \\ &= \left\langle \nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{e}_i}\left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\partial t, \tilde{e}_j\right\rangle \\ &= \left\langle \tilde{e}_i\left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\partial t + \left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{e}_i}\partial t, \tilde{e}_j\right\rangle \\ &= \tilde{e}_i\left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\langle \partial t, \tilde{e}_j\rangle_{\tilde{g}} + \left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\langle \nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{e}_i}\partial t, \tilde{e}_j\rangle_{\tilde{g}}. \end{aligned}$$

Levando em consideração o item (i) de (1.5.2), temos que

$$\mathrm{Hess}_{\tilde{g}}h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\frac{\phi'}{\phi}\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), \tag{2.18}$$

para todo $i, j \geqslant 2$*. Logo,*

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}}h &= \mathrm{Hess}_{\tilde{g}}h(\partial t, \partial t) + \sum_{i,j=2}^{n}\left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\frac{\phi'}{\phi}\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \\ &= \mathrm{Hess}_{\tilde{g}}h(\partial t, \partial t) + \left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\frac{\phi'}{\phi}(n-1). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Como, pelo item (ii) de (1.5.2), $\nabla^{\tilde{g}}_{\partial t}\partial t = 0$*, segue que*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_{\tilde{g}}h(\partial t, \partial t) &= \partial t\left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\langle \partial t, \partial t\rangle_{\tilde{g}} \\ &= -\frac{1}{t^2} - \frac{\phi''\phi - \phi'\phi'}{\phi^2} \\ &= -\frac{1}{t^2} - \frac{\phi''}{\phi} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.19),

$$\Delta_{\tilde{g}}h = -\frac{1}{t^2} - \frac{\phi''}{\phi} - (n-2)\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + (n-1)\frac{\phi'}{t\phi}. \tag{2.20}$$

Outrossim, por (2.17), é fácil ver que

$$|\nabla_{\tilde{g}}h|^2 = \frac{1}{t^2} - \frac{2\phi'}{t\phi} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2. \tag{2.21}$$

Por fim, substituindo as expressões (2.20),(2.21) e (2.15) em (2.16), podemos verificar que

$$\begin{aligned} R_g =& e^{-2h}\Bigg\{(n-1)\left[-2\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right] - 2(n-1)\left[-\frac{1}{t^2} - \frac{\phi''}{\phi} - (n-2)\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\right. \\ &\left. + (n-1)\frac{\phi'}{t\phi}\right] - (n-1)(n-2)\left[\frac{1}{t^2} - \frac{2\phi'}{t\phi} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\right]\Bigg\}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão, obtemos

$$\begin{aligned} R_g &= e^{-2h}\left\{(n-1)(n-2)\frac{1}{\phi^2} + 2\frac{1}{t^2}(n-1)[2-(n-2)] - (n-1)[(n-1)-(n-2)]\frac{2\phi'}{t\phi}\right\} \\ &= e^{-2h}\left[(n-1)(n-2)\frac{1}{\phi^2} - \frac{1}{t^2}(n-1)(n-4) - (n-1)\frac{2\phi'}{t\phi}\right] \\ &= (n-1)e^{-2h}\left[\frac{(n-2)}{\phi^2} - \frac{(n-4)}{t^2} - \frac{2\phi'}{t\phi}\right]. \end{aligned}$$

Consequentemente, a curvatura escalar R_g *será dada por*

$$R_g = (n-1)e^{-2h}\left[\frac{(n-2)}{\phi^2} - \frac{(n-4)}{t^2} - \frac{2\phi'}{t\phi}\right]. \tag{2.22}$$

que após algumas simplificações temos $R_g = n(n-1)$.

Através dessas informações estamos prontos para calcular o tensor de Weyl na métrica $\tilde{g}$. *Para isto, considere inicialmente o caso* $i, j, k, l \in \{2, ..n\}$ *(os demais casos são feitos de modo análogo). Sendo assim, pela Equação (1.11),*

$$\tilde{W}_{ijkl} = R^{\tilde{M}}_{ijkl} - \frac{1}{n-2}Ric^{M}_{\tilde{g}} \owedge \tilde{g} + \frac{R_{\tilde{g}}}{2(n-1)(n-2)}\tilde{g} \owedge \tilde{g}.$$

Substituindo (2.14), (2.15), e usando novamente a Equação de Gauss (2.9),

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{ijkl} &= R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} - \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\left(\frac{\tilde{g} \owedge \tilde{g}}{2}\right) - \frac{1}{n-2}\left[-\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]\tilde{g} \owedge \tilde{g} \\ &\quad + \frac{1}{2(n-2)}\left[-2\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]\tilde{g} \owedge \tilde{g} \\ &= R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} - \frac{1}{\phi^2}\left(\frac{\tilde{g} \owedge \tilde{g}}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Note que,

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} &= \left\langle R^{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)\tilde{e}_k, \tilde{e}_l\right\rangle_{\tilde{g}} \\ &= \phi^2\left\langle R^{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)\tilde{e}_k, \tilde{e}_l\right\rangle_{s} \\ &= \phi^2\big(\langle\tilde{e}_i, \tilde{e}_k\rangle_s\langle\tilde{e}_j, \tilde{e}_l\rangle_s - \langle\tilde{e}_i, \tilde{e}_l\rangle_s\langle\tilde{e}_j, \tilde{e}_k\rangle_s\big) \\ &= \phi^2\left(\frac{1}{\phi^2}\tilde{g}_{ik}\frac{1}{\phi^2}\tilde{g}_{jl} - \frac{1}{\phi^2}\tilde{g}_{il}\frac{1}{\phi^2}\tilde{g}_{jk}\right) \\ &= \frac{1}{\phi^2}(\tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl} - \tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk}). \end{aligned}$$

Substituindo em (2.23), concluímos que

$$\tilde{W}_{ijkl} = \frac{1}{\phi^2}(\tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{jl} - \tilde{g}_{il}\tilde{g}_{jk}) - \frac{1}{\phi^2}\left(\frac{\tilde{g} \owedge \tilde{g}}{2}\right) = 0, \tag{2.24}$$

isto é, $\tilde{W}_{ijkl} = 0$*, para todo* $i, j, k, l \in \{2, ..., n\}$*, e como nos demais casos também obtemos que o tensor de Weyl na métrica* $\tilde{g}$ *se anula, segue que* $\tilde{W} = W_{\tilde{g}} \equiv 0$*. Portanto, pelo que já sabemos, o mesmo ocorre com a métrica* g*, ou seja,* (M, g) *é conformemente plana. Para o que se segue, devemos notar que, se* $\{\tilde{e}_i\}$ *representa um referencial ortonormal para* $\tilde{g}$*, então* $\{e_1 = e^{-h}\partial t, e_2 = e^{-h}\tilde{e}_2, ..., e_n = e^{-h}\tilde{e}_n\}$ *define um referencial ortonormal na métrica* g*. Note que, de (2.8) obtemos*

$$e^{-h} = f = \sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}. \tag{2.25}$$

Denotando por $\nabla^g f$ *e* $\nabla^{\tilde{g}} f$ *o gradiente de* f *com respeito as métricas* g *e* $\tilde{g}$ *respectivamente, segue da Proposição (1.4.2) e da Equação (2.25) que*

$$\nabla^g f = e^{-2h}\nabla^{\tilde{g}} f = e^{-2h}\frac{m(n-2)t^{1-n} - t}{e^{-h}}\partial t = (m(n-2)t^{1-n} - t)e_1. \tag{2.26}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j) &= \left\langle \nabla^g_{e_i} \nabla^g f, e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla^g_{e_i} (m(n-2)t^{1-n} - t)e_1, e_j \right\rangle_g \\ &= e_i(m(n-2)t^{1-n} - t)\langle e_1, e_j\rangle_g \\ &\quad + (m(n-2)t^{1-n} - t)\left\langle \nabla^g_{e_i} e_1, e_j \right\rangle_g, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j) = e_i(m(n-2)t^{1-n} - t)\langle e_1, e_j\rangle_g + (m(n-2)t^{1-n} - t)\left\langle \nabla_{\tilde{e}_i} e_1, \tilde{e}_j \right\rangle_{\tilde{g}}.$$

Fazendo uso da Proposição (1.4.3) e do fato que $e_1 = e^{-h}\partial t = f\partial t$*, obtemos*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j) &= e_i(m(n-2)t^{1-n} - t)\langle e_i, e_j\rangle_g + (m(n-2)t^{1-n} - t)\Big[\left\langle \nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{e}_i} f\partial t, \tilde{e}_j \right\rangle_{\tilde{g}} \\ &\quad + \tilde{e}_i(h)\langle e_1, \tilde{e}_j\rangle_{\tilde{g}} + e_1(h)\langle \tilde{e}_i, \tilde{e}_j\rangle_{\tilde{g}} - fh'\langle \tilde{e}_i, \partial t\rangle_{\tilde{g}}\langle \partial t, \tilde{e}_j\rangle_{\tilde{g}} \Big]. \end{aligned}$$

Em particular, para $i, j \geqslant 2$*,*

$$\mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j) = (m(n-2)t^{1-n} - t)\left[f\left\langle \nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{e}_i} \partial t, \tilde{e}_j \right\rangle_{\tilde{g}} + e_1(h)\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \right]. \tag{2.27}$$

Pelo item (ii) da Proposição (1.5.2), é válido que

$$\nabla^{\tilde{g}}_{\tilde{e}_i} \partial t = \frac{\phi'}{\phi}\tilde{e}_i, \tag{2.28}$$

para todo $i, j \geqslant 2$. *Levando em consideração que* $e_1(h) = \left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right) f$ *e substituindo esse fato, juntamente com (2.28) em (2.27), chegamos a uma forma mais simplificada para* $\mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j)$ *com* $i, j \geqslant 2$, *a saber,*

$$\mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j) = (m(n-2)t^{-n} - 1) f g_{ij}. \tag{2.29}$$

Tomando o traço na expressão acima, obtemos

$$\Delta_g f = \mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j) + (m(n-2)t^{-n} - 1) f(n-1).$$

Desenvolvendo $\mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j)$, *observamos que*

$$\mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j) = e_1(m(n-2)t^{1-n} - t)\langle e_1, e_1\rangle_g + (m(n-2)t^{1-n} - t)[f' + fh' + e_1(h) - fh'],$$

onde utilizamos o fato que $e_1 = f\partial t$ *e* $\nabla^{\tilde{g}}_{\partial t}\partial t = 0$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_g f &= e_1(m(n-2)t^{1-n} - t)\langle e_1, e_1\rangle_g + (m(n-2)t^{1-n} - t)[f' + fh' + e_1(h) - fh'] \\
&\quad + (m(n-2)t^{-n} - 1) f(n-1) \\
&= e_1(m(n-2)t^{1-n} - t) + (m(n-2)t^{1-n} - t)[f' + e_1(h)] \\
&\quad + (m(n-2)t^{-n} - 1) f(n-1) \\
&= (m(n-2)t^{1-n} - t) f + (m(n-2)t^{1-n} - t)\left[f' + \left(\frac{1}{\phi} - \frac{\phi'}{\phi}\right) f\right] \\
&\quad m(n-2)(n-1)t^{-n} f - f(n-1).
\end{aligned}$$

Portanto, por meio de cálculos simples, é possível concluir que $\Delta_g f = -nf$, *o que implica*

$$-(\Delta_g f) g_{ij} + \mathrm{Hess}_g f(e_i, e_j) = (m(n-2)t^{-n} + n - 1) f g_{ij}. \tag{2.30}$$

Agora, basta verificar que

$$\mathrm{Ric}_g(e_i, e_j) = (m(n-2)t^{-n} + n - 1) g_{ij}.$$

Pela Proposição (1.4.6), temos que as curvaturas de Ricci nas métricas g *e* $\tilde{g}$ *se relacionam da seguinte forma*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_g (e_i, e_j) &= \mathrm{Ric}_{\tilde{g}} (e_i, e_j) - (n-2)\nabla^2_{\tilde{g}} h (e_i, e_j) + (n-2)\nabla^{\tilde{g}}_{e_i} h \nabla^{\tilde{g}}_{e_j} h \\
&\quad - \left(\Delta_{\tilde{g}} h + (n-2) |\nabla_{\tilde{g}} h|^2\right) \tilde{g} (e_i, e_j).
\end{aligned}$$

Mas, para $i, j \geqslant 2$*, por (2.17), obtemos*

$$\mathsf{Ric}_g\left(e_i, e_j\right) = \mathsf{Ric}_{\tilde{g}}\left(e_i, e_j\right) - (n-2)\nabla^2_{\tilde{g}} h\left(e_i, e_j\right) - \left(\Delta_{\tilde{g}} h + (n-2)\left|\nabla_{\tilde{g}} h\right|^2\right)\tilde{g}\left(e_i, e_j\right).$$

Como $e^{-2h} = f^2$*, podemos reescrever a expressão acima como*

$$\mathrm{Ric}_g\left(e_i, e_j\right) = f^2\left\{\mathrm{Ric}_{\tilde{g}}\left(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j\right) + (2-n)\nabla^2_{\tilde{g}} h\left(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j\right) + \left(-\Delta_{\tilde{g}} h + (2-n)\left|\nabla_{\tilde{g}} h\right|^2\right)\tilde{g}\left(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j\right)\right\}. \tag{2.31}$$

Por (2.11),(2.18),(2.19) e (2.21),

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ric}_g(e_i, e_j) &= f^2\left\{\left[-\frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\left(\frac{1-\phi'^2}{\phi^2}\right)\right]\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) + (2-n)\left(\frac{1}{t} - \frac{\phi'}{\phi}\right)\frac{\phi'}{\phi}\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)\right.\\
&\quad + \left[\left(\frac{1}{t^2} + \frac{\phi''}{\phi} + (n-2)\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - (n-1)\frac{\phi'}{t\phi}\right)\right.\\
&\quad \left.\left. + (2-n)\left(\frac{1}{t^2} + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - \frac{2\phi'}{t\phi}\right)\right]\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)\right\}\\
&= f^2\left[\frac{(n-2)}{\phi^2} - \frac{\phi'}{t\phi} - \frac{(n-3)}{t^2}\right]\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j),
\end{aligned}$$

para todo $i, j \geqslant 2$*. Tendo em vista que* $\phi = tf = t\sqrt{1 - 2mt^{2-n} - t^2}$*, temos*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_g\left(e_i, e_j\right) &= \frac{1}{t^2}\left\{n - 2 - (n-3)\left(1 - 2mt^{2-n} - t^2\right) - \frac{\phi'\phi}{t}\right\} g\left(e_i, e_j\right)\\
&= \frac{1}{t^2}\left\{n - 2 - (n-2)\left(1 - 2mt^{2-n} - t^2\right) - \left(m(n-2)t^{2-n} - t^2\right)\right\} g\left(e_i, e_j\right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\mathrm{Ric}_g\left(e_i, e_j\right) = \left(mt^{-n}(n-2) + n - 1\right) g\left(e_i, e_j\right), \tag{2.32}$$

como queríamos. Finalmente, por (2.30) e (2.32),

$$-(\Delta_g f)g_{ij} + \mathsf{Hess}_g f(e_i, e_j) - f\mathsf{Ric}_g(e_i, e_j) = 0, \tag{2.33}$$

para todo $i, j \geqslant 2$*.*

Destacamos que os demais casos são feitos de modo similar. Além disso, $f > 0$ *em int* M *e se anula nas duas componentes do bordo. Portanto, provamos que* (M, g, f) *é uma métrica estática positiva.*

Por fim, note que $\nabla\mathsf{Ric} \neq 0$*, isto é,* (M, g) *não possui Ricci paralelo. Para ver esse último fato, basta observar que, para todo* $i, j \geqslant 2$*,*

$$\nabla_1 R_{ij} = E_1(m(n-2)t^{-n} + (n-1))g_{ij} = -mn(n-2)t^{-n-1}fg_{ij} \neq 0.$$

Exemplo 4. *Cilindro sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ com métrica produto*

$$\left(\left[0, \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right] \times \mathbb{S}^{n-1}, g = dt^2 + \frac{n-2}{n}s, f(t) = sen(\sqrt{n}t)\right),$$

onde s *representa a métrica canônica de* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Tal estrutura define uma tripla estática positiva não-Einstein, conformemente plana e que satisfaz a condição de Ricci paralelo. De fato, afim de calcular a curvatura de Ricci de tal variedade, escolha um referencial ortonormal* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *para* M, *onde* $\{e_i\}_{i\geqslant 2}$ *representa um referencial ortogonal tangente a* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Daí, pela equação de Gauss,*

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} &= R^M_{ijkl} + (s_{ik}s_{jl} - s_{il}s_{jk}) \\ &= R^M_{ijkl} + 0\dot{(}g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \\ &= R^M_{ijkl}, \end{aligned}$$

onde usamos na segunda igualdade o item (ii) da Proposição (1.5.2).
Outrossim,

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{S}^{n-1}}_{ijkl} &= \left\langle R^{\mathbb{S}^{n-1}}(e_i, e_j)e_k, e_l \right\rangle_g \\ &= \frac{n-2}{n}\left\langle R^{\mathbb{S}^{n-1}}(e_i, e_j)e_k, e_l \right\rangle_s \\ &= \frac{n-2}{n}(s_{ik}s_{jl} - s_{il}s_{jk}) \\ &= \frac{n-2}{n}\left(\frac{n}{n-2}g_{ik}\frac{n}{n-2}g_{jl} - \frac{n}{n-2}g_{il}\frac{n}{n-2}g_{jk}\right) \\ &= \frac{n}{n-2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \end{aligned}$$

para todo $2 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$. *Vejamos ainda que, para todo* $i \geqslant 2$,

$$Ric^M(\partial t, e_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle R(\partial t, e_j)e_i, e_j\rangle = 0,$$

e,

$$Ric^M(\partial t, \partial t) = 0,$$

pois $\phi(t) = \sqrt{\dfrac{n-2}{n}} = cte.$
Daí, para todo $0 \leqslant i \leqslant n$, *vemos que a curvatura de Ricci de* M *tem a seguinte expresssão*

$$Ric = -ndt^2 + ng. \tag{2.34}$$

Isso implica que (M, g) *tem Ricci paralelo, entretanto não é uma variedade de Einstein. Além disso, tome o traço em* (2.34) *para ver que a curvatura escalar é dada por* $R =$

$n(n-1)$. *Agora, vejamos que* (M, g) *é conformemente plana. Com efeito, pela equação (1.11), temos*

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= \frac{n}{n-2}\left(\frac{g \owedge g}{2}\right) - \frac{1}{n-2} n g \owedge g + \frac{n(n-1)}{2(n-1)(n-2)} g \owedge g \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, verificaremos que a equação fundamental é satisfeita. Para isto, veja que

$$\nabla f \circ \pi_I = \sqrt{n}\cos(\sqrt{n}t)\partial t,$$

e,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess} f(e_i, e_j) &= \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_j \rangle \\ &= \sqrt{n}\langle \nabla_{e_i}(\cos(\sqrt{n}t)\partial t), e_j \rangle \\ &= \sqrt{n}\langle -\sqrt{n}\mathrm{sen}(\sqrt{n}t) e_i(\pi_I)\partial t + \cos(\sqrt{n}t)\nabla_{e_i}\partial t, e_j \rangle \\ &= -n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n}t)\langle e_i, \partial t\rangle \langle e_j, \partial t\rangle. \end{aligned} \tag{2.35}$$

E, consequentemente,

$$\Delta f = -n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n}t). \tag{2.36}$$

Assim, deduzimos a seguinte equação

$$-\Delta f g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n}t) g_{ij} - n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n}t)\langle e_i, \partial t\rangle\langle e_j, \partial t\rangle - \mathrm{sen}(\sqrt{n}t) R_{ij}.$$

Vamos analisar agora separadamente cada um dos casos:

- *Caso 1:* $2 \leqslant i, j \leqslant n$. *Neste caso,* $R_{ij} = n g_{ij}$ *e* $\mathrm{Hess} f(e_i, e_j) = 0$.

Desse modo, fazendo uso de (2.36),

$$-\Delta f g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n}t) g_{ij} - \mathrm{sen}(\sqrt{n}t) g_{ij} = 0.$$

- *Caso 2:* $i = 1$ *e* $j \geqslant 2$. *Neste caso,* $R_{ij} = 0 = \mathrm{Hess} f(e_i, e_j)$.

Logo, utilizando (2.36),

$$-\Delta f g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = 0.$$

- *Caso 3:* $i = j = 1$. *Neste caso,* $R_{ij} = 0$ *e* $\mathrm{Hess} f(e_i, e_j) = -n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n}t)$.

Sendo assim,

$$-\Delta f g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - f R_{ij} = +n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n}t) - n\,\mathrm{sen}(\sqrt{n}t) = 0.$$

Portanto, (M, g, f) *é uma métrica estática positiva.*

Agora vejamos alguns exemplos de métricas críticas construídos por Miao e Tam [35]. Iniciamos com a bola geodésica do espaço Euclidiano com métrica canônica.

Exemplo 5. *(Bola geodésica em $\mathbb{R}^n$) Considere $M^n \subset \mathbb{R}^n$ uma bola geodésica centrada na origem de raio R_0 e a função f definida por $f(x) = \frac{{R_0}^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)}$. Considere em $\mathbb{R}^n$ a métrica canônica g e em M a métrica induzida.*

Dessa forma, a função f pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{{R_0}^2}{2(n-1)} - \frac{({x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_i}^2 + ... + {x_n}^2)}{2(n-1)}.$$

Calculando a derivada parcial de f em relação a x_i,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{{R_0}^2}{2(n-1)} - \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_i}^2 + ... + {x_n}^2}{2(n-1)}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{{R_0}^2}{2(n-1)}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_i}^2 + ... + {x_n}^2}{2(n-1)}\right) \\ &= -\frac{2x_i}{2(n-1)} = -\frac{x_i}{n-1}. \end{aligned}$$

Agora derivando em relação a x_j,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{x_j}{n-1}\right) = -\frac{1}{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = -\frac{1}{n-1}g_{ij}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess} f = \nabla^2 f &= \nabla_i \nabla_j f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= -\frac{1}{n-1}g_{ij}. \end{aligned}$$

Tomando o traço em relação a i e j, segue que

$$\Delta f = g^{ij}\nabla^2 f = g^{ij}\left(-\frac{1}{n-1}g_{ij}\right) = -\frac{1}{n-1}g^{ij}g_{ij} = -\frac{n}{n-1}.$$

Tendo em vista que em M temos a métrica restrita do $\mathbb{R}^n$, então $\mathrm{Ric} = 0$.

Logo,

$$-\Delta f g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} = \frac{n}{n-1}g - \frac{n}{n-1}g = g.$$

Note ainda que $f^{-1}(0) = \partial M$.De fato, resolvendo a equação $f(x) = 0$, vemos que

$$0 = f(x) = \frac{{R_0}^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)},$$

o que implica em $R_0^2 = |x|^2$.

Destarte, $f^{-1}(0) = \partial M$. Sendo assim, concluímos que (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Agora segue um exemplo construído no espaço hiperbólico.

Exemplo 6. *(Bola geodésica em $\mathbb{H}^n$) Considere a variedade $\mathbb{L}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, ds^2)$, onde $ds^2 = dx_1^2 + ... + dx_n^2 - dt^2$. Considere $\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + ... + x_n^2 - t^2 = -1, t \geqslant 1\}$ mergulhado em $\mathbb{R}^{n,1}$, e seja g a métrica induzida. Nessas condições g é uma métrica Riemanniana.*

Agora fixe $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ e considere $M^n \subset \mathbb{H}^n$ uma bola geodésica centrada em p de raio R_0 e a função f definida por $f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{\cosh r}{\cosh R_0}\right) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\right)$, onde r é a distância geodésica de $(x_1, ..., x_n, t)$ à p. Assim $t = \cosh r$ e t é a função altura.

Note que

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= -\frac{1}{(n-1)\cosh R_0}\nabla^2(t) \\ &= -\frac{t}{(n-1)\cosh R_0} g. \end{aligned}$$

Daí, concluímos que Δf é dado por

$$\begin{aligned} \Delta f &= (\nabla^2 f)_{ij} g^{ij} \\ &= -\frac{t}{(n-1)\cosh R_0} g_{ij} g^{ij} \\ &= -\frac{nt}{(n-1)\cosh R_0}. \end{aligned}$$

Tendo em vista que $Ric = -(n-1)g$ no caso do espaço hiperbólico, temos

$$\begin{aligned} -\Delta f g + \nabla^2 f - f Ric &= \frac{nt}{(n-1)\cosh R_0} g - \frac{t}{(n-1)\cosh R_0} g + \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\right)(n-1) g \\ &= \frac{nt - t + (n-1)\cosh R_0 - (n-1)t}{(n-1)\cosh R_0} g \\ &= g. \end{aligned}$$

Além disso,

$$0 = f(x_1, ..., x_n, t) = \frac{1}{n-1}\frac{(\cosh R_0 - t)}{\cosh R_0},$$

o que implica em $\cosh r = t = \cosh R_0$.

Destarte, $f^{-1}(0) = \partial M$. É possível assim concluir que (M^n, g, f) é uma métrica crítica de Miao-Tam.

Por fim, de modo análogo ao caso anterior, afirmamos que a bola geodésica da esfera também é uma métrica crítica de Miao-Tam. Mais precisamente, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 7. *(Bola geodésica em $\mathbb{S}^n$) Considere* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{S}^n$. *Sejam* $M^n \subset \mathbb{S}^n$ *uma bola geodésica centrada em* p *de raio* $R_0 < \dfrac{\pi}{2}$ *e* f *a função definida por* $f(x_1, ..., x_n, t) = \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{\cos r}{\cos R_0} - 1\right)$, *onde* r *é a distância geodésica de* $(x_1, ..., x_n, t)$ *ao ponto* p. *Desse modo,* $\mathrm{Hess} f = -\dfrac{\cos r}{(n-1)\cos R_0} g$ *e de maneira análoga ao exemplo anterior vemos que a Equação (6) é satisfeita. Desde que vale* $f^{-1}(0) = \partial M$, *segue que* (M^n, g, f) *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Capítulo 3

Métricas V-estáticas com curvatura de Ricci não-negativa em dimensão três

Adiante, apresentaremos alguns lemas para que seja possível realizar as demonstrações dos teoremas principais.

3.1 Lemas chaves

Lema 3.1.1. *Seja* (M^n, g), $(n \geqslant 3)$*, uma variedade Riemanniana* n*-dimensional e f uma solução para*

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - fR_{ij} = \kappa g_{ij}. \tag{3.1}$$

Então, g *tem curvatura escalar constante.*

Demonstração. Temos que $(\mathrm{div}T)_i = g^{jk}\nabla_k T_{ij}$. Desse modo, pela identidade de Ricci,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathrm{Hess} f)_i &= g^{jk}\nabla_k(\mathrm{Hess} f)_{ij} \\
&= g^{jk}\nabla_k\nabla_i\nabla_j f \\
&= \nabla_j\nabla_i\nabla_j f \\
&= \nabla_i\nabla_j\nabla_j f + R_{jijl}\nabla_l f \\
&= \nabla_i\Delta f + R_{il}\nabla_l f.
\end{aligned}$$

Tomando o divergente em (3.1) e aplicando (1.4), segue que

$$\begin{aligned} 0 = div(\kappa g) &= div(-(\Delta f)g + Hessf - fRic) \\ &= -\nabla\Delta f + \nabla\Delta f + Ric(\nabla f) - f\frac{1}{2}\nabla R - Ric(\nabla f) \\ &= -f\frac{1}{2}\nabla R. \end{aligned}$$

Daí, $\nabla R \equiv 0$ em $M \setminus \partial M$. Como ∂M tem medida nula, pela continuidade da curvatura escalar R e pela conexidade de M, concluímos que R é constante em M. □

Lema 3.1.2. *Seja* (M^n, g), $(n \geqslant 3)$, *uma variedade Riemanniana* n*-dimensional e f uma solução para (3.1). Então,*

$$fC_{kij} = \nabla_h fR_{hjik} + \frac{R}{n-1}(\nabla_k fg_{ij} - \nabla_i fg_{kj}) - (\nabla_k fR_{ij} - \nabla_i fR_{kj}).$$

Demonstração. É de conhecimento que

$$C_{kij} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_i R_{kj} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_k Rg_{ij} - \nabla_i Rg_{kj}),$$

mas, como visto no Lema (3.1.1), a curvatura escalar R é constante.
Desse modo,

$$C_{kij} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_i R_{kj}.$$

Derivando (3.1) em relação a k e levando em consideração que $\nabla_k g_{ij} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_k[-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - fR_{ij}] \\ &= -(\nabla_k\Delta f)g_{ij} + \nabla_k\nabla_i\nabla_j f - \nabla_k(fR_{ij}), \end{aligned}$$

o que implica,

$$\nabla_k(fR_{ij}) = \nabla_k\nabla_i\nabla_j f - (\nabla_k\Delta f)g_{ij}.$$

Entretanto,

$$\nabla_k(fR_{ij}) = \nabla_k fR_{ij} + f\nabla_k R_{ij}.$$

Logo,

$$\nabla_k fR_{ij} + f\nabla_k R_{ij} = \nabla_k\nabla_i\nabla_j f - (\nabla_k\Delta f)g_{ij}. \tag{3.2}$$

Derivando (2.4) em relação a k e utilizando o Lema (3.1.1), dá-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_k[(n-1)\Delta f + Rf + n\kappa] \\ &= (n-1)\nabla_k\Delta f + \nabla_k(Rf) + \nabla_k(n\kappa) \\ &= (n-1)\nabla_k\Delta f + R\nabla_k f. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\nabla_k \Delta f = -\frac{R\nabla_k f}{n-1}$$

que substituindo em (3.2) fornece

$$\nabla_k f R_{ij} + f\nabla_k R_{ij} = \nabla_k \nabla_i \nabla_j f + \frac{R}{n-1}\nabla_k f g_{ij},$$

ou seja,

$$f\nabla_k R_{ij} = -\nabla_k f R_{ij} + \nabla_k \nabla_i \nabla_j f + \frac{R}{n-1}\nabla_k f g_{ij}. \tag{3.3}$$

Trocando k por i,

$$f\nabla_i R_{kj} = -\nabla_i f R_{kj} + \nabla_i \nabla_k \nabla_j f + \frac{R}{n-1}\nabla_i f g_{kj}. \tag{3.4}$$

Subtraindo (3.3) por (3.4), temos

$$f\nabla_k R_{ij} - f\nabla_i R_{kj} = (\nabla_k\nabla_i\nabla_j f - \nabla_i\nabla_k\nabla_j f) - (\nabla_k f R_{ij} - \nabla_i f R_{kj}) + \frac{R}{n-1}(\nabla_k f g_{ij} - \nabla_i f g_{kj}).$$

Entretanto, pela identidade de Ricci, é sabido que

$$\nabla_k\nabla_i\nabla_j f - \nabla_i\nabla_k\nabla_j f = R_{kijh}\nabla_h f.$$

Portanto,

$$fC_{kij} = \nabla_h f R_{kijh} + \frac{R}{n-1}(\nabla_k f g_{ij} - \nabla_i f g_{kj}) - (\nabla_k f R_{ij} - \nabla_i f R_{kj}),$$

e, como $R_{kijh} = R_{hjik}$, segue o resultado. □

Lema 3.1.3. *Seja* (M^n, g), $(n \geqslant 3)$, *uma variedade Riemanniana* n*-dimensional e f uma solução para (3.1). Então*

$$fR_{ij}\nabla_k C_{kij} = fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - fR_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla |\mathring{Ric}|^2\rangle - 2R_{ij}\nabla_k f C_{kij} + \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2. \tag{3.5}$$

Demonstração. Temos que

$$R_{ij}\nabla_k(fC_{kij}) = R_{ij}\nabla_k f C_{kij} + fR_{ij}\nabla_k C_{kij}.$$

De acordo com o Lema (3.1.2),

$$\begin{aligned} fR_{ij}\nabla_k C_{kij} &= R_{ij}\nabla_k(fC_{kij}) - R_{ij}\nabla_k f C_{kij} \\ &= R_{ij}\nabla_k\left[\nabla_h f R_{hjik} + \frac{R}{n-1}(\nabla_k f g_{ij} - \nabla_i f g_{kj}) - (\nabla_k f R_{ij} - \nabla_i f R_{kj})\right] \\ &\quad -R_{ij}\nabla_k f C_{kij}. \end{aligned}$$

Utilizando (1.4), é notório que

$$\begin{aligned}
fR_{ij}\nabla_k C_{kij} &= R_{ij}\nabla_k\nabla_h fR_{hjik} + R_{ij}\nabla_h f\nabla_k R_{hjik} + R_{ij}\frac{R}{n-1}\nabla_k\nabla_k fg_{ij} \\
&\quad -R_{ij}\frac{R}{n-1}\nabla_k\nabla_i fg_{kj} - R_{ij}\nabla_k\nabla_k fR_{ij} - R_{ij}\nabla_k f\nabla_k R_{ij} + R_{ij}\nabla_k\nabla_i fR_{kj} \\
&\quad +R_{ij}\nabla_i f\nabla_k R_{kj} - R_{ij}\nabla_k fC_{kij} \\
&= R_{ij}\nabla_k\nabla_h fR_{hjik} + R_{ij}\nabla_h f\nabla_k R_{hjik} + \frac{R}{n-1}R_{ij}g_{ij}\nabla_k\nabla_k f \\
&\quad -\frac{R}{n-1}\nabla_j\nabla_i fR_{ij} - |Ric|^2\Delta f - R_{ij}\nabla_k f\nabla_k R_{ij} + R_{ij}\nabla_k\nabla_i fR_{kj} \\
&\quad -R_{ij}\nabla_k fC_{kij} \\
&= R_{ij}\nabla_k\nabla_h fR_{hjik} + R_{ij}\nabla_h f\nabla_k R_{hjik} + \frac{R^2}{n-1}\Delta f - \frac{R}{n-1}\nabla_i\nabla_j fR_{ij} \\
&\quad -\Delta f|Ric|^2 - R_{ij}\nabla_k f\nabla_k R_{ij} + R_{ij}\nabla_k\nabla_i fR_{kj} - R_{ij}\nabla_k fC_{kij}.
\end{aligned}$$

Por (1.3) e o fato de R ser constante, temos

$$\nabla_l R_{likj} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} = C_{kij}.$$

Desse modo,

$$\nabla_k R_{hjik} = -\nabla_k R_{kihj} = \nabla_j R_{ih} - \nabla_h R_{ij} = C_{jhi}.$$

Utilizando a última identidade, (2.3) e (2.5) obtemos

$$\begin{aligned}
fR_{ij}\nabla_k C_{kij} &= R_{ij}\left(fR_{kh} - \frac{fR+\kappa}{n-1}g_{kh}\right)R_{hjik} + R_{ij}\nabla_h fC_{jhi} - \frac{R^2}{n-1}\frac{Rf+n\kappa}{n-1} \\
&\quad -\frac{R}{n-1}\left(fR_{ij} - \frac{fR+\kappa}{n-1}g_{ij}\right)R_{ij} + \frac{fR+n\kappa}{n-1}|Ric|^2 - R_{ij}\nabla_k f\nabla_k R_{ij} \\
&\quad +R_{ij}\left(fR_{ik} - \frac{fR+\kappa}{n-1}g_{ik}\right)R_{kj} - R_{ij}\nabla_k fC_{kij} \\
&= -fR_{kh}R_{ij}R_{ikjh} + \frac{fR|Ric|^2}{n-1} + \frac{\kappa}{n-1}|Ric|^2 + R_{ij}\nabla_h fC_{jhi} - \frac{R^3 f}{(n-1)^2} \\
&\quad -\frac{n\kappa}{(n-1)^2}R^2 - \frac{Rf}{n-1}|Ric|^2 + \frac{R^3 f}{(n-1)^2} + \frac{R^2\kappa}{(n-1)^2} + \frac{fR}{n-1}|Ric|^2 \\
&\quad +\frac{n\kappa}{n-1}|Ric|^2 - \frac{1}{2}\langle\Delta f, \nabla|Ric|^2\rangle + fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - \frac{fRg_{ik}R_{ij}R_{kj}}{n-1} - \frac{\kappa g_{ik}R_{ij}R_{kj}}{n-1} \\
&\quad -R_{ij}\nabla_k fC_{kij} \\
&= -fR_{kh}R_{ij}R_{ikjh} + \frac{\kappa(n+1)}{n-1}|Ric|^2 - \frac{R^2\kappa}{n-1} + \frac{Rf}{n-1}|Ric|^2 - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle \\
&\quad +fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - \frac{fRg_{ik}R_{ij}R_{kj}}{n-1} - \frac{\kappa g_{ik}R_{ij}R_{kj}}{n-1} + R_{ij}\nabla_h fC_{jhi} - R_{ij}\nabla_k fC_{kij}.
\end{aligned}$$

Por uma mudança de índices

$$\begin{aligned} fR_{ij}\nabla_k C_{kij} &= fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - fR_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle - R_{ij}\nabla_k f C_{kij} + R_{ij}\nabla_k f C_{jki} \\ &\quad - \frac{R^2\kappa}{n-1} + \frac{n\kappa}{n-1}|Ric|^2 \\ &= fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - fR_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle - 2R_{ij}\nabla_k f C_{kij} + \frac{n\kappa}{n-1}|Ric|^2 \\ &\quad - \frac{R^2\kappa}{n-1} \\ &= fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - fR_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - \frac{1}{2}\langle \nabla f, \nabla |Ric|^2\rangle - 2R_{ij}\nabla_k f C_{kij} + \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2. \end{aligned}$$

A última igualdade advém do seguinte fato

$$\begin{aligned} |\mathring{Ric}|^2 = |R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}|^2 &= (R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij})(R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}) \\ &= R_{ij}R_{ij} - 2\frac{R}{n}g_{ij}R_{ij} + \frac{R^2}{n^2}g_{ij}g_{ij} \\ &= |Ric|^2 - 2\frac{R^2}{n} + \frac{R^2}{n^2}n \\ &= |Ric|^2 - \frac{R^2}{n}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.1.4. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não-negativa. Então*

$$6R_{ij}R_{hj}R_{hi} - 5R|Ric|^2 + R^3 \geqslant 0.$$

Demonstração. Para algum ponto fixo $p \in M$, escolha uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ em T_pM tal que $R_{ij} = \rho_i g_{ij}$ e $R = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$. Sem perda de generalidade, é possível assumir $0 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \rho_3$.

Prosseguindo, denote $A = 6R_{ij}R_{hj}R_{hi} - 5R|Ric|^2 + R^3$. Dessa forma, $A = 6R_{ij}R_{hj}R_{hi} - 5R|Ric|^2 + R^3 = 6\sum_{i=1}^{3}\rho_i{}^3 - 5\sum_{i=1}^{3}\rho_i\sum_{j=1}^{3}\rho_j{}^2 + (\sum_{i=1}^{3}\rho_i)^3$.
Note que,

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{3}\rho_i)^3 &= (\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2\sum_{i=1}^{3}\rho_i \\ &= (\rho_1{}^2+\rho_2{}^2+\rho_3{}^2+2\rho_1\rho_2+2\rho_1\rho_3+2\rho_2\rho_3)\sum_{i=1}^{3}\rho_i \\ &= \sum_{i=1}^{3}\rho_i\sum_{j=1}^{3}\rho_j{}^2 + 2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)\sum_{i=1}^{3}\rho_i. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
A &= 6\sum_{i=1}^{3}{\rho_i}^3 - 4\sum_{i=1}^{3}\rho_i\sum_{j=1}^{3}{\rho_j}^2 + 2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)(\rho_1+\rho_2+\rho_3)\\
&= 6\sum_{i=1}^{3}{\rho_i}^3 - 4({\rho_1}^3+\rho_1{\rho_2}^2+\rho_1{\rho_3}^2+\rho_2{\rho_1}^2+{\rho_2}^3+\rho_2{\rho_3}^2+\rho_3{\rho_1}^2+\rho_3{\rho_2}^2+{\rho_3}^3)\\
&\quad +2({\rho_1}^2\rho_2+{\rho_1}^2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1{\rho_2}^2+\rho_1\rho_2\rho_3+{\rho_2}^2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1{\rho_3}^2+\rho_2{\rho_3}^2).
\end{aligned}$$

Agrupando os termos repetidos, segue que

$$\begin{aligned}
A &= 2\sum_{i=1}^{3}{\rho_i}^3 - 2(\rho_1{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\rho_2+\rho_1{\rho_3}^2+{\rho_1}^2\rho_3+{\rho_2}^2\rho_3+\rho_2{\rho_3}^2)+6\rho_1\rho_2\rho_3\\
&= 2({\rho_1}^3-{\rho_1}^2\rho_2-{\rho_1}^2\rho_3+{\rho_2}^3-\rho_1{\rho_2}^2-{\rho_2}^2\rho_3+{\rho_3}^3-\rho_1{\rho_3}^2-\rho_2{\rho_3}^2+3\rho_1\rho_2\rho_3)\\
&= 2[\rho_1({\rho_1}^2-\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_3)+\rho_2({\rho_2}^2-\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3)+\rho_3({\rho_3}^2-\rho_1\rho_3-\rho_2\rho_3)+3\rho_1\rho_2\rho_3].
\end{aligned}$$

Dispondo $\rho_1\rho_2\rho_3$ em cada um dos parênteses obtemos

$$\begin{aligned}
A &= 2[\rho_1({\rho_1}^2-\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)+\rho_2({\rho_2}^2-\rho_1\rho_2-\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_3)\\
&\quad +\rho_3({\rho_3}^2-\rho_1\rho_3-\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_2)]\\
&= 2\{\rho_1[\rho_1(\rho_1-\rho_2)-\rho_3(\rho_1-\rho_2)]+\rho_2[\rho_2(\rho_2-\rho_1)-\rho_3(\rho_2-\rho_1)]\\
&\quad +\rho_3[\rho_3(\rho_3-\rho_1)-\rho_2(\rho_3-\rho_1)]\}\\
&= 2[\rho_1(\rho_2-\rho_1)(\rho_3-\rho_1)-\rho_2(\rho_2-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)\\
&\quad +\rho_3(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)].
\end{aligned}$$

Pondo $(\rho_3-\rho_2)$ em evidência nas duas últimas expressões, temos

$$A = 2[\rho_1(\rho_2-\rho_1)(\rho_3-\rho_1)+(\rho_3-\rho_2)(-{\rho_2}^2+\rho_1\rho_2+{\rho_3}^2-\rho_1\rho_3)].$$

Tal expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
A &= 2\{\rho_1(\rho_2-\rho_1)(\rho_3-\rho_1)+(\rho_3-\rho_2)[(\rho_3-\rho_2)(\rho_3+\rho_2)+\rho_1(\rho_2-\rho_3)]\}\\
&= 2[\rho_1(\rho_2-\rho_1)(\rho_3-\rho_1)+(\rho_3-\rho_2)^2(\rho_2+\rho_3-\rho_1)].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$6R_{ij}R_{hj}R_{hi}-5R|Ric|^2+R^3 = 2[\rho_1(\rho_2-\rho_1)(\rho_3-\rho_1)+(\rho_3-\rho_2)^2(\rho_2+\rho_3-\rho_1)] \geqslant 0,$$

onde i, j, k são distintos um do outro.

Assim, completamos a prova do lema. $\square$

3.2 Teoremas principais: caso tridimensional

Para provar os teoremas principais, faz-se necessária a utilização de uma fórmula para $div(f^2\nabla|Ric|^2)$, a qual será apresentada a seguir.

Seja (M^n, g), $(n \geqslant 3)$, uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, orientada, conexa e seja f uma solução suave para (3.1). Nesse contexto, temos que

$$\begin{aligned} div(f^2\nabla|Ric|^2) &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + f^2\Delta|Ric|^2 \\ &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + f^2\Delta(R_{ij}R_{ij}). \end{aligned}$$

Desenvolvendo $\Delta|Ric|^2$, deduzimos

$$\begin{aligned} div(f^2\nabla|Ric|^2) &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + 2f^2R_{ij}\Delta R_{ij} + 2f^2\langle\nabla R_{ij}, \nabla R_{ij}\rangle \\ &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + 2f^2R_{ij}\nabla_k\nabla_k R_{ij} + 2f^2|\nabla Ric|^2 \\ &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + 2f^2R_{ij}\nabla_k(\nabla_k R_{ij} - \nabla_i R_{jk} + \nabla_i R_{jk}) + 2f^2|\nabla Ric|^2. \end{aligned}$$

Aplicando (1.12), segue que

$$\begin{aligned} div(f^2\nabla|Ric|^2) &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + 2f^2R_{ij}\nabla_k(C_{kij} + \nabla_i R_{jk}) + 2f^2|\nabla Ric|^2 \\ &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + 2f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij} + 2f^2R_{ij}\nabla_k\nabla_i R_{jk} + 2f^2|\nabla Ric|^2. \end{aligned}$$

Note que, do Lema (3.1.3),

$$\begin{aligned} div(f^2\nabla|Ric|^2) &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + 4f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij} - 2f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij} + 2f^2R_{ij}\nabla_k\nabla_i R_{jk} \\ &\quad +2f^2|\nabla Ric|^2 \\ &= 2f\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + 4f\bigg(fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - fR_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle \\ &\quad -2R_{ij}\nabla_k fC_{kij} + \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2\bigg) - 2f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij} + 2f^2R_{ij}\nabla_k\nabla_i R_{jk} \\ &\quad +2f^2|\nabla Ric|^2 \\ &= 4f^2R_{ij}R_{jk}R_{ki} - 4f^2R_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - 8fR_{ij}\nabla_k fC_{kij} + \frac{4n\kappa f}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad -2f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij} + 2f^2|\nabla Ric|^2 + 2f^2R_{ij}\nabla_k\nabla_i R_{jk}. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição (1.2.8),

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f^2\nabla|Ric|^2) &= 4f^2R_{ij}R_{jk}R_{ki} - 4f^2R_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - 8fR_{ij}\nabla_k fC_{kij} + \frac{4n\kappa f}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\
&\quad -2f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij} + 2f^2|\nabla Ric|^2 + 2f^2R_{ij}(\nabla_i\nabla_k R_{jk} - R_{ikjh}R_{hk} + R_{ik}R_{jk}) \\
&= 6f^2R_{ij}R_{jk}R_{ki} - 6f^2R_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - 8fR_{ij}\nabla_k fC_{kij} + \frac{4n\kappa f}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\
&\quad -2f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij} + 2f^2|\nabla Ric|^2 + 2f^2R_{ij}\nabla_i\nabla_k R_{jk}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Ademais,

$$\nabla_k(f^2R_{ij}C_{kij}) = 2f\nabla_k fR_{ij}C_{kij} + f^2\nabla_k R_{ij}C_{kij} + f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij}.$$

Utilizando (1.3) e (1.12) deduzimos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f^2\nabla|Ric|^2) &= 6f^2R_{ij}R_{jk}R_{ki} - 6f^2R_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - 2(\nabla_k(f^2R_{ij}C_{kij}) - f^2\nabla_k R_{ij}C_{kij} \\
&\quad -f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij}) + \frac{4n\kappa f}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 - 2f^2R_{ij}\nabla_k C_{kij} + 2f^2|\nabla Ric|^2 \\
&\quad +2f^2R_{ij}\nabla_i\nabla_k R_{jk} - 4fR_{ij}\nabla_k fC_{kij} \\
&= 6f^2R_{ij}R_{jk}R_{ki} - 6f^2R_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - 4fR_{ij}\nabla_k fC_{kij} + \frac{4n\kappa f}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\
&\quad +2f^2\nabla_k R_{ij}C_{kij} - 2\nabla_k(f^2R_{ij}C_{kij}) + 2f^2|\nabla Ric|^2.
\end{aligned}$$

Note que, usando a antissimetria do tensor de Cotton, obtemos

$$|C|^2 = \nabla_k R_{ij}C_{kij} - \nabla_i R_{kj}C_{kij} = 2\nabla_k R_{ij}C_{kij}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f^2\nabla|Ric|^2) &= 6f^2R_{ij}R_{jk}R_{ki} - 6f^2R_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - 4fR_{ij}\nabla_k fC_{kij} + \frac{4n\kappa f}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + f^2|C|^2 \\
&\quad -2\nabla_k(f^2R_{ij}C_{kij}) + 2f^2|\nabla Ric|^2. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Observação 3.2.1. *Definamos o 3-tensor auxiliar T_{kij} dado por*

$$T_{kij} = \frac{n-1}{n-2}(R_jk\nabla_i f - R_{ij}\nabla_k f) - \frac{R}{n-2}(g_{jk}\nabla_i f - g_{ij}\nabla_k f) + \frac{1}{n-2}(g_{jk}R_{is}\nabla_s f - g_{ij}R_{ks}\nabla_s f).$$

Pelo Lema (3.1.2),

$$fC_{kij} = \nabla_h fR_{hjik} + \frac{R}{n-1}(\nabla_k fg_{ij} - \nabla_i fg_{kj}) - (\nabla_k fR_{ij} - \nabla_i fR_{kj}).$$

Agora, utilizando a decomposição do Tensor Curvatura de Riemann (1.11), temos

$$\begin{aligned}
fC_{kij} &= \nabla_h f\Big[W_{hjik} + \frac{1}{n-2}(R_{hi}g_{jk} - R_{hk}g_{ji} + R_{jk}g_{hi} - R_{ji}g_{hk}) \\
&\quad -\frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{hi}g_{jk} - g_{hk}g_{ji})\Big] + \frac{R}{n-1}(\nabla_k f g_{ij} - \nabla_i f g_{kj}) \\
&\quad -(\nabla_k f R_{ij} - \nabla_i f R_{ij}) \\
&= \nabla_s f W_{kijs} + \frac{1}{n-2}(\nabla_s f R_{si}g_{jk} - \nabla_s f R_{sk}g_{ji} + \nabla_s f R_{jk}g_{si} - \nabla_s f R_{ji}g_{sk}) \\
&\quad +\frac{R}{(n-1)(n-2)}(-\nabla_s f g_{si}g_{jk} + \nabla_s f g_{sk}g_{ji}) + \frac{R}{n-1}(\nabla_k f g_{ij} - \nabla_i f g_{kj}) \\
&\quad -\nabla_k f R_{ij} + \nabla_i f R_{ij}.
\end{aligned}$$

Outrossim,

$$\frac{R}{(n-1)(n-2)} = -\frac{R}{n-1} + \frac{R}{n-2}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
fC_{kij} &= \nabla_s f W_{kijs} + \frac{1}{n-2}(g_{jk}R_{is}\nabla_s f - g_{ij}R_{ks}\nabla_s f) + \frac{1}{n-2}(\nabla_s f R_{jk}g_{si} - \nabla_s f R_{ji}g_{sk}) \\
&\quad -\frac{R}{n-1}(\nabla_k f g_{ij} - \nabla_i f g_{kj}) + \frac{R}{n-2}(\nabla_k f g_{ij} - \nabla_i f g_{kj}) \\
&\quad +\frac{R}{n-1}(\nabla_k f g_{ij} - \nabla_i f g_{kj}) - \nabla_k f R_{ij} + \nabla_i f R_{ij} \\
&= \nabla_s f W_{kijs} + \frac{1}{n-2}(\nabla_i f R_{jk} - \nabla_k f R_{ij}) - \nabla_k f R_{ij} + \nabla_i f R_{ij} \\
&\quad -\frac{R}{n-2}(\nabla_i f g_{kj} - \nabla_k f g_{ij}) + \frac{1}{n-2}(g_{jk}R_{is}\nabla_s f - g_{ij}R_{ks}\nabla_s f),
\end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
fC_{kij} &= \nabla_s f W_{kijs} + \frac{n-1}{n-2}(R_{jk}\nabla_i f - R_{ij}\nabla_k f) - \frac{R}{n-2}(g_{jk}\nabla_i f - g_{ij}\nabla_k f) \\
&\quad +\frac{1}{n-2}(g_{jk}R_{is}\nabla_s f - g_{ij}R_{ks}\nabla_s f) \\
&= T_{kij} + W_{kijs}\nabla_s f.
\end{aligned}$$

Logo,

$$fC_{kij} = T_{kij} + W_{kijs}\nabla_s f. \tag{3.8}$$

Como $W_{kijs} = 0$ quando $n = 3$, temos $fC_{kij} = T_{kij}$. Da definição de T_{kij}, por conseguinte

$$f|C|^2 = T_{kij}C_{kij} = -4C_{kij}R_{ij}\nabla_k f. \tag{3.9}$$

A segunda igualdade é válida, tendo em vista que

$$\begin{aligned}
T_{kij}C_{kij} &= [2(\nabla_i fR_{jk} - \nabla_k fR_{ij}) - R(g_{jk}\nabla_i f - g_{ij}\nabla_k f) + g_{jk}R_{is}\nabla_s f - g_{ij}R_{ks}\nabla_s f]C_{kij} \\
&= 2(\nabla_i fR_{jk}C_{kij} - \nabla_k fR_{ij}C_{kij}) \\
&= 2(\nabla_k fR_{ij}C_{ikj} - \nabla_k fR_{ij}C_{kij}) \\
&= 2(-\nabla_k fR_{ij}C_{kij} - \nabla_k fR_{ij}C_{kij}) \\
&= -4C_{kij}R_{ij}\nabla_k f.
\end{aligned}$$

Dessa forma, quando $n = 3$, por (1.11),

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}R_{ik}R_{jl} &= R|Ric|^2 - R_{il}R_{ik}R_{lk} + R|Ric|^2 - R_{ij}R_{jk}R_{ik} - \frac{R^3}{2} + \frac{R}{2}R_{ik}R_{il}R_{jl}g_{jk} \\
&= 2R|Ric|^2 - 2R_{ij}R_{jk}R_{ik} - \frac{R^3}{2} + \frac{R}{2}R_{kl}R_{kl} \\
&= \frac{5}{2}R|Ric|^2 - 2R_{ij}R_{jk}R_{ik} - \frac{R^3}{2} \\
&= \frac{5}{2}R|Ric|^2 - 3R_{ij}R_{jk}R_{ik} + R_{ij}R_{jk}R_{ik} - \frac{R^3}{2},
\end{aligned}$$

o que implica que

$$R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl} = 3R_{ij}R_{jk}R_{ki} - \frac{5}{2}R|Ric|^2 + \frac{R^3}{2}. \tag{3.10}$$

Assim, substituindo (3.9) e (3.10) em (3.7) obtemos

$$\begin{aligned}
div(f^2\nabla|Ric|^2) &= 6f^2\left(3R_{ij}R_{jk}R_{ki} - \frac{5}{2}R|Ric|^2 + \frac{R^3}{2}\right) + f|C|^2 + 6n\kappa f|\mathring{Ric}|^2 + f|C|^2 \\
&\quad -2\nabla_k(f^2R_{ij}C_{kij}) + 2f^2|\nabla Ric|^2 \\
&= 3f^2(6R_{ij}R_{jk}R_{ki} - 5R|Ric|^2 + R^3) + 6\kappa f|\mathring{Ric}|^2 + 2f^2|C|^2 \\
&\quad -2\nabla_k(f^2R_{ij}C_{kij}) + 2f^2|\nabla Ric|^2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para provar o Teorema (3.2.3), é necessário fazer uso do seguinte resultados de Hwang em [29].

Proposição 3.2.2. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica CPE com* f *não-constante. Então, o conjunto* $\{x \in M^n; f(x) = -1\}$ *tem medida* n*-dimensional nula.*

Agora estamos em condições de enunciar e provar nosso primeiro resultado deste capítulo.

Teorema 3.2.3. *Seja* $(M^3, g, \tilde{f})$ *uma métrica CPE tridimensional compacta, orientada, conexa com curvatura de Ricci não-negativa. Então,* M^3 *é isométrica a esfera padrão* $\mathbb{S}^3$*.*

Demonstração. Seja $(M^3, g, \tilde{f})$ uma métrica CPE tridimensional compacta, orientada, conexa com curvatura de Ricci não-negativa. Então, $\tilde{f}$ é uma solução não constante de

$$-\Delta\tilde{f}g + \mathrm{Hess}\tilde{f} - \tilde{f}\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g. \tag{3.12}$$

Dessa forma, $f = 1 + \tilde{f}$ satisfaz

$$-\Delta f g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} = \kappa g,$$

com $\kappa = -\dfrac{R}{3}$. Pelo Lema (3.1.4),

$$6R_{ij}R_{hj}R_{hi} - 5R|\mathrm{Ric}|^2 + R^3 \geqslant 0.$$

Aplicando este fato em (3.11), temos que

$$div((1+\tilde{f})^2\nabla|\mathrm{Ric}|^2) \geqslant -2R(1+\tilde{f})|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 + 2(1+\tilde{f})^2|C|^2 - 2\nabla_k((1+\tilde{f})^2R_{ij}C_{kij}) + 2(1+\tilde{f})^2|\nabla\mathrm{Ric}|^2. \tag{3.13}$$

Por (3.12) e (4), é válido afirmar que

$$\begin{aligned}\frac{R\tilde{f}}{n-1}g + \mathrm{Hess}\tilde{f} &= (1+\tilde{f})\mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g\\ &= (1+\tilde{f})\mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g - \frac{R\tilde{f}}{n}g + \frac{R\tilde{f}}{n}g.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}(1+\tilde{f})\mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g(1+\tilde{f}) &= \mathrm{Hess}\tilde{f} - \frac{R\tilde{f}}{n}g + \frac{R\tilde{f}}{n-1}g\\ &= \mathrm{Hess}\tilde{f} + \frac{R\tilde{f}}{n(n-1)}g,\end{aligned}$$

o que implica,

$$(1+\tilde{f})\left(\mathrm{Ric} - \frac{R}{n}g\right) = \mathrm{Hess}\tilde{f} - \frac{\Delta\tilde{f}}{n}g.$$

Utilizando a definição de tensor sem traço, obtemos

$$(1+\tilde{f})\mathring{\mathrm{Ric}} = \mathring{\mathrm{Hess}}\tilde{f}.$$

Multiplicando $\mathring{\mathrm{Ric}}$ em ambos os lados, segue que

$$(1+\tilde{f})|\mathring{\mathrm{Ric}}|^2 = (\mathring{\mathrm{Hess}}\tilde{f})\mathring{\mathrm{Ric}}. \tag{3.14}$$

Ademais, fazendo uso da informação de que R é constante e de (1.4), é válido que

$$\begin{aligned}\nabla_i(\nabla_j\tilde{f}\mathring{R}_{ij}) &= \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\mathring{R}_{ij} + \nabla_j\tilde{f}\nabla_i\mathring{R}_{ij}\\ &= \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\mathring{R}_{ij} + \nabla_j\tilde{f}\nabla_i\left(R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}\right)\\ &= \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\mathring{R}_{ij} + \nabla_j\tilde{f}\nabla_i R_{ij}\\ &= \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_j\tilde{f}\nabla_j R\\ &= \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\mathring{R}_{ij}.\end{aligned}$$

Integrando sobre a variedade M^3, vemos que

$$\int_M \nabla_i(\nabla_j f\mathring{R}_{ij})\, dM_g = \int_M \nabla_i\nabla_j\tilde{f}\mathring{R}_{ij}\, dM_g.$$

Aplicando o Teorema da Divergência e (3.14), resulta em

$$\int_M (1+\tilde{f})|\mathring{Ric}|^2\, dM_g = 0.$$

Tomando a integral em (3.13), concluímos que

$$0 \geqslant 2\int_M (1+\tilde{f})^2|C|^2\, dM_g + 2\int_M (1+\tilde{f})^2|\nabla Ric|^2\, dM_g \geqslant 0.$$

Pela desigualdade acima e a Proposição (3.2.2), concluímos que M^3 é localmente conformemente plana e $\nabla Ric = 0$. Por consequência, através de Chang, Hwang e Yun em ([15], Teorema 1.1), M^3 é isométrica a esfera padrão $\mathbb{S}^3$. □

Observação 3.2.4. *É possível deduzir também que M^3 é isométrica a esfera padrão $\mathbb{S}^3$ utilizando o Corolário 1.3 em [16].*

Teorema 3.2.5. *Seja (M^3, g, f) uma métrica V-estática tridimensional compacta, orientada, conexa com bordo suave ∂M e curvatura de Ricci não-negativa. Se f e κ satisfazem uma das seguintes condições:*

(i) $\kappa \geqslant 0$ *e* $f > 0$,

(ii) $\kappa \leqslant 0$ *e* $f < 0$,

então M^3 é localmente conformemente plana.

Demonstração. Integrando (3.11), podemos deduzir que

$$0 \geqslant 6\kappa\int_{M^3} f|\mathring{Ric}|^2\, dM_g + 2\int_{M^3} f^2|C|^2\, dM_g + 2\int_{M^3} f^2|\nabla Ric|^2\, dM_g,$$

onde utilizamos o Lema (3.1.4) e o Teorema da Divergência.

Então, se $\kappa \geqslant 0$, $f > 0$, ou $\kappa \leqslant 0$, $f < 0$, M^3 é localmente conformemente plana. □

Corolário 3.2.6. *Seja* (M^3, g, f) *um espaço vácuo estático tridimensional compacto, orientado, conexo, com bordo suave* ∂M*, curvatura de Ricci não-negativa, e* f *positiva. Então,* (M^3, g, f) *é dada por um espaço estático que é equivalente a uma das seguintes triplas:*

(i) O hemisfério padrão

$$(\mathbb{S}^3_+, g_{can}, f = x_4),$$

onde g_{can} *é a métrica da esfera padrão unitária.*

(ii) O cilindro padrão sobre $\mathbb{S}^2$ *com a métrica produto*

$$\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times \mathbb{S}^2, g_{prod} = dt^2 + \frac{1}{3}g_{can}, f = \frac{1}{\sqrt{3}}sen(\sqrt{3}t)\right).$$

Teorema 3.2.7. *Seja* (M^3, g, f) *métrica V-estática tridimensional compacta, orientada, conexa com bordo suave* ∂M *e curvatura de Ricci não-negativa. Se* $\kappa > 0$ *e* $f \geqslant 0$*,* M^3 *é uma variedade Einstein.*

Demonstração. Veja que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}div(f^2\nabla|Ric|^2) &= \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + f\Delta|Ric|^2 \\ &= \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle + div(f\nabla|Ric|^2). \end{aligned}$$

Sendo assim, fazendo uso do resultado acima, de (3.6) e do Lema (3.1.3), temos

$$\begin{aligned} div(f\nabla|Ric|^2) &= \frac{1}{f}div(f^2\nabla|Ric|^2) - \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle \\ &= 6fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - 6fR_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - 8R_{ij}\nabla_k fC_{kij} + \frac{4n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 \\ &\quad -2fR_{ij}\nabla_k C_{kij} + 2f|\nabla Ric|^2 - \langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle \\ &= 4fR_{ij}R_{jk}R_{ki} - 4fR_{ij}R_{hk}R_{ikjh} - 4R_{ij}\nabla_k fC_{kij} + \frac{2n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + 2f|\nabla Ric|^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Integrando (3.15), utilizando (3.10), o Lema (3.1.4), o Teorema da Divergência e o fato de que $f \leqslant 0$ obtemos:

$$0 \geqslant 3\int_{M^3} \kappa|\mathring{Ric}|^2\, dM_g + 2\int_{M^3} f(|\nabla Ric|^2 + |C|^2)\, dM_g.$$

Portanto, M^3 é uma variedade Einstein quando $\kappa > 0$. □

Corolário 3.2.8. *Seja* (M^3, g, f) *métrica crítica Miao-Tam tridimensional compacta, orientada, conexa com bordo suave* ∂M*, curvatura de Ricci não-negativa e f não-negativa. Então,* M^3 *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^3$ *ou* $\mathbb{S}^3$*.*

Capítulo 4

Métricas V-estáticas com curvatura seccional não-negativa

Neste capítulo estaremos interessados em obter direções para generalizar o caso tridimensional analisado no capítulo . Tal problema ainda permanece em aberto, mas aqui estudaremos as ideias desenvolvidas em [2] para concluir o caso muito forte, quando se considera a curvatua seccional não-negativa.

4.1 Lemas chaves

Lema 4.1.1. *Seja* $(M^n, g, \tilde{f})$ *uma métrica V-estática. Então, temos*

$$\tilde{f}(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijkl}\nabla_l \tilde{f} + \frac{R}{n-1}(\nabla_i \tilde{f} g_{jk} - \nabla_j \tilde{f} g_{ik}) - (\nabla_i \tilde{f} R_{jk} - \nabla_j \tilde{f} R_{ik}). \quad (4.1)$$

Demonstração. Partindo de

$$\tilde{f}R_{jk} + \kappa g_{jk} = \nabla_j \nabla_k \tilde{f} - \Delta \tilde{f} g_{jk},$$

e usando que g é paralelo, é possível derivar a equação acima e obter

$$(\nabla_i \tilde{f})R_{jk} + \tilde{f}\nabla_i R_{jk} = \nabla_i \nabla_j \nabla_k \tilde{f} - (\nabla_i \Delta \tilde{f})g_{jk}. \quad (4.2)$$

Além disso, por (2.4), como M^n tem curvatura escalar constante, segue que

$$\nabla_i \Delta \tilde{f} = -\frac{R}{n-1}\nabla_i \tilde{f}.$$

de modo que, substituindo em (4.2), implica

$$\tilde{f}\nabla_i R_{jk} = -(\nabla_i \tilde{f})R_{jk} + \nabla_i \nabla_j \nabla_k \tilde{f} + \frac{R}{n-1}\nabla_i \tilde{f} g_{jk}, \quad (4.3)$$

e, organizando os índices,

$$\tilde{f}\nabla_j R_{ik} = -(\nabla_j \tilde{f})R_{ik} + \nabla_j\nabla_i\nabla_k\tilde{f} + \frac{R}{n-1}\nabla_j\tilde{f}g_{ik}. \tag{4.4}$$

Subtraindo (4.3) e (4.4), e fazendo uso da Identidade de Ricci (1.2.8), segue que

$$\tilde{f}(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijkl}\nabla_l\tilde{f} + \frac{R}{n-1}(\nabla_i\tilde{f}g_{jk} - \nabla_j\tilde{f}g_{ik}) - (\nabla_i\tilde{f}R_{jk} - \nabla_j\tilde{f}R_{ik}),$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 4.1.2. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana. Então, temos*

$$R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl} = \frac{R}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}R_{ik}R_{jl}. \tag{4.5}$$

Demonstração. Utilizando (1.11), obtemos

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}R_{jl}R_{ik} &= W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} + \frac{1}{n-2}(R_{ik}R_{jl}R_{ik}g_{jl} + R_{jl}R_{jl}R_{ik}g_{ik} - R_{il}R_{jl}R_{ik}g_{jk} \\
&\quad -R_{jk}R_{jl}R_{ik}g_{il}) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}R_{jl}R_{ik}(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}) \\
&= W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} + \frac{1}{n-2}(R|Ric|^2 + R|Ric|^2 - R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ij}R_{jk}R_{ik}) \\
&\quad -\frac{R^3}{(n-1)(n-2)} + \frac{R}{(n-1)(n-2)}|Ric|^2 \\
&= W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} + \frac{(2n-1)}{(n-1)(n-2)}R|Ric|^2 - \frac{2}{n-2}R_{ij}R_{jk}R_{ik} - \frac{R^3}{(n-1)(n-2)},
\end{aligned}$$

o que implica,

$$\begin{aligned}
R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik} &= \frac{n}{n-2}R_{ij}R_{jk}R_{ik} - W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} - \frac{(2n-1)}{(n-1)(n-2)}R|Ric|^2 \\
&\quad +\frac{R^3}{(n-1)(n-2)}.
\end{aligned}$$

Veja que

$$\frac{R^3}{(n-1)(n-2)} = \frac{R^3}{n}\frac{(2n-1)}{(n-1)(n-2)} - \frac{R^3}{n(n-2)}.$$

Logo,

$$R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik} = \frac{n}{n-2}R_{ij}R_{jk}R_{ik} - W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} - \frac{(2n-1)}{(n-1)(n-2)}R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{R^3}{n(n-2)}. \tag{4.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} R_{ij}R_{jk}R_{ik} &= \left(\mathring{R}_{ij} + \frac{R}{n}g_{ij}\right)\left(\mathring{R}_{jk} + \frac{R}{n}g_{jk}\right)\left(\mathring{R}_{ik} + \frac{R}{n}g_{ik}\right) \\ &= \left(\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk} + 2\frac{R}{n}\mathring{R}_{ik} + \frac{R^2}{n^2}g_{ik}\right)\left(\mathring{R}_{ik} + \frac{R}{n}g_{ik}\right) \\ &= \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} + \frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 + 2\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^3}{n^2} \\ &= \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} + 3\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^3}{n^2}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$R_{ij}R_{ik}R_{jk} = \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} + 3\frac{R}{n}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^3}{n^2}.$$

Substituindo em (4.6), segue que

$$\begin{aligned} R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{jl}R_{ik} &= \frac{n}{n-2}\left(tr(\mathring{Ric}^3) + \frac{3}{n}R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{R^3}{n^2}\right) - W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} \\ &\quad -\frac{(2n-1)}{(n-1)(n-2)}R|\mathring{Ric}|^2 - \frac{R^3}{n(n-2)} \\ &= \frac{R}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}R_{jl}R_{ik}. \end{aligned}$$

Completando assim a prova. □

Lema 4.1.3. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão n com curvatura escalar constante. Seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave definida sobre* M. *Então,*

$$\begin{aligned} div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2) &= 2\tilde{f}|\nabla Ric|^2 - \tilde{f}|C_{ijk}|^2 + 2\tilde{f}\nabla_i(C_{ijk}R_{jk}) \\ &\quad + \frac{2}{n-1}\tilde{f}R|\mathring{Ric}|^2 + \langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle \\ &\quad + 2\tilde{f}\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right), \end{aligned}$$

onde $\mathring{Ric}^3$ *é o 2-tensor definido por* $(\mathring{Ric}^3)_{ij} = \mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{jl}$.

Demonstração. Primeiramente, vamos obter uma expressão para o laplaciano do quadrado da norma do tensor de Ricci. Fazendo uso da definição do tensor de Cotton e do fato de R ser constante, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta|Ric|^2 &= \Delta(R_{ij}R_{ij}) \\ &= 2R_{ij}\Delta R_{ij} + 2\langle\nabla R_{ij}, \nabla R_{ij}\rangle \\ &= 2R_{ij}\nabla_p\nabla_p R_{ij} + 2|\nabla Ric|^2 \\ &= 2|\nabla Ric|^2 + 2R_{ij}\nabla_p(C_{pij} + \nabla_i R_{pj}). \end{aligned}$$

Assim, da Identidade de Ricci (1.2.8) e pela antissimetria do tensor de Cotton, podemos reescrever a expressão acima do seguinte modo

$$\begin{aligned}
\Delta|Ric|^2 &= 2|\nabla Ric|^2 + 2R_{ij}\nabla_p C_{pij} + 2R_{ij}\nabla_p\nabla_i R_{pj} \\
&= 2|\nabla Ric|^2 + 2\nabla_p(C_{pij}R_{ij}) - 2\nabla_p R_{ij}C_{pij} + 2R_{ij}\nabla_p\nabla_i R_{pj} \\
&= 2|\nabla Ric|^2 + 2\nabla_p(C_{pij}R_{ij}) - |C_{ijk}|^2 + 2R_{ij}\nabla_p\nabla_i R_{pj} \\
&= 2|\nabla Ric|^2 + 2\nabla_p(C_{pij}R_{ij}) - |C_{ijk}|^2 + 2(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}).
\end{aligned}$$

Substituindo (4.5) no resultado acima e fazendo uso do fato que $W_{ijkl}R_{jl}R_{ik} = W_{ijkl}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ik}$, é válido que

$$\Delta|Ric|^2 = 2|\nabla Ric|^2 - |C_{ijk}|^2 + 2\nabla_p(C_{pij}R_{ij}) + \frac{2}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2 + \frac{2n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - 2W_{ijkl}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ik}.$$

Para finalizar, basta observar que

$$\begin{aligned}
div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2) &= \tilde{f}\Delta|Ric|^2 + \langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle \\
&= 2\tilde{f}|\nabla Ric|^2 - \tilde{f}|C_{kij}|^2 + 2\tilde{f}\nabla_p(C_{pij}R_{ij}) \\
&\quad + \frac{2}{n-1}\tilde{f}R|\mathring{Ric}|^2 + \langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle \\
&\quad + 2\tilde{f}\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ik}\right).
\end{aligned}$$

□

Lema 4.1.4. *Seja* $(M^n, g, \tilde{f})$ *uma métrica V-estática. Então, temos*

$$\frac{1}{2}div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2) = -\tilde{f}|C_{ijk}|^2 + \tilde{f}|\nabla Ric|^2 + \langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle - \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2 + 2\nabla_i(\tilde{f}C_{ijk}R_{jk}).$$

Demonstração. No que segue, denote por φ a função

$$\varphi = \nabla_i(\nabla_j\tilde{f}R_{ik}R_{kj} + R_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}R_{jk}).$$

Agora, pelo Lema (4.1.1) e tendo em vista que M tem curvatura escalar constante, obtemos

$$R_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}R_{jk} = \tilde{f}C_{ijk}R_{jk} - \frac{R}{n-1}(\nabla_i\tilde{f}g_{jk}R_{jk} - \nabla_j\tilde{f}g_{ik}R_{jk}) + (\nabla_i\tilde{f}R_{jk}R_{jk} - \nabla_j\tilde{f}R_{ik}R_{jk}).$$

Daí,

$$\nabla_j\tilde{f}R_{ik}R_{jk} + R_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}R_{jk} = \tilde{f}C_{ijk}R_{jk} + |Ric|^2\nabla_i\tilde{f} + \frac{R}{n-1}R_{ij}\nabla_j\tilde{f} - \frac{R^2}{n-1}\nabla_i\tilde{f}.$$

Desse modo,

$$\varphi = \nabla_i\left(\tilde{f}C_{ijk}R_{jk} + |Ric|^2\nabla_i\tilde{f} + \frac{R}{n-1}R_{ij}\nabla_j\tilde{f} - \frac{R^2}{n-1}\nabla_i\tilde{f}\right).$$

Fazendo uso da Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes (1.4), a função acima torna-se

$$\begin{aligned}\varphi &= \nabla_i(\tilde{f}C_{ijk}R_{jk}) + \nabla_i(|Ric|^2\nabla_i\tilde{f}) + \frac{R}{n-1}R_{ij}\nabla_i\nabla_j\tilde{f} - \frac{R^2}{n-1}\Delta\tilde{f}\\ &= \nabla_i(\tilde{f}C_{ijk}R_{jk}) + \langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle + |Ric|^2\Delta\tilde{f} + \frac{R}{n-1}R_{ij}\nabla_i\nabla_j\tilde{f} - \frac{R^2}{n-1}\Delta\tilde{f}.\end{aligned}$$

Observe agora que substituindo

$$\nabla_i\nabla_j\tilde{f} = \tilde{f}R_{ij} + (\Delta\tilde{f} + \kappa)g_{ij}.$$

em

$$|Ric|^2\Delta\tilde{f} + \frac{R}{n-1}R_{ij}\nabla_i\nabla_j\tilde{f} - \frac{R^2}{n-1}\Delta\tilde{f},$$

e utilizando (2.4), é imediato que,

$$\begin{aligned}|Ric|^2\Delta\tilde{f} + \frac{R}{n-1}R_{ij}\nabla_i\nabla_j\tilde{f} - \frac{R^2}{n-1}\Delta\tilde{f} &= |Ric|^2\Delta\tilde{f} + \frac{R}{n-1}R_{ij}(\tilde{f}R_{ij} + (\Delta\tilde{f} + \kappa)g_{ij})\\ &\quad -\frac{R^2}{n-1}\Delta\tilde{f}\\ &= |Ric|^2\Delta\tilde{f} + \frac{R}{n-1}|Ric|^2\tilde{f} - \frac{R^2}{n-1}\Delta\tilde{f}\\ &\quad +\frac{R^2}{n-1}\Delta\tilde{f} + \frac{\kappa R^2}{n-1}\\ &= |Ric|^2\Delta\tilde{f} + \frac{R}{n-1}|Ric|^2\tilde{f} + \frac{\kappa R^2}{n-1}\\ &= |Ric|^2\left(\frac{-\kappa n - R\tilde{f}}{n-1}\right) + \frac{R\tilde{f}}{n-1}|Ric|^2 + \frac{\kappa R^2}{n-1}\\ &= -\frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi = \nabla_i(\tilde{f}C_{ijk}R_{jk}) + \langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle - \frac{n\kappa}{n-1}|\mathring{Ric}|^2. \tag{4.7}$$

Por outro lado, usando Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes, Equação (1.4),

$$\varphi = \nabla_i\nabla_j\tilde{f}R_{ik}R_{kj} + \nabla_j\tilde{f}R_{ik}\nabla_iR_{kj} + \nabla_iR_{ijkl}R_{jk}\nabla_l\tilde{f} + R_{ijkl}\nabla_iR_{jk}\nabla_l\tilde{f} + R_{ijkl}R_{jk}\nabla_i\nabla_l\tilde{f},$$

onde por (1.12), (1.3), juntamente com as propriedades de simetria do tensor de Riemann podemos deduzir que

$$\begin{aligned}\varphi &= \nabla_i\nabla_j\tilde{f}R_{ik}R_{kj} + \nabla_j\tilde{f}R_{ik}(C_{kij} + \nabla_j R_{ik}) + C_{klj}R_{jk}\nabla_l\tilde{f} + \frac{1}{2}R_{ijkl}(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik})\nabla_l\tilde{f}\\ &\quad + R_{ijkl}R_{jk}\nabla_i\nabla_l\tilde{f}\\ &= (\nabla_j\tilde{f}R_{ik} - \nabla_i\tilde{f}R_{jk})C_{ijk} + \frac{1}{2}\langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle + \frac{1}{2}R_{ijkl}C_{ijk}\nabla_l\tilde{f} + \nabla_i\nabla_j\tilde{f}R_{ik}R_{kj}\\ &\quad + R_{ijkl}R_{jk}\nabla_i\nabla_l\tilde{f}.\end{aligned}$$

Usando o Lema (4.1.1), temos

$$\frac{1}{2}R_{ijkl}C_{ijk}\nabla_l\tilde{f} = \frac{1}{2}\tilde{f}|C_{ijk}|^2 + \frac{1}{2}(\nabla_i\tilde{f}R_{jk} - \nabla_j\tilde{f}R_{ik})C_{ijk}.$$

Sendo assim, substituindo a equação acima e utilizando (2.3),

$$\begin{aligned}\varphi &= (\nabla_j\tilde{f}R_{ik} - \nabla_i\tilde{f}R_{jk})C_{ijk} + \frac{1}{2}\langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle + \frac{1}{2}\tilde{f}|C_{ijk}|^2 + \frac{1}{2}(\nabla_i\tilde{f}R_{jk} - \nabla_j\tilde{f}R_{ik})C_{ijk}\\ &\quad + \left(-\frac{\kappa n}{n-1}g_{ij} + \tilde{f}R_{ij} - \frac{R\tilde{f}}{n-1}g_{ij}\right)R_{ik}R_{kj} + R_{ijkl}R_{jk}\left(-\frac{\kappa n}{n-1}g_{il} + \tilde{f}R_{il} - \frac{R\tilde{f}}{n-1}g_{il}\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Desenvolvendo, segue que

$$\varphi = \frac{1}{2}(\nabla_j\tilde{f}R_{ik} - \nabla_i\tilde{f}R_{jk})C_{ijk} + \frac{1}{2}\langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle + \frac{1}{2}\tilde{f}|C_{ijk}|^2 + \tilde{f}(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}). \tag{4.9}$$

Para proceder, note que de (1.12) podemos inferir que

$$\begin{aligned}\tilde{f}|C_{ijk}|^2 &= 2\tilde{f}\nabla_i R_{jk}C_{ijk}\\ &= 2\tilde{f}(|\nabla Ric|^2 - \nabla_i R_{jk}\nabla_j R_{ik})\\ &= 2\tilde{f}|\nabla Ric|^2 - 2\tilde{f}\nabla_i R_{jk}\nabla_j R_{ik}.\end{aligned}$$

Veja que

$$2\nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}) = 2\nabla_i R_{jk}\nabla_j\tilde{f}R_{ik} + 2\tilde{f}\nabla_j\nabla_i R_{jk}R_{ik} + 2\tilde{f}\nabla_i R_{jk}\nabla_j R_{ik}.$$

Consequentemente,

$$\tilde{f}|C_{ijk}|^2 = 2\tilde{f}|\nabla Ric|^2 - 2\nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}) + 2\nabla_i R_{jk}\nabla_j fR_{ik} + 2\tilde{f}\nabla_j\nabla_i R_{jk}R_{ik},$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{f}|C_{ijk}|^2 - \tilde{f}|\nabla Ric|^2 + \nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}) &= \nabla_i R_{jk}\nabla_j f R_{ik} + \tilde{f}\nabla_j\nabla_i R_{jk}R_{ik} \\
&= \nabla_i R_{jk}\nabla_j \tilde{f} R_{ik} + \tilde{f}\nabla_j\nabla_i R_{jk}R_{ik} \\
&= \nabla_i R_{jk}\nabla_j \tilde{f} R_{ik} + \tilde{f}(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}) \\
&= \frac{1}{2}C_{ijk}(\nabla_j\tilde{f}R_{ik} - \nabla_i\tilde{f}R_{jk}) + \frac{1}{2}\langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle \\
&\quad + \tilde{f}(R_{ij}R_{ik}R_{jk} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}).
\end{aligned}$$

Outrossim, combinando a expressão acima com (4.9), é fácil checar que

$$\varphi = \tilde{f}|C_{ijk}|^2 - \tilde{f}|\nabla Ric|^2 + \nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}). \tag{4.10}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\nabla_j(\tilde{f}C_{ijk}R_{ik}) &= \nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}) - \nabla_j(\tilde{f}\nabla_j R_{ik}R_{ik}) \\
&= \nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}) - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|Ric|^2\rangle - (1+f)(\nabla_j\nabla_j R_{ik})R_{ik} - \tilde{f}|\nabla Ric|^2 \\
&= \nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}) - \frac{1}{2}\langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle - \frac{1}{2}\tilde{f}\Delta|Ric|^2 \\
&= \nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}) - \frac{1}{2}div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_j(\tilde{f}\nabla_i R_{jk}R_{ik}) = \nabla_j(\tilde{f}C_{ijk}R_{ik}) + \frac{1}{2}div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2).$$

Desse modo, por (4.10),

$$\varphi = \tilde{f}|C_{ijk}|^2 - \tilde{f}|\nabla Ric|^2 + \nabla_j(\tilde{f}C_{ijk}R_{ik}) + \frac{1}{2}div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2). \tag{4.11}$$

Destarte, de (4.7) e (4.11), segue o resultado. □

Observação 4.1.5. *Observe que se* (M^n, g, f) *for uma métrica CPE, teremos*

$$\varphi = \nabla_i((1+f)C_{ijk}R_{jk}) + \nabla_i(|Ric|^2\nabla_i f) + \frac{R}{n-1}R_{jk}\nabla_i\nabla_j f - \frac{R^2}{n-1}\Delta f. \tag{4.12}$$

Utilizando a Equação (3), temos que

$$\nabla_i\nabla_j f = \mathring{Ric} + R_{ij}f + \Delta f g_{ij}.$$

Sendo assim, seguindo de modo análogo ao que foi feito no lema acima, é válido que

$$\frac{R}{n-1}R_{ij}\nabla_i\nabla_j f - \frac{R^2}{n-1}\Delta f = \frac{R}{n-1}(1+f)|\mathring{Ric}|^2 - \frac{R^2}{n}\Delta f.$$

Substituindo esse fato em (4.12), concluímos que

$$\varphi = \nabla_i((1+f)C_{ijk}R_{jk}) + \nabla_i(|Ric|^2\nabla_i f) + \frac{R}{n-1}(1+f)|\mathring{Ric}|^2 - \frac{R^2}{n}\Delta f,$$

e, integrando, obtemos

$$\int_M (1+f)R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g = 0. \tag{4.13}$$

Lema 4.1.6. *Seja* $(M^n, g, \tilde{f})$ *uma métrica V-estática . Então, temos*

$$\begin{aligned}
\int_M |\mathring{Ric}|^2|\nabla\tilde{f}|^2\, dM_g &= \int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g + \frac{n-3}{2(n-1)}\int_M \tilde{f}^2|C_{ijk}|^2\, dM_g \\
&+\frac{2}{n-1}\int_M \tilde{f}^2R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g - \frac{n-2}{n-1}\int_M \tilde{f}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}\, dM_g \\
&+\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right) dM_g \\
&+\frac{n\kappa}{n-1}\int_M \tilde{f}|\mathring{Ric}|^2\, dM_g.
\end{aligned}$$

Demonstração. Inicialmente, multiplicamos a equação obtida no Lema (4.1.3) por $\tilde{f}$. Então, integrando por partes sobre M,

$$\begin{aligned}
\int_M div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2)\tilde{f}\, dM_g &= 2\int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g - \int_M \tilde{f}^2|C_{ijk}|^2\, dM_g \\
&+2\int_M \tilde{f}^2\nabla_i(C_{ijk}R_{jk})\, dM_g + \frac{2}{n-1}\int_M \tilde{f}^2R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\
&+\int_M \tilde{f}\langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle\, dM_g \\
&+2\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right).
\end{aligned}$$

Observe que

$$div(\tilde{f}X) = \tilde{f}divX + \langle\nabla\tilde{f}, X\rangle,$$

e, como consequência,

$$\tilde{f}div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2) = div(\tilde{f}^2\nabla|Ric|^2) - \tilde{f}\langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle.$$

Daí,

$$\int_M \tilde{f}div(\tilde{f}\nabla|Ric|^2)\, dM_g = -\int_M \tilde{f}\langle\nabla\tilde{f}, \nabla|Ric|^2\rangle.$$

Além disso, note que

$$\int_M \nabla_i(\tilde{f}^2C_{ijk}R_{jk}) = \int_M C_{ijk}R_{jk}\nabla_i\tilde{f}^2\, dM_g + \int_M \tilde{f}^2\nabla_i(C_{ijk}R_{jk})\, dM_g,$$

o que implica em

$$\int_M \tilde{f}^2 \nabla_i (C_{ijk} R_{jk})\, dM_g = -2 \int_M C_{ijk} R_{jk} \tilde{f} \nabla_i \tilde{f}\, dM_g.$$

Destarte,

$$\begin{aligned} -2\int_M \tilde{f}\langle \nabla \tilde{f}, \nabla |Ric|^2\rangle\, dM_g &= 2\int_M \tilde{f}^2 |\nabla Ric|^2\, dM_g - \int_M \tilde{f}^2 |C_{ijk}|^2\, dM_g - 4\int_M \tilde{f} C_{ijk} \nabla_i \tilde{f} R_{jk} \\ &+ \frac{2}{n-1}\int_M R\tilde{f}^2 |\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ &+ 2\int_M \tilde{f}^2 \left(\frac{n}{n-2} tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right). \end{aligned}$$

Porém,

$$\tilde{f}\langle \nabla \tilde{f}, \nabla |Ric|^2\rangle = \frac{1}{2}\langle \nabla \tilde{f}^2, \nabla |Ric|^2\rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\int_M \langle \nabla \tilde{f}^2, \nabla |Ric|^2\rangle\, dM_g &= 2\int_M \tilde{f}^2 |\nabla Ric|^2\, dM_g - \int_M \tilde{f}^2 |C_{ijk}|^2\, dM_g \\ &- 4\int_M \tilde{f} C_{ijk} \nabla_i \tilde{f} R_{jk}\, dM_g + \frac{2}{n-1}\int_M R\tilde{f}^2 |\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ &+ 2\int_M \tilde{f}^2 \left(\frac{n}{n-2} tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right) dM_g. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Desde que o tensor Cotton satisfaça

$$\begin{aligned} C_{ijk} \nabla_i \tilde{f} R_{jk} &= \frac{1}{2} C_{ijk} (\nabla_i \tilde{f} R_{jk} - \nabla_i \tilde{f} R_{ik}) \\ &= -\frac{n-2}{2(n-1)} C_{ijk} T_{ijk}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

e, levando em consideração a identidade

$$\tilde{f} C_{ijk} = T_{ijk} + W_{ijkl} \nabla_l \tilde{f}, \tag{4.16}$$

em consonância com o fato que M tem curvatura escalar constante e que

$$-\int_M \langle \nabla \tilde{f}^2, \nabla |Ric|^2\rangle\, dM_g = \int_M |\mathring{Ric}|^2 \Delta \tilde{f}^2\, dM_g,$$

não é difícil verificar que (4.14) torna-se

$$\begin{aligned} \int_M |\mathring{Ric}|^2 \Delta \tilde{f}^2\, dM_g &= 2\int_M \tilde{f}^2 |\nabla Ric|^2\, dM_g - \int_M \tilde{f}^2 |C_{ijk}|^2\, dM_g - 4\int_M \tilde{f} C_{ijk} \nabla_i \tilde{f} R_{jk}\, dM_g \\ &+ \frac{2n-4}{n-1}\int_M \tilde{f} C_{ijk} (\tilde{f} C_{ijk} - W_{ijkl} \nabla_l \tilde{f})\, dM_g \\ &+ \frac{2}{n-1}\int_M \tilde{f}^2 R |\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ &+ 2\int_M \tilde{f}^2 \left(\frac{n}{n-2} tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} \right) dM_g, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int_M |\mathring{Ric}|^2\Delta\tilde{f}^2\, dM_g &= 2\int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g + \frac{n-3}{n-1}\int_M \tilde{f}^2|C_{ijk}|^2\, dM_g \\ &-\frac{2n-4}{n-1}\int_M \tilde{f}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}\, dM_g + 2\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3)\right. \\ &\left.-W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right) dM_g + \frac{2}{n-1}\int_M \tilde{f}^2R|\mathring{Ric}|^2. \qquad (4.17)\end{aligned}$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{f}^2 &= 2\tilde{f}\Delta\tilde{f} + 2\langle\nabla\tilde{f},\nabla\tilde{f}\rangle \\ &= 2\tilde{f}\Delta\tilde{f} + 2|\nabla\tilde{f}|^2 \\ &= 2\tilde{f}\left(\frac{-R\tilde{f}-n\kappa}{n-1}\right) + 2|\nabla\tilde{f}|^2. \qquad (4.18)\end{aligned}$$

Sendo assim, substituindo em (4.17), segue que

$$\begin{aligned}&\int_M |\mathring{Ric}|^2 2\tilde{f}\frac{-R}{n-1}\tilde{f}\, dM_g + \int_M |\mathring{Ric}|^2 2\tilde{f}\frac{-n\kappa}{n-1}\, dM_g + 2\int_M |\mathring{Ric}|^2|\nabla\tilde{f}|^2\, dM_g \\ &= 2\int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g + \frac{n-3}{n-1}\int_M \tilde{f}^2|C_{ijk}|^2\, dM_g - \frac{2n-4}{n-1}\int_M \tilde{f}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}\, dM_g \\ &+2\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right) dM_g + \frac{2}{n-1}\int_M \tilde{f}^2R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g,\end{aligned}$$

o que implica em,

$$\begin{aligned}\int_M |\mathring{Ric}|^2|\nabla\tilde{f}|^2\, dM_g &= \int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g + \frac{n-3}{2(n-1)}\int_M \tilde{f}^2|C_{ijk}|^2\, dM_g \\ &+\frac{2}{n-1}\int_M \tilde{f}^2R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g + \frac{n\kappa}{n-1}\int_M \tilde{f}|\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ &+\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right) dM_g \\ &-\frac{n-2}{n-1}\int_M \tilde{f}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}\, dM_g.\end{aligned}$$

□

A seguir, iremos proceder de maneira similar ao Lema anterior, utilizando agora o Lema (4.1.4), para deduzir a fórmula de $\int_M |\mathring{Ric}|^2|\nabla\tilde{f}|^2\, dM_g$.

Lema 4.1.7. *Seja* $(M^n, g, \tilde{f})$ *uma métrica V-estática. Então,*

$$\begin{aligned}\int_M |\mathring{Ric}|^2|\nabla\tilde{f}|^2 &= \frac{1}{n-1}\int_M \tilde{f}^2R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g + \frac{n\kappa}{3(n-1)}\int_M \tilde{f}|\mathring{Ric}|^2\, dM_g + \frac{2}{3}\int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g \\ &-\frac{2}{3(n-1)}\int_M \tilde{f}^2|C_{ijk}|^2\, dM_g - \frac{2(n-2)}{3(n-1)}\int_M \tilde{f}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}\, dM_g.\end{aligned}$$

Demonstração. Primeiramente, multiplicando o Lema (4.1.4) por $\tilde{f}$ e tomando a integral sobre M

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\int_M \langle \nabla \tilde{f}^2, \nabla |Ric|^2\rangle \, dM_g &= -\int_M \tilde{f}^2 |C_{ijk}|^2 \, dM_g + \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla \tilde{f}^2, \nabla |Ric|^2\rangle \, dM_g + \int_M \tilde{f}^2 |\nabla Ric|^2 \, dM_g \\
&\quad - \int_M \frac{n\kappa \tilde{f}}{n-1} |\mathring{Ric}|^2 \, dM_g + 2\int_M \tilde{f}\nabla_i(\tilde{f} C_{ijk} R_{jk}) \, dM_g.
\end{aligned}
$$

Note que

$$
2\int_M \tilde{f}\nabla_i(\tilde{f} C_{ijk} R_{jk}) = -2\int_M \tilde{f} C_{ijk} \nabla_i \tilde{f} R_{jk} \, dM_g.
$$

Desse modo,

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{4}\int_M \langle \nabla \tilde{f}^2, \nabla |Ric|^2\rangle \, dM_g &= \int_M \tilde{f}^2 |\nabla Ric|^2 \, dM_g - \int_M \tilde{f}^2 |C_{ijk}|^2 \, dM_g \\
&\quad - \int_M \frac{n\kappa}{n-1} \tilde{f} |\mathring{Ric}|^2 \, dM_g - 2\int_M \tilde{f} C_{ijk} \nabla_i \tilde{f} R_{jk} \, dM_g.
\end{aligned}
$$

Por (4.15) e (4.16), temos

$$
\begin{aligned}
C_{ijk}\nabla_i \tilde{f} R_{jk} &= -\frac{n-2}{2(n-1)} C_{ijk}(\tilde{f} C_{ijk} - W_{ijkl}\nabla_l \tilde{f}) \\
&= -\frac{n-2}{2(n-1)} \tilde{f} |C_{ijk}|^2 + \frac{n-2}{2(n-1)} C_{ijk} W_{ijkl} \nabla_l \tilde{f}.
\end{aligned}
$$

Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
-2\int_M \tilde{f} C_{ijk}\nabla_i \tilde{f} R_{jk} \, dM_g &= -2\int_M \tilde{f}\left[-\frac{n-2}{2(n-1)} \tilde{f} |C_{ijk}|^2 + \frac{n-2}{2(n-1)} C_{ijk} W_{ijkl}\nabla_l \tilde{f}\right] dM_g \\
&= \frac{n-2}{n-1}\int_M \tilde{f}^2 |C_{ijk}|^2 \, dM_g - \frac{n-2}{n-1}\int_M \tilde{f} C_{ijk} W_{ijkl} \nabla_l \tilde{f} \, dM_g.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}\int_M |\mathring{Ric}|^2 \Delta \tilde{f}^2 \, dM_g &= \int_M \tilde{f}^2 |\nabla Ric|^2 \, dM_g - \frac{1}{n-1}\int_M \tilde{f}^2 |C_{ijk}|^2 \, dM_g \\
&\quad - \int_M \frac{n\kappa}{n-1} \tilde{f} |\mathring{Ric}|^2 \, dM_g - \frac{n-2}{n-1}\int_M \tilde{f} C_{ijk} W_{ijkl} \nabla_l \tilde{f} \, dM_g.
\end{aligned}
$$

Fazendo uso de (4.18), é visto que

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}\int_M |\mathring{Ric}|^2 \left[2\tilde{f}\left(\frac{-R\tilde{f} - n\kappa}{n-1}\right) + 2|\nabla \tilde{f}|^2\right] dM_g &= \int_M \tilde{f}^2 |\nabla Ric|^2 \, dM_g - \frac{1}{n-1}\int_M \tilde{f}^2 |C_{ijk}|^2 \, dM_g \\
&\quad - \frac{n\kappa}{n-1}\int_M \tilde{f} |\mathring{Ric}|^2 \, dM_g \\
&\quad - \frac{n-2}{n-1}\int_M \tilde{f} C_{ijk} W_{ijkl} \nabla_l \tilde{f} \, dM_g,
\end{aligned}
$$

resultando em

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\int_M |\mathring{Ric}|^2|\nabla\tilde{f}|^2\, dM_g &= \frac{3}{2(n-1)}\int_M \tilde{f}^2 R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g + \frac{n\kappa}{2(n-1)}\int_M \tilde{f}|\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ &+\int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g - \frac{1}{n-1}\int_M \tilde{f}^2|C_{ijk}|^2\, dM_g \\ &-\frac{n-1}{n-1}\int_M \tilde{f}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}\, dM_g.\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{2}{3}$, obtemos o resultado. □

4.2 Teorema geral

Lembremos inicialmente que os resultados a seguir são anteriores ao que foi visto no capítulo anterior, tendo em vista que o resultado parcial relacionado à curvatura seccional é mais fraco que o da curvatura de Ricci.

Teorema 4.2.1. *Seja* $(M^n, g, \tilde{f})$ *uma métrica V-estática. Então, temos a seguinte fórmula integral*

$$\begin{aligned}0 &= \int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g + \frac{3n-5}{2(n-1)}\int_M \tilde{f}^2|C|^2\, dM_g + \frac{2n\kappa}{n-1}\int_M \tilde{f}|\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ &+3\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right) dM_g - \frac{n-2}{n-1}\int_M \tilde{f}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}\, dM_g \\ &+\frac{3}{n-1}\int_M \tilde{f}^2 R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g. \qquad (4.19)\end{aligned}$$

Demonstração. Subtraindo os Lemas (4.1.6) e (4.1.7), segue que

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{3}\int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g + \frac{3n-5}{6(n-1)}\int_M \tilde{f}^2|C|^2\, dM_g + \frac{2n\kappa}{3(n-1)}\int_M \tilde{f}|\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ &+\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}\right) dM_g - \frac{n-2}{3(n-1)}\int_M \tilde{f}C_{ijk}W_{ijkl}\nabla_l\tilde{f}\, dM_g \\ &+\frac{1}{n-1}\int_M \tilde{f}^2 R|\mathring{Ric}|^2\, dM_g.\end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por 3, obtemos o desejado. □

Ademais, assumindo que M^n tem curvatura de Weyl radialmente nula, é fácil ver que (4.19) é equivalente a

$$\begin{aligned}0 &= \int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g + \frac{3n-5}{2(n-1)}\int_M \tilde{f}^2|C|^2\, dM_g + \frac{2n\kappa}{n-1}\int_M \tilde{f}|\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ &+3\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{1}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2\right) dM_g. \qquad (4.20)\end{aligned}$$

Vejamos agora alguns corolários advindos desse resultado para cada uma das métricas.

- Métricas CPE:

Corolário 4.2.2. *A conjectura CPE é verdadeira para variedades n-dimensionais com curvatura seccional não-negativa satisfazendo curvatura de Weyl radialmente nula.*

Demonstração. Tratando-se de uma métrica CPE, temos que $\kappa = -\dfrac{R}{n}$ e, assim utilizamos (4.13), para obtermos que (4.20) é equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (1+f)^2 |\nabla Ric|^2 \, dM_g + \frac{3n-5}{2(n-1)} \int_M (1+f)^2 |C|^2 \, dM_g \\ &\quad + 3\int_M (1+f)^2 \left(\frac{n}{n-2} tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{1}{n-1} R|\mathring{Ric}|^2 \right) dM_g. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Para proceder, precisaremos da seguinte estimativa pontual que é satisfeita em geral para toda métrica com curvatura seccional não-negativa, nomeadamente,

$$R_{ij}R_{jk}R_{ik} \geqslant R_{ijkl}R_{ik}R_{jl}. \tag{4.22}$$

De fato, seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ auto-vetores de Ric e seja λ_i seus auto-valores correspondentes. Então, temos

$$\begin{aligned} R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl} &= \sum_i \lambda_i^3 - \sum_{i,j} R_{ijij}\lambda_i\lambda_j \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i^2 R_{ijij} - \sum_{i,j} R_{ijij}\lambda_i\lambda_j \\ &= \sum_{i,j} (\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_j) R_{ijij}. \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{i,j} (\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_j) R_{ijij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} (\lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2) R_{ijij} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \lambda_i^2 R_{ijij} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \lambda_i^2 R_{ijij} - \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j R_{ijij} \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i^2 R_{ijij} - \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j R_{ijij} \\ &= \sum_{i,j} (\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_j) R_{ijij}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$R_{ij}R_{jk}R_{ik} - R_{ijkl}R_{ik}R_{jl} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij},$$

ou seja,

$$R_{ij}R_{jk}R_{ik} = R_{ijkl}R_{ik}R_{jl} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j)^2 K_{ij},$$

onde K_{ij} é a curvatura seccional definida por dois planos gerados por e_i e e_j. Portanto, supondo a métrica com curvatura seccional não-negativa, é válida a desigualdade (4.22). Por fim, pelo Lema (4.1.2) e por (4.22), é possível deduzir que cada termo de (4.21) deve ser não-negativo. Em particular, concluímos, juntamente com a Proposição (3.2.2), que M^n tem Curvatura de Ricci paralela. Destarte, pelo Teorema 1.1 [15], segue o resultado. □

Observação 4.2.3. *Observe que (4.21) equivale a (3.10).*

É conhecido que, para $n = 3$, o tensor Weyl é identicamente nulo. Então, quando $n = 3$, é fácil verificar que a métrica CPE com curvatura seccional não-negativa deve ser isométrica a 3-esfera padrão. Desse modo, fica estabelecido o seguinte:

Corolário 4.2.4. *A conjectura CPE é verdadeira para variedades 3-dimensional com curvatura seccional não-negativa.*

- Métricas Miao-Tam:

Corolário 4.2.5. *Seja* $(M^n, g, \tilde{f})$ *uma métrica Miao-Tam, orientada, compacta, conexa com bordo suave* ∂M*,* f *não-negativa, curvatura seccional não-negativa e curvatura de Weyl radialmente nula. Então,* M^n *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$*.*

Demonstração. Pelo Teorema (4.2.1), temos

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \int_M \tilde{f}^2|\nabla Ric|^2\, dM_g + \frac{3n-5}{2(n-1)}\int_M \tilde{f}^2|C|^2\, dM_g + \frac{2n}{n-1}\int_M \tilde{f}|\mathring{Ric}|^2\, dM_g \\ & +3\int_M \tilde{f}^2\left(\frac{n}{n-2}tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{1}{n-1}R|\mathring{Ric}|^2\right) dM_g \end{aligned}$$

Desse modo, Ricci é paralelo e, consequentemente, M^n é Einstein e podemos aplicar o Teorema (0.0.8). □

- Métricas Estáticas:

Corolário 4.2.6. *Seja* $(M^n, g, \tilde{f})$ *uma tripla estática positiva com curvatura seccional não-negativa, curvatura de Weyl radialmente nula e curvatura escalar R=n(n-1). Então,* M^n *é isométrica ao hemisfério padrão* $\mathbb{S}^n_+$ *ou ao cilindro padrão sobre* $\mathbb{S}^{n-1}$ *com a métrica produto descrita no Teorema (0.0.5).*

Demonstração. Pelo Teorema (4.2.1),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \tilde{f}^2 |\nabla Ric|^2 \, dM_g + \frac{3n-5}{2(n-1)} \int_M \tilde{f}^2 |C|^2 \, dM_g \\ &+3 \int_M \tilde{f}^2 \left(\frac{n}{n-2} tr(\mathring{Ric}^3) - W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} + \frac{1}{n-1} R |\mathring{Ric}|^2 \right) dM_g. \end{aligned}$$

Desse modo, o Ricci é paralelo e $C = 0$.

Analisaremos agora o tensor de Bach. Vejamos que, por definição,

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3} \nabla_k \nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} R_{kl} W_{ikjl}.$$

Multiplicando por $(n-2)$ e utilizando a Equação (1.14), temos

$$(n-2) B_{ij} = \nabla_k C_{kij} + R_{kl} W_{ikjl},$$

Daí, usando que $C = 0$ e multiplicando por f, obtemos

$$(n-2) f B_{ij} = W_{ikjl} f R_{kl}.$$

Utilizamos agora a Equação (6) e o fato de que o Weyl é livre de traços,

$$\begin{aligned} (n-2) f B_{ij} &= W_{ikjl} \nabla_i \nabla_j f \\ &= \nabla_i (W_{ikjl} \nabla_j f) - \nabla_i W_{ikjl} \nabla_j f \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos a hipótese e a Equação (1.14).

Logo, M^n é Bach-flat, e podemos utilizar o Teorema (0.0.5).

Concluímos assim o que queríamos. □

Observação 4.2.7. *Note que no Corolário acima, retiramos o caso do Espaço Schwarzschild, pois o mesmo possui Curvatura Seccional negativa. Podemos observar isso pelo Teorema (4.2.1).*

Se $K \geqslant 0$, *então* $\nabla Ric = 0$, *o que é uma contradição pelo que vimos no Capítulo 2, Exemplo (3).*

Referências Bibliográficas

[1] Ambrozio, L.; *On static three-manifolds with positive scalar curvature*. Journal of Differential Geometry, v. 107, n. 1, p. 1–45, 2017.

[2] Baltazar, H.; *On critical point equation of compact manifolds with zero radial Weyl curvature*. Geom. Dedic. **202**(2019), 337-355.

[3] Baltazar, H.; Jr. Ribeiro, E.; *Critical metrics of the volume functional on manifolds with boundary*. Proc. Amer. Math. Soc. 145(2017), 3513-3523.

[4] Baltazar, H.; Jr. Ribeiro, E.; *Remarks on critical metrics of the scalar curvature and volume functionals on compact manifolds with boundary*. Pacific J. Math. 297(2018), 29-45.

[5] Barros, A.; da Silva, A.; *Rigidity for critical metrics of the volume functional*. Math. Nachr. 292 (2019), 709-719.

[6] Barros, A.; Jr. Ribeiro, E; *Critical point equation on four-dimensional compact manifolds*. Math. Nachr., v. 14, p. 1618–1623, 2014.

[7] Barros, A., Leandro, B.; Jr., Ribeiro E.; *Critical metrics of the total scalar curvature functional on 4-manifolds*. Math. Nachr., v. 16, p. 1814–1821, (2015).

[8] Barros, A.; Diógenes; Jr. Ribeiro, E.; *Bach-flat critical metrics of the volume functional on 4-dimensional manifolds with boundary*. J. Geom. Anal. 25 (2015),2698-2715.

[9] Batista, R.; Diógenes; Ranieri, M.; Jr. Ribeiro, E.; *Critical metrics of the volume functional on compact three-manifolds with smooth boundary*. J. Geom. Anal. 27 (2017), 1530-1547.

[10] Besse, A.L; *Einstein Manifolds*. Springer, Berlin, (1987).

[11] Boucher, W., Gibbons, G., Horowitz, G.; *Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime.* Phys. Rev. D. 30, 2447 (1984).

[12] Caminha, A.; *Tópicos de Geometria Diferencial.* SBM, 1a ed., 2014.

[13] Cao, H.-D., Chen, Q.; *On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitions.* Duke Math. J. 162 (2013), 1149-1169.

[14] Chang, J., Hwang, S., Yun, G.; *Rigidity of the critical point equation.* Math. Nachr. 283, 846–853 (2010).

[15] Chang, J., Hwang, S., Yun, G.; *Critical point metrics of the total scalar curvature.* Bull. Korean Math. Soc. 49, 655–667 (2012).

[16] Chang, J., Hwang, S., Yun, G.; *Total scalar curvature and harmonic curvature.* Taiwan. J. Math. 18, 1439–1458 (2014).

[17] Chang, J., Hwang, S., Yun, G.; *Erratum to: total scalar curvature and harmonic curvature.* Taiwan. J. Math. 20(3), 699–703 (2016).

[18] Chow, B.; Lu, P.; Ni, L.; *Hamilton's Ricci Flow.* American Mathematical Society, (2006).

[19] Corvino, J.; Eichmair, M.; Miao, P. *Deformation of scalar curvature and volume.* Math. Annalen. 357 (2013) 551-584.

[20] COSTA, J.; DIÓGENES, R.; PINHEIRO, N.; RIBEIRO JUNIOR, E. *Geometry of static perfect fluid space-time.* Classical And Quantum Gravity, [S.L.], v. 40, n. 20, p. 205012, 22 set. 2023.

[21] de Sousa, B.F.; *Hipersuperfícies Tipo-espaço Completas com Curvatura Média Constante Imersas no Steady State Space*, Dissertação de Mestrado, UFCG, 2011.

[22] Corvino, J.; Eichmair, M.; MIAO, P. *Deformation of scalar curvature and volume.* Math. Annalen, v. 357, p. 551–584, (2013).

[23] do Carmo, M. P.; - *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[24] Dias, G.S.F.; *Rigidez de Hipersuperfícies Imersas em Produto Warped*, Tese de Doutorado, UFPI, 2023.

[25] Gibbons, S.; Hartnoll, S.; Pope, C.; *Bohm and Einstein-Sasaki metrics, black holes and cosmological event horizonts*. Phys. Rev. D., v. 67, p. 84024, 2003.

[26] Hawking, S., Ellis, G.; *The large scale structure of space-time*. Camndridge University Press, Cambridge, (1975).

[27] He, H.; *Critical metrics of the functional on three-dimensional manifolds*, Math. Nachr. **296** (2023), 2838-2849.

[28] Hijazi, O.; Montiel, S.; Raulot, S.; *Uniqueness of de Sitter spacetime among static vacua with positive cosmological constant.* Ann. Glob. Anal. Geom., v. 47, n. 2, p.167–178, 2015.

[29] Hwang, S.; *Critical points of the total scalar curvature functional on the space of metrics of constant scalar curvature*. Manuscr. Math. 103, 135–142 (2000).

[30] Kim, J., Shin, J.; *Four dimensional static and related critical spaces with harmonic curvatura*. Pacific J.Math. 295 (2018), 429-462.

[31] Kobayashi, O.; *A diferrential equation arising from scalar curvature function*. J.Math. Soc. Japan. **34** (1982), no.4, 665-675.

[32] Kobayashi, O., Obata, M.; *Conformally-flatness and static space-time*. Manifolds and Lie Groups, Progr.Math.vol.14, Birkhäuser (1981), 197-206.

[33] Lafontaine, J.; *Sur la géométrie d'une généralisation de l'équation différentielle d'Obata*. J. Math. Pures Appliquées, v. 62, p. 63–72, 1983.

[34] Lindblom, L.; *Some properties of static general relativistic stellar models*. J. Math. Phys. 21 (1980), 1455-1459.

[35] Miao, P., Tam, L.-F.; *On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature*. Calc. Var. PDE. 36, 141–171, 2009.

[36] Miao, P., Tam, L.-F.; *Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional*. Trans. Am. Math. Soc. 363, 2907–2937, (2011).

[37] Obata, M.; *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*. J. Math. Soc. Japan, v. 14, p. 333–340, (1962).

[38] O'Neill, B.; *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London, 1983.

[39] Qing, J.; Yuan, W.; *A note on static spaces and related problems.* J. Geom. and Phys., v. 74, p. 18–27, (2013).

[40] Queiroz, C. C. S.; *Sóliton de Ricci Contrátil com integral pinçada*, Dissertação de Mestrado, UFPI, 2020.

[41] Reilly, R.; *Application of the Hessian operator in a Riemannian manifold.* Indiana Univ. Math. J. 26 (1977) 459-472.

[42] Sousa, G. A.; *Rigidez de variedades tipo-Einstein gradiente.* Dissertação de mestrado, UFAM (2019).

[43] Yuan, W.; *The geometry of vacuum static spaces and deformations of scalar curvature.* Ph.D. Thesis, UC Santa Cruz, 2015.

[44] Yuan, W.; *Volume comparison with respect to scalar curvature.* arXiv:1609.08849v1 [math.DG] (2016).