Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Controlabilidade exata via método HUM para uma equação de onda com coeficientes variáveis em um domínio cilíndrico

Andressa Gomes

Teresina - 2015

Andressa Gomes

Dissertação de Mestrado:

Controlabilidade exata via método HUM para uma equação de onda com coeficientes variáveis em um domínio cilíndrico

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira
Co-Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

G633c Gomes, Andressa.
Controlabilidade exata via método HUM para uma equação de onda com coeficientes variáveis em um domínio cilíndrico. / Andressa Gomes – Teresina, 2015.
74f.

Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Piauí, 2015.
Orientador: Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira
Co-orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

1.Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3.Equações Hiperbólicas. 4. Teoria de Controle Exato. I. Título.

CDD 515.353

Ao meu querido pai João Gomes,
e irmãos Airton e Anderson.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por nunca ter me desamparado e ter sido fonte de toda a força necessária para passar por cada etapa até a obtenção deste título.

Agradeço ao meu pai João Maria Gomes pelo apoio incondicional durante toda a vida, por estar sempre ao meu lado em cada momento, momentos de dificuldades ou momentos de alegrias. Por ter me dado a mão e me ajudado a levantar em cada tropeço durante a trajetória, por ter vibrado comigo em cada pequena conquista e por seu amor imensurável que sempre foi motivação pra seguir em frente.

Agradeço ao meu irmão Airton Gomes e minha cunhada Zenyr Vaz de Carvalho Gomes por terem aberto as portas de seu lar para me receber durante toda a minha gradução que foi onde nasceu o desejo de prosseguir na área de pesquisa Matemática. Ao meu irmão Anderson Gomes por me proporcionar o prazer de seu companheirismo no último ano de mestrado.

Agradeço aos meus amigos: Laécio Aragão, pela amizade que se iniciou na infância e por todas as palavras de encorajamento quando faltava-me ânimo; Angélica Fortes, por ser uma pessoa iluminada e amiga de todas as horas; Nara Silva por sempre me proporcionar sua companhia em momentos onde podia recuperar as energias para as batalhas diárias; Deise Machado pelas valiosas reflexões nos momentos de dificuldade; Israel Evangelista pelos conselhos sempre amigos e por me fazer sempre olhar mais além do que conseguia; André Luís, pelo otimismo e amizade durante a última etapa do trabalho; Luvanor Casto, pelo enorme carinho e por sempre acreditar em meus esforços.

Agradeço aos amigos do mestrado: Alberone, Lucas Vidal e Victor por serem meus parceiros nos momentos de dificuldade das disciplinas iniciais. Ao querido Rafael Emanuel por ser sempre prestativo e por sempre ajudar com suas conversas amigas. Ao amigo Antônio de Pádua, que conhece minha trajetória desde a graduação, por ter sido um grande companheiro quando estávamos começando a semear a idéia do mestrado. Ao Renan de Oliveira por todo o incentivo e por sempre ter me instigado ao desejo de aprender. Aos companheiros de estudo Jeferson Nascimento, Antônio Luis, Atécio Alves, Lucas Machado, Ray Victor, Jonathan Bezerra, Antônio Aguiar, Sandoel Vieira e Raul Kazan pelas companhias e por tornarem a rotina de estudos mais amena.

Agradeço ao meu orientador Alexandro Marinho Oliveira, que acreditou no meu desempenho e me acompanha deste a graduação com o trabalho de iniciação científica, por ter me mostrado os caminhos a seguir e pelo apoio.

Agradeço ao meu coorientador Marcondes Rodrigues Clark por todos os seus conselhos e por toda a confiança depositada, pelos conhecimentos, não apenas acadêmicos mas também de vida, que me passou.

Agradeço ao Professor Dr. José Francisco Oliveira por ter aceito fazer parte da banca e por todas as contribuições valiosas para a conclusão deste trabalho.

Agradeço a Capes pelo auxílio financeiro em forma de bolsa de estudos, que possibilitou dedicar-me exclusivamente aos estudos.

"*O homem faz seus projetos, mas a resposta vem de Deus*".

Provérbios 16:1.

Resumo

Neste trabalho usamos o Método de Unicidade Hilbertiana (HUM) para provar a controlabilidade exata para uma equação de onda com coeficientes variáveis em um domínio cilíndrico associado a um controle não nulo na fronteira lateral e condições iniciais em um espaço de Sobolev apropriado. Fazemos uso da solução fraca do problema de valor de fronteira homogêneo e da solução definida por transposição do problema não homogêneo associado, para assegurar a boa definição de um operador apropriado nas condições do Teorema de Lax Milgran que garantirá o controle exato do problema.
Palavras-chave: equação da onda, controlabilidade exata, método HUM.

Abstract

In this work we used the Hilbert Uniqueness Method (HUM) to prove the exact controllability for a wave equation with variables coefficients in a cylindrical domain associated to a non null controll on the lateral boundary and initial data in a suitable Sobolev space. We use the weak solution of the homogeneous boundary value problem and solution defined by transposition of the backward nonhomogeneous problem, to ensure the well definition of a suitable operator that satisfies the Lax-Milgran's theorem, which ensures the exact controllability of the problem.

Keywords: wave equation, exact contollability, method HUM.

Sumário

Introdução

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com fronteira limitada no cilindro finito $Q = \Omega \times (0, T)$, com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Estamos interessados em fazer o estudo de controlabilidade exata através do método HUM do seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u'}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} d_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \text{ em } Q \\ u = v \text{ em } \Sigma = \Gamma \times (0,T), \\ u(0) = u^0 \ , \ u'(0) = u^1 \quad \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

onde u' representa a derivada com respeito ao tempo e $u(0)$, $u'(0)$ denotam as funções $x \mapsto u(x,0)$ e $x \mapsto u'(x,0)$, respectivamente. A variável controle é representada por v, que é a ação do sistema (1) sobre o bordo lateral Σ. Trata-se de um problema misto para a equação de uma onda com coeficientes não constantes.

Desejamos mostrar a controlabilidade exata para o problema (1), isto é, que dado $T > 0$, suficientemente grande, é possível para todo par de condições iniciais $\{u^0, u^1\}$ situado em um espaço apropriado sobre Ω, escolher um controle correspondente v tal que a solução de (1) satisfaça

$$u(T) = u'(T) = 0.$$

Para tanto, faremos algumas considerações sobre os objetos que serão usados ao decorrer da dissertação. Sejam $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $m(x) = x - x^0$ e $\nu(x)$ o vetor normal unitário de $x \in \Gamma$, direcionado ao exterior de Ω. Considere o conjunto

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma \ ; \ m(x) \cdot \nu(x) \geqslant 0\} \quad , \quad \Gamma_*(x^0) = \Gamma \backslash \Gamma(x^0) \quad , \quad \Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0,T)$$

Denote $R(x^0) = \sup\limits_{x \in \Omega} |m(x)|$, $M = \sup\limits_{x \in \Omega} |x|$ e λ_1 como sendo a constante tal que $\|u\|^2 = \lambda_1 |u|^2$. Seja $k : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função contínua e limitada. Neste caso, vamos considerar todas as funções escalares envolvidas funções de valores reais e supor as seguintes hipóteses sobre Ω e k:

$$\left|\begin{array}{l} \Omega \ \text{ contém a origem de } \ \mathbb{R}^n \\ \text{O bordo } \ \Gamma \ \text{ de } \ \Omega \ \text{ é } \ C^2 \\ k \ \in \ W^{3,\infty}_{loc}((0,\infty)) \\ 0 \ < \ k_0 \ = \ \inf_{t\geqslant 0} k(t) \quad , \quad \sup_{t\geqslant 0} k(t) \ = k_1 \ < \ \infty \\ \sup_{t\geqslant 0} |k'(t)| \ = \ \tau \ < \ \frac{1}{M} \\ l_1 \ = \ \int_0^\infty |k'(t)|dt < \infty \quad , \quad l_2 \ = \ \int_0^\infty |k''(t)| < \infty \end{array}\right. \tag{2}$$

Vejamos que o conjunto das funções k acima não é vazio, pois podemos tomar as funções sin e cos como exemplos de funções que satisfazem as condições acima.

Para garantir o controle exato do problema (1), fazemos uso de um operador Lu definido por:

$$Lu = u'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\delta_{ij} - k'^2 x_i x_j\right)k^{-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] - 2k'k^{-1}x_i\frac{\partial u'}{\partial x_i} + \left[(1-n)k'^2 - k''k\right]k^{-2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{3}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, dado por:

$$\delta_{ij} \ = \ \begin{cases} 1 & \text{se } \ i = j; \\ 0 & \text{se } \ i \neq j. \end{cases}$$

Faremos o estudo da ação do controle apenas para uma parte do bordo, mais precisamente vamos estudar o seguinte sistema:

$$\left|\begin{array}{lcl} Lu & = & 0 \ \text{ em } \ Q \\ u & = & \begin{cases} \nu \ \text{ em } \ \Sigma(x^0) \\ 0 \ \text{ em } \ \Sigma\backslash\Sigma(x^0) \end{cases} \\ u(0) & = & u^0 \ , \ u'(0) \ = \ u^1 \ \text{ em } \ \Omega \end{array}\right. \tag{4}$$

O método consiste em três etapas:

1. Tomar o problema de valor de fronteira homogêneo

$$\left|\begin{array}{lcll} L^*\varphi & = & 0 & \text{em } \ Q \\ \varphi & = & 0 & \text{em } \ \Sigma \\ \varphi(0) & = & \varphi^0 \ , \ \varphi'(0) \ = \ \varphi^1 & \text{em } \ \Omega \end{array}\right. \tag{5}$$

e encontrar sua solução fraca φ.

2. Construir a solução definida por transposição do problema não homogêneo associado

$$\left|\begin{array}{lcl} L\psi & = & 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \psi & = & \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} & \text{em} \quad \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{em} \quad \Sigma \backslash \Sigma(x^0) \end{cases} \\ \psi(T) & = & \psi'(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{6}$$

3. Definir o operador

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\psi'(0) - 2\frac{k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial \psi(0)}{\partial x_i}, -\psi(0)\}$$

   que se encontra nas hipóteses do teorema de Lax Milgran para enfim concluir que a solução por transposição ψ de (6) atende as condições de controlabilidade exata do problema dado.

No capítulo 1 será feito um breve apanhado dos resultados necessários para embasar as demostrações dos demais capítulos, distribuídos em cinco seções: Os espaços $L^p(\Omega)$, O espaço das Distribuições, Espaços de Sobolev, Outros Resultados e Desigualdades.

No capítulo 2 provamos os resultados referentes ao problema de valor de fronteira homogêneo, definindo sua solução fraca, mostrando sua regularidade sob condições iniciais suaves e obtendo algumas desigualdades a respeito da energia do sistema.

No capítulo 3 mostramos as desigualdades direta e inversa a respeito de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ afim de provar sua regularidade.

E por último, no capítulo 4 fazemos a demonstração do teorema que garante a controlabilidade exata do problema (4).

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, vamos listar alguns conceitos e resultados que serão usados nas demonstrações dos Teoremas ao longo da dissertação.

1.1 Os espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.1.1. *Dado* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 \leqslant p < \infty$*, definimos o espaço* $L^p(\Omega)$ *como o conjunto (das classes) de funções numéricas* u *definidas em* Ω*, mensuráveis, cuja potência* p*,* $|u|^p$*, é integrável à Lebesgue em* Ω*, equipado com a norma*

$$|u|_{L^p(\Omega)} = [\int_\Omega |u(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$$

Para $p = \infty$*, definimos* $L^\infty(\Omega)$ *como o espaço (das classes) de funções numéricas* u*, mensuráveis em* Ω *e que são essencialmente limitadas em* Ω*, equipado com a norma*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

Segue que os espaços L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ são espaços de Banach. (Ver [2]). Quando $1 < p < \infty$ esses espaços são reflexivos.
No caso em que $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v) = \Big(\int_\Omega u(x)v(x)dx \Big),$$

e norma associada

$$|u| = \Big(\int_\Omega u^2(x)dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Consideremos $T > 0$, X um espaço de Banach e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Definimos $L^p(0,T;X) = \{u : [0,T] \to X;\ u$ é mensurável e $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)\}$ com a norma

$$\|u\|^p_{L^p(0,T;X)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|^p_X dt\Big) \tag{1.1}$$

Se $p = \infty$, munimos $L^\infty(0,T;X)$ com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \mathit{ess}\|u(t)\|_X \tag{1.2}$$

O espaço $L^p(0,T;X)$ e $L^\infty(0,T;X)$ são espaços de Banach munido com a norma (1.1) e (1.2) respectivamente (Ver [10]). Um caso particularmente importante é quando $p = 2$ e X for um espaço de Hilbert. Nesse caso o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt,\ \forall u,v \in L^2(0,T;X).$$

Com isso, temos os seguintes resultados:

Lema 1.1.1. *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$, então*

$$L^s(0,T;X) \hookrightarrow L^r(0,T;Y)$$

Demonstração. Ver [10]. □

Aqui, $\hookrightarrow$, significa que $X \subset Y$ e a injeção $i : X \to Y$ é contínua.

Sejam X um espaço de Banach reflexivo e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $u \in L^q(0,T;X')$ e $v \in L^p(0,T;X)$ então, como aparece em [10] a dualidade entre esses espaços é dada por

$$\big\langle u,v\big\rangle_{L^p(0,T;X')\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \big\langle u(t),v(t)\big\rangle dt.$$

Teorema 1.1.1. *Consideremos X e Y espaços de Hilbert tais que $X \hookrightarrow Y$, $u \in L^p(0,T;X)$, $u' \in L^p(0,T;Y)$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então $u \in C^0([0,T];Y)$.*

Demonstração. Ver [15]. □

1.2 O espaço das Distribuições

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções localmente integráveis. Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas u com suporte compacto, possuindo em Ω derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

Dizemos que uma sequência de funções (φ_μ) de $C_0^\infty(\Omega)$ converge a zero se:

- O suporte de todas as funções φ_μ estão contidos em um compacto fixo K;
- Para cada multi-índice α, a sequência das derivadas parciais convergem uniformemente a zero em K.

Diz-se que $(\varphi_\mu) \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, quando a sequência $(\varphi_\mu - \varphi)$ converge para zero no sentido dado acima. O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a noção de convergência acima é representado por $D(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. $D(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$.

Demonstração. Ver [13]. □

Uma distruibuição T sobre Ω é uma forma linear sobre $D(\Omega)$, contínua no sentido de convergência acima (denominada convergência no sentido das distribuições), isto é, se $\varphi_n \to \varphi$ em $C_0^\infty(\Omega)$, temos que $T(\varphi_m) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$. O conjunto das distribuições sobre Ω é representado por $D'(\Omega)$. Dizemos que uma sequência T_μ converge para T em $D'(\Omega)$, quando para toda $\varphi \in D(\Omega)$ $< T_\mu - T, \varphi > \to 0$ em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.2.2. *(Du Bois Reymond) Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *onde* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado. Se*

$$\int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx = 0, \ \forall v \in D(\Omega),$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração. Ver [14]. □

Teorema 1.2.3. *Para* $1 \leqslant p < \infty$ *temos a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas*

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega).$$

Demonstração. Ver [13]. □

A derivada de ordem α de uma distribuição T é a forma linear $D^\alpha T$ em $D(\Omega)$ definida por:

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi > \qquad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Isto significa que se $T_\mu \to T$ em $D'(\Omega)$ então $D^\alpha T_\mu \to D^\alpha T$ em $D'(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.3 Espaços de Sobolev

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, p um número real tal que $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e m um número natural. Denota-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que as derivadas no sentido das distribuições $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo muti-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tal que $|\alpha| \leqslant m$, simbolicamente

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leqslant m\}.$$

As funções $\|\cdot\| : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

- $1 \leqslant p < \infty$

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \forall u \in W^{m,p}(\Omega),$$

- $p = \infty$

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega),$$

constituem uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.3.1. $W^{m,p}(\Omega)$ *munido da norma acima definida é um espaço de Banach para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e Banach reflexivo para* $1 < p < \infty$.

Demonstração. Ver [13]. □

Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$, são chamados de espaços de Sobolev de ordem m sobre Ω. Quando $p = 2$, ele é Hilbert e denotamos por:

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

com o produto interno:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)\,,$$

onde $(\,,\,)$ denota o produto interno de $L^2(\Omega)$.

Definimos, $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, temos $H_0^1(\Omega)$ no lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Suponha $1 \leqslant p < \infty$ e $1 < q \leqslant \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ e $H^{-m}(\Omega)$ os duais topológicos de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$, respectivamente. Seguem alguns resultados a respeito desses espaços.

Teorema 1.3.2. *Seja Ω uma aberto limitado de $\mathbb{R}^n$,*

- $D(\Omega)$ *é denso em* $H^{-m}(\Omega)$*;*
- $D(\Omega)$ *é denso em* $D'(\Omega)$.

Demonstração. Ver [13]. $\square$

Pela Desigualdade de Poincaré (ver [13]), podemos definir em $H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente a norma de $H_0^1(\Omega)$ que a denotaremos por $\|.\|$ dada por:

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

oriunda do produto interno

$$((u, v)) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Pelo mesmo argumento, se tomarmos o espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, definimos a seguinte norma equivalente:

$$|u|_\Delta = \Big(\int_\Omega |\Delta u(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

onde $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ é o operador Laplaciano.

Vejamos agora os resultados de imersões e densidades.

Teorema 1.3.3. *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, de classe C^m. Então, $D(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ sendo $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração. Ver [13]. □

Teorema 1.3.4. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ de classe C^m*
(i)Se $n > 2m$ temos que $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in \left[1, \dfrac{2n}{n-2m}\right]$;
(ii) Se $n = 2m$, então $H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, onde $p \in [1, \infty)$;
(iii) Se $n = 1$ e $m \geqslant 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.
e as imersões são compactas.

Demonstração. Ver [13]. □

Considerando dois espaços de Hilbert V e H. Supondo $V \subset H$, uma inclusão contínua e densa, então temos a inclusão contínua e densa $H' \subset V'$ para os duais. Via Teorema de Riesz identificamos o dual de $L^2(\Omega)$ com ele mesmo. Desta maneira, temos a seguinte cadeia de inclusões para X um espaço de Hilbert:

$$D(0,T;X) \subset H_0^1(0,T;X) \subset L^2(0,T;X) \subset H^{-1}(0,T;X) \subset D'(0,T;X) \tag{1.3}$$

Teorema 1.3.5. *Seja Ω uma aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, de classe C^m. Então $W^{m,\infty}(\Omega)$ é isomorfo a $C^{m-1,1}(\Omega)$*

Demonstração. Ver [13]. □

Em outras palavras, o teorema acima, diz que as funções de $W^{1,\infty}(\Omega)$ são funções contínuas, com derivadas de ordem um também contínuas.

Teorema 1.3.6. *Se Ω é uma aberto limitado de classe $C^k(\Omega)$, então para $m > \frac{n}{2} + k$, $0 \leqslant k \leqslant m$ tem-se $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$.*

Demonstração. Ver [14]. □

Se o bordo Γ de Ω é C^1, então ao longo de Γ está definido um campo unitário de vetores normais

$$\nu = (\nu^1, \cdots, \nu^n)$$

e, em cada ponto $x \in \Gamma$, temos $\nu(x) = \nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ com $|\nu(x)| = 1$.

Vamos agora enunciar um importante teorema sobre os espaços $H^m(\Omega)$. Seja a aplicação linear para $m \geqslant 1$

$$\begin{array}{lll} D(\overline{\Omega}) & \to & \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u & \mapsto & \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u) \end{array} \tag{1.4}$$

onde $\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ com $j = 1, \dots, m-1$.

Teorema 1.3.7. *Seja Ω um aberto limitado de classe C^{m+1} de $\mathbb{R}^n$ e um $m \geqslant 1$ inteiro, a aplicação (1.4) prolonga-se por continuidade a uma única aplicação linear e contínua, ainda denotada por γ de $H^m(\Omega)$ sobre $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, cujo núcleo é o espaço $H_0^m(\Omega)$. Tem-se ainda que γ possui inversa a direita linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear e continua σ de $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ em $H^m(\Omega)$ tal que $\gamma(\sigma u) = u$ para toda $u \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Demonstração. Ver [13]. □

De acordo com essa notação, temos os seguintes Teoremas:

Teorema 1.3.8. *(Gauss-Green) Suponha que $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma u \nu_i dS \ \ (i = 1, \cdots, n).$$

Demonstração. Vide [9]. □

Teorema 1.3.9. *(Fórmula de Integração por Partes) Sejam $u,v \in C^1(\overline{\Omega})$. Então,*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u v \nu_i dS \ \ (i = 1, \cdots, n).$$

Demonstração. Vide [9]. □

Teorema 1.3.10. *(Fórmulas de Green) Sejam $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então,*

1. $\int_\Omega \Delta u dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$;

2. $\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega u \triangle v dS + \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS$.

Demonstração. Vide [9]. □

1.4 Outros Resultados

Teorema 1.4.1. *Sejam* X *um espaço de Banach separável e seja* (x_n) *uma sequência limitada em* X'*. Então* (x_n) *admite uma subsequência fracamente estrela convergente em* X'*, isto é, existe* (x_{n_j})*, tal que,* $< x_{n_j}, y > \to < x, y >$*;* $\forall y \in X$*. Denotamos* $x_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} x$*.*

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema 1.4.2. *(**Teorema de Hellinger-Toeplitz**) Seja* H *um espaço de Hilbert, e* $T : H \to H$ *um operador linear satisfazendo*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle, \quad u, v \in H.$$

Então T é contínuo e auto-adjunto.

Demonstração. Vide [7]. □

Teorema 1.4.3. *(Lax - Milgram) Seja* V *um espaço de Hilbert. Se* $a(u, v)$ *é uma forma bilinear, contínua, coerciva em* $V \times V$ *e* f *é uma forma linear contínua sobre V, então dado* $f \in V'$*,* V' *dual de* V*, existe um único elemento* $u \in V$ *tal que*

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema 1.4.4. *(Representação de Riesz) Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$*. Então existe uma única função* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\left\langle \varphi, f \right\rangle = \int_\Omega uf dx, \quad \forall f \in L^1(\Omega).$$

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema 1.4.5. *Seja H um espaço de Hilbert separável e* T *um operador compacto auto adjunto. Então existe uma base de Hilbert composta de autovetores de* T*.*

Demonstração. Ver [4]. □

Através dos teoremas de Poincaré, (1.3.4), (1.4.3) e (1.4.5), [14] mostra que o operador laplaciano definido no espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ é um operador compacto. Portanto, que existe uma base ortonormal (w_j) densa em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, onde w_j são autovetores associados aos autovalores λ_j tais que $((w_j, v)) = \lambda_j(w_j, v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Seja D um conjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as **condições de Carathéodory** em D se:

a) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo;

b)$f(t, x)$ é contínua em x para cada t fixo;

c) para cada compacto U em D existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leqslant m_U(t), \forall (t, x) \in U.$$

Considere o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leqslant a, |x - a| \leqslant b\}$ com $a, b > 0$.

Teorema 1.4.6. *(Carathéodory) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R, e considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Então existe uma solução $x(t)$ de (1.5) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leqslant \beta$, $(\beta > 0)$.

Demonstração. Vide [16]. □

Corolário 1.4.1. *Sejam D aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D, então o problema (1.5) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.*

Corolário 1.4.2. *Seja $[0, w] \times B$, com $0 < w < \infty$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leqslant b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja Φ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(0) = x_0, \ \ |x_0| \leqslant b. \end{cases} \tag{1.6}$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde Φ está definida se tenha $|\Phi(t)| \leqslant M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então Φ tem um prolongamento até $[0, w]$.

Conforme aparece em [6], toda equação diferencial ordinária de ordem m pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, o qual pode ser representado na forma matricial , então o Corolário 1.4.2 é válido para EDO's de segunda ordem fixadas as condições iniciais.

1.5 Desigualdades

Lema 1.5.1. *(Desigualdade de Young) Sejam* $p > 1, q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então*

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \ \forall\, a \geqslant 0, \forall\, b \geqslant 0$$

Demonstração. Ver [4]. □

Lema 1.5.2. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |fg| \leqslant |f|_{L^p(\Omega)} |g|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [4]. □

Teorema 1.5.1. *(Desigualdade de Gronwall Generalizada) Sejam* $f, \nu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *funções não negativas e integráveis,* ν_0 *constante não negativa, e* $g : [0,T] \to \mathbb{R}$, *uma função contínua, não negativa, tais que*

$$\nu(t) \leqslant \nu_0 + \int_0^t f(x)dx + \int_0^t \nu(x)g(x)dx \ , \ \ \forall t \in [0,T]$$

então,

$$\nu(t) \leqslant \left(\nu_0 + \int_0^t f(x)dx\right) e^{\int_0^t g(x)dx} \ , \ \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Vide [5]. □

Teorema 1.5.2. *(Desigualdade Tipo Gronwall) Sejam* ν_0 *uma constante não negativa,* g *uma função integrável, quase sempre não negativa em* $]0,T[$ *e* $\nu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tais que*

$$\frac{1}{2}\nu^2(t) \leqslant \frac{1}{2}\nu_0^2 + \int_0^t g(s)\nu(s)ds \quad , \quad \forall t \in [0,T]$$

Então,

$$|\nu(t)| \leqslant \nu_0 + \int_0^t g(s)ds \quad , \quad \forall t \in [0,T]$$

Demonstração. Vide [5]. □

Corolário 1.5.1. *Sejam* ν_0 *uma constante não negativa,* $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ *função não negativa e integrável e* $\nu, g : [0,T] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas não negativas tais que*

$$\nu(t) \leqslant \nu_0 + \int_0^t f(s)[2\nu(s)]^{\frac{1}{2}}ds + \int_0^t g(s)\nu(s)ds \quad , \quad \forall t \in [0,T].$$

Então,

$$\nu(t) \leqslant [2\nu_0 + \Big(\int_0^T f(s)ds\Big)^2] \exp(2\int_0^t g(s)ds) \quad \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Aplicando o teorema (1.5.1), temos:

$$\nu(t) \leqslant [\nu_0 + \int_0^t f(s)[2\nu(s)]^{\frac{1}{2}} ds] \exp(\int_0^t g(s)ds).$$

Daí,

$$\frac{1}{2}[(2\nu(t))^{\frac{1}{2}}]^2 \leqslant \frac{1}{2}[(2\nu_0 \exp(\int_0^t g(s)ds))^{\frac{1}{2}}]^2 + \int_0^t f(s)[2\nu(s)]^{\frac{1}{2}} ds] \exp(\int_0^t g(s)ds).$$

Pelo teorema (1.5.2), segue que:

$$(2\nu(t))^{\frac{1}{2}} \leqslant (2\nu_0 \exp(\int_0^t g(s)ds))^{\frac{1}{2}} + \int_0^t f(s)ds \exp(\int_0^t g(s)ds).$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade e usando o fato de que $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ para quaisquer $a, b \geqslant 0$:

$$2\nu(t) \leqslant 4\nu_0 \exp(\int_0^t g(s)ds) + 2\Big(\int_0^t f(s)ds\Big)^2 \exp(2\int_0^t g(s)ds).$$

Isto é,

$$\nu(t) \leqslant [2\nu_0 + \Big(\int_0^t f(s)ds\Big)^2] \exp(2\int_0^t g(s)ds).$$

$\square$

Capítulo 2

Análise do Problema de Valor de Fronteira Homogêneo

De agora em diante, adotaremos a notação de índices repetidos, isto é, onde houver termos com índices repetidos, fica subtendido que está sendo feito o somatório nesse índice. Seja o operador geral de segunda ordem em t:

$$Ru = u'' + A(t)u + b_i(x,t)\frac{\partial u'}{\partial x_i} + c(x,t)u' + d_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + f(x,t)u \tag{2.1}$$

onde $A(t)u = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ e os coeficientes a_{ij}, b_i, c, d_i e a função f satisfazem:

$$\left|\begin{array}{l} a_{ij} \text{ são simétricas e uniformemente coercivas sobre } Q; \\ a_{ij} \in C^1(\overline{Q}) \ \ , \ \ a''_{ij} \in L^\infty(Q); \\ b_i, c, d_i, f \in W^{1,\infty}(0,T,L^\infty(\Omega)) \ \ ; \ \ \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \in L^\infty(Q). \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Entendemos por a_{ij} ser uniformemente coerciva sobre Q, se existem $a_0, a_1 > 0$ tais que $a_0\xi_i\xi_j \leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant a_1\xi_i\xi_j$, $\forall\{x,t\} \in Q$ e $\forall\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Em particular, se existe uma constante $a_0 > 0$ tal que $| < A(t)u, u > | \geqslant a_0\|u\|^2$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, onde $< A(t)u, u >= \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx$.

Dado o problema de valor de fronteira homogêneo:

$$\left|\begin{array}{l} Ru = h \ \text{ em } \ Q \\ u = 0 \ \text{ em } \ \Sigma \\ u(0) = u^0 \ \ , \ \ u'(0) = u^1 \ \text{ em } \ \Omega \end{array}\right. \tag{2.3}$$

com condições iniciais $\{u^0, u^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, definimos como solução fraca de (2.3) a função $u : Q \to \mathbb{R}$ tal que $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e satisfaz:

$$\left| \begin{array}{l} -\int_0^T (u',\xi')dt + \int_0^T a(t,u,\xi)dt + \int_0^T < b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i}, \xi > dt + \int_0^T (Pu,\xi)dt = \int_0^T (h,\xi)dt \\ \forall \xi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad , \quad \xi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad , \quad \xi(0) = \xi(T) = 0 \\ u(0) = u^0 \quad , \quad u'(0) = u^1 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

onde

$$\left| \begin{array}{l} < A(t)u, \xi >= a(t,u,\xi) = \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} dx \\ Pu = cu' + d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + fu \end{array} \right. \tag{2.5}$$

O teorema a seguir trata da existência e unicidade da solução fraca de (2.3) sob condições iniciais fortes.

Teorema 2.0.3. *Se* $u^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ *e* $h, h' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ *então existe uma única solução fraca* u *para o problema (2.3) tal que*

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \quad , \quad u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad , \quad u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Demonstração. Sejam (w_j) e (λ_j) os autovetores e autovalores do problema espectral $((w_j,v)) = \lambda_j(w_j,v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Ainda como consequência do Teorema Espectral temos que (w_j) forma uma base ortonormal em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Vamos usar o método de Galerkin, descrito em [14], para mostrar a existência da solução. Considere o subespaço n-dimensional de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ denotado por $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ gerado pelos m-primeiros autovetores w_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Então o problema aproximado associado a (2.1) e (2.3) é encontrar $u_m(t) \in V_m$ tal que:

$$\left| \begin{array}{l} (Ru_m, v) = (h(t), v), \quad \forall v \in V_m \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u_m(0) = u_m^0 \to u^0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u_m'(0) = u_m^1 \to u^1 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Mas de $u_m \in V_m$ temos que $u_m = \sum_{i=1}^m g_i(t) w_i$, $u_m' = \sum_{i=1}^m g_i'(t) w_i$ e $u_m'' = \sum_{i=1}^m g_i''(t) w_i$, onde os g_i são determinados por (2.6). De $(Ru_m, v) = (h(t), v)$ para todo $v \in V_m$, temos:

$$\begin{aligned} (u_m'', v) \ &+ \ (A(t)u_m, v) + (b_i(x,t) \frac{\partial u_m'}{\partial x_i}, v) + (c(x,t)u_m', v) + (d_i(x,t) \frac{\partial u_m}{\partial x_i}, v) \\ &+ \ (f(x,t)u_m, v) = (h(t), v). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Em particular, fazendo $v = w_j$:

$$\begin{aligned}(u''_m, w_j) \;&+\; (A(t)u_m, w_j) + (b_i(x,t)\tfrac{\partial u'_m}{\partial x_i}, w_j) + (c(x,t)u'_m, w_j) + (d_i(x,t)\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, w_j) \\ &+\; (f(x,t)u_m, w_j) = (h, w_j)\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}g''_i(t) \;&+\; \Big(-\tfrac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)\Big)g'_i(t) + \Big(A(t) - \tfrac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i} + f(x,t)\Big)g_i(t) \\ &=\; (h, w_j) \quad 1 \leqslant i \leqslant m\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $u_m \in H^1_0 \cap H^2(\Omega)$ e a fórmula de Green. Além disso, como u^0_m , $u^1_m \in V_m$, obtemos:

De $u^0_m = \sum_{i=1}^m \alpha(t)w_i$, que $\alpha(t) = (u^0, w_j)$;

De $u^1_m = \sum_{i=1}^m \beta(t)w_i$, que $\beta(t) = (u^1, w_j)$.

Logo as condições iniciais de (2.6) fornecem após passagem ao limite que

$$g_i(0) = (u^0, w_i) \quad \text{e} \quad g'_i(0) = (u^1, w_i).$$

Portanto, o problema aproximado (2.6) trata-se de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Note que as hipóteses (2.2) e o Teorema 1.3.5 garantem que os coeficientes $(-\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)\big)$ e $\big(A(t) - \frac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i} + f(x,t)\big)$ são contínuos. O Teorema 1.1.1 garante que (h, w_j) também é contínuo. Além disso, são coeficientes integráveis em t para cada x fixo e para cada t são funções limitadas. Portanto estes coeficientes satisfazem as condições de Carathéodory. Então pelo Corolário 1.4.2, o problema associado (2.6) possui uma única solução u definida em $[0, T]$.

Vamos a seguir, obter estimativas a priori, as quais permitirão, dentre outras coisas, provar que a solução aproximada do problema (2.6) é de fato solução de (2.3).

- **Primeira estimativa:** $|u'_m(t)|^2 + a_0\|u_m(t)\|^2 \leqslant C_1$

Fazendo $v = 2u'_m$ em (2.7):

$$\begin{aligned}(u''_m, 2u'_m) \quad &+ \quad (A(t)u_m, 2u'_m) + (b_i(x,t)\tfrac{\partial u'_m}{\partial x_i}, 2u'_m) + (c(x,t)u'_m, 2u'_m) \\ &+ \quad (d_i(x,t)\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, 2u'_m) + (f(x,t)u_m, 2u'_m) = (h, 2u'_m)\end{aligned} \tag{2.8}$$

Vamos estimar cada termo de (2.8).

Pela definição da norma em $L^2(\Omega)$:

$$\frac{d}{dt}|u'_m|^2 = \frac{d}{dt}(u'_m, u'_m) = 2(u''_m, u'_m). \tag{2.9}$$

Da coercividade de a_{ij}, segue que:

$$\begin{aligned}a_0\tfrac{d}{dt}\|u_m\|^2 \quad &\leqslant \quad a_0\tfrac{d}{dt}(\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}) = 2a_0(\tfrac{\partial u'_m}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}) \leqslant \\ &\leqslant \quad 2(a_{ij}\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u'_m}{\partial x_i}) = (A(t)u_m, 2u'_m).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Usando a fórmula de Green e que $u_m \in H_0^1(\Omega)$, temos:

$$-(b_i\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, 2u'_m) = -2(b_i u'_m, \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}) = (\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u'_m, 2u'_m) + (b_i\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, 2u'_m).$$

Assim, da desigualdade de Hölder obtemos:

$$-(b_i\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, 2u'_m) = (\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u'_m, u'_m) \leqslant |\frac{\partial b_i}{\partial x_i}||u'_m||u'_m| \leqslant B|u'_m|^2, \tag{2.11}$$

onde $B = ess \sup_{(x,t)\in Q} |\frac{\partial b_i}{\partial x_i}(x,t)|$.

Aplicando a desigualdade de Hölder segue que

$$-(c(x,t)u'_m, 2u'_m) \leqslant |-(c(x,t)u'_m, 2u'_m)| \leqslant 2|c(x,t)||u'_m||u'_m| \leqslant 2C|u'_m|^2, \tag{2.12}$$

onde $C = ess \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |c(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}$.

Novamente pela desigualdade de Hölder e considerando a norma do gradiente em $H_0^1(\Omega)$, temos:

$$-(d_i\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, 2u'_m) \leqslant 2|d_i||\frac{\partial u_m}{\partial x_i}||u'_m| \leqslant 2D\|u_m\||u'_m|,$$

onde, $D = ess \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |d_i(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}$.

Usando a desigualdade de Young, obtemos:

$$-(d_i(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, 2u'_m) \leqslant a_0^{-\frac{1}{2}} D 2 a_0^{\frac{1}{2}} \|u_m\| |u'_m| \leqslant a_0^{-\frac{1}{2}} D(a_0\|u_m\|^2 + |u'_m|^2), \tag{2.13}$$

Aplicando primeiramente a desigualdade de Hölder e posteriormente a desigualdade de Young:

$$\begin{aligned} -(f(x,t)u_m, 2u'_m) &\leqslant |-(f(x,t)u_m, 2u'_m)| \leqslant 2a_0^{-\frac{1}{2}} |f(x,t)| a_0^{\frac{1}{2}} \|u_m\| |u'_m| \\ &\leqslant a_0^{-\frac{1}{2}} F 2 a_0^{\frac{1}{2}} \|u_m\| |u'_m| \leqslant a_0^{-\frac{1}{2}} F(a_0\|u_m\|^2 + |u'_m|^2), \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $F = \mathit{ess} \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |f(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}$.
Da mesma maneira obtemos que

$$(h, 2u'_m) \leqslant 2|h|^{\frac{1}{2}} |h|^{\frac{1}{2}} |u'_m| \leqslant |h| + |h||u'_m|^2. \tag{2.15}$$

Com estas estimativas (2.9)-(2.15) e tomando $K = \max\{B, 2C, a_0^{-\frac{1}{2}} D, a_0^{-\frac{1}{2}} F\}$ de (2.8) obtemos:

$$\frac{d}{dt}|u'_m|^2 + a_0 \frac{d}{dt}\|u_m\|^2 \leqslant |h| + [K + |h|](a_0\|u_m\|^2 + |u'_m|^2).$$

Então integrando de 0 a t, $0 \leqslant t \leqslant T$, obtemos:

$$|u'_m(t)|^2 + a_0\|u_m(t)\|^2 \leqslant |u'_m(0)|^2 + a_0\|u_m(0)\|^2 + \int_0^T |h| dt + \int_0^T [K + |h|](a_0\|u_m\|^2 + |u'_m|^2) dt.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall generalizada , temos:

$$|u'_m(t)|^2 + a_0\|u_m(t)\|^2 \leqslant \big(|u_m^1|^2 + a_0\|u_m^0\|^2 + \int_0^T |h| dt\big) \exp\big(\int_0^t [K + |h(s)|] ds\big).$$

Como $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ segue que existe $C_1 > 0$ tal que

$$|u'_m(t)|^2 + a_0\|u_m(t)\|^2 \leqslant C_1 \tag{2.16}$$

- **Segunda estimativa:** $|\nabla u'_m(t)|^2 + a_0|\Delta u_m(t)|^2 \leqslant C_2$

Agora fazendo $v = -2\Delta u'_m$ em (2.7), obtemos:

$$\begin{aligned} (u''_m, -2\Delta u'_m) &+ (A(t)u_m, -2\Delta u'_m) + (b_i(x,t)\tfrac{\partial u'_m}{\partial x_i}, -2\Delta u'_m) + (c(x,t)u'_m, -2\Delta u'_m) \\ &+ (d_i(x,t)\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, -2\Delta u'_m) + (f(x,t)u_m, -2\Delta u'_m) = (h, -2\Delta u'_m). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Vamos estimar cada um dos termos de (2.17).

Usando a norma definida em $L^2(\Omega)$ e a fórmula de Green, temos:

$$\frac{d}{dt}|\nabla u'_m|^2 = \frac{d}{dt}(\nabla u'_m, \nabla u'_m) = 2(\nabla u''_m, \nabla u'_m) = -2(u''_m, \Delta u'_m). \tag{2.18}$$

Da coercividade de a_{ij} segue que

$$a_0 \frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2 = 2a_0(\Delta u'_m, \Delta u_m) \leqslant 2a_1(\Delta u_m, \Delta u'_m).$$

Considerando que $u_m \in H^1_0(\Omega)$ e usando novamente a propriedade da coercividade de a_{ij} e mais uma vez a fórmula de Green, obtemos:

$$\begin{aligned} 2a_1(\Delta u_m, \Delta u'_m) &= -2a_1(\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Delta u'_m) \leqslant -2(a_{ij}\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_i}\Delta u'_m) \\ &= -2(-\tfrac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}\big), \Delta u'_m) = (A(t)u_m, -2\Delta u'_m) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Note que pela definição do operador Laplaciano e pela fórmula de Green obtemos:

$$\begin{aligned} (b_i(x,t)\tfrac{\partial u'_m}{\partial x_i}, 2\Delta u'_m) &= (b_i(x,t)\tfrac{\partial u'_m}{\partial x_i}, 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u'_m) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}) - 2\sum_{i=1}^{n}(b_i(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u'_m, \frac{\partial u'_m}{\partial u'_m}) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}) - (b_i(x,t)\frac{\partial u'_m}{\partial u'_m}, 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u'_m) \\ &= -2\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}) - (b_i(x,t)\frac{\partial u'_m}{\partial u'_m}, 2\Delta u'_m). \end{aligned}$$

Resultando que:

$$(b_i(x,t)\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, 2\Delta u'_m) = -\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}).$$

Usando a desigualdade de Hölder na igualdade acima, obtemos:

$$(b_i(x,t)\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}, 2\Delta u'_m) \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}||\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}|^2 \leqslant B|\nabla u'_m|^2, \tag{2.20}$$

onde, $B = ess \sup_{(x,t)\in Q} |\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}(x,t)|$.

Aplicando a fórmula de Green, posteriormente a desigualdade de Hölder e observando que de $u_m \in V_m$, temos $u'_m \in H^1_0(\Omega)$, temos:

$$\begin{aligned}
(c(x,t)u'_m, 2\Delta u'_m) &= -2(\nabla c(x,t)u'_m, \nabla u'_m) - 2(c(x,t)\nabla u'_m, \nabla u'_m)\\
&\leqslant |-2(\nabla c(x,t)u'_m, \nabla u'_m)| + |-2(c(x,t)\nabla u'_m, \nabla u'_m)|\\
&\leqslant 2|\nabla c(x,t)||u'_m||\nabla u'_m| + 2|c(x,t)||\nabla u'_m||\nabla u'_m|.
\end{aligned}$$

Considerando que $c(x,t)$ e $\nabla c(x,t)$ são limitados devido as hipóteses (2.2), segue que:

$$(c(x,t)u'_m, 2\Delta u'_m) \leqslant 4C|\nabla u'_m|^2, \tag{2.21}$$

onde $C = \max\{ess \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |c(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}, ess \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |\nabla c(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}\}$.

Aplicando novamente a definição do operador Laplaciano e a fórmula de Green, obtemos:

$$\begin{aligned}
(d_i(x,t)\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, 2\Delta u'_m) &= 2(d_i(x,t)\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u'_m)\\
&= -2\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}) - 2\sum_{i=1}^{n}(d_i(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u_m, \frac{\partial u'_m}{\partial x_i}).
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder na igualdade acima, segue que:

$$\begin{aligned}
(d_i(x,t)\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, 2\Delta u'_m) &\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|\frac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i}||\frac{\partial u_m}{\partial x_i}||\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}| + 2\sum_{i=1}^{n}|d_i(x,t)||\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u_m||\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}|\\
&\leqslant 2|\tfrac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i}||\nabla u_m||\nabla u'_m| + 2|d_i(x,t)||\Delta u_m||\nabla u'_m|.
\end{aligned}$$

Considerando que as normas do Laplaciano e do Gradiente são equivalentes em $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e tomando λ_2 tal que $|\nabla u| \leqslant \lambda_2|\Delta u|$, temos:

$$(d_i(x,t)\frac{\partial u_m}{\partial x_i}, 2\Delta u'_m) \leqslant |\frac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i}|\lambda_2 a_0^{-\frac{1}{2}} 2a_0^{\frac{1}{2}}|\Delta u_m||\nabla u'_m| + a_0^{-\frac{1}{2}} 2a_0^{\frac{1}{2}}|d_i(x,t)||\Delta u_m||\nabla u'_m|.$$

Agora aplicando a desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned}
(d_i(x,t)\tfrac{\partial u_m}{\partial x_i}, 2\Delta u'_m) &\leqslant |\tfrac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i}|\lambda_2 a_0^{-\frac{1}{2}}[a_0|\Delta u_m|^2 + |\nabla u'_m|^2]\\
&\quad + |d_i(x,t)|a_0^{-\frac{1}{2}}[a_0|\Delta u_m|^2 + |\nabla u'_m|^2]\\
&\leqslant 2Da_0^{-\frac{1}{2}}[a_0|\Delta u_m|^2 + |\nabla u'_m|^2],
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde, $D = \max\{ess \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |d_i(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}, ess \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |\dfrac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i}|_{L^\infty(\Omega)}\}$.

Usando a fórmula de Green, temos:

$$\begin{aligned}(f(x,t)u_m, 2\Delta u_m') &= -2(\nabla f(x,t)u_m, \nabla u_m') - 2(f(x,t)\nabla u_m, \nabla u_m')\\ &\leqslant |-2(\nabla f(x,t)u_m, \nabla u_m')| + |-2(f(x,t)\nabla u_m, \nabla u_m')|.\end{aligned}$$

Considerando as hipóteses (2.2), temos que $f(x,t)$ e $\nabla f(x,t)$ são limitados. Portanto, usando a desigualdade de Hölder e que as normas do laplaciano e do gradiente são equivalentes em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, segue que:

$$\begin{aligned}(f(x,t)u_m, 2\Delta u_m') &\leqslant 2|\nabla f(x,t)|||u_m|||\nabla u_m'| + 2|f(x,t)||\nabla u_m||\nabla u_m'|\\ &\leqslant 4F|\nabla u_m||\nabla u_m'| \leqslant F\lambda_2 a_0^{-\frac{1}{2}} 4a_0^{\frac{1}{2}}|\Delta u_m||\nabla u_m'|,\end{aligned}$$

onde $F = \max\{ess \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |f(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}, ess \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |\nabla f(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}\}$ e $\lambda_2 > 0$ tal que $|\nabla u| \leqslant \lambda_2 |\Delta u|$.

Aplicando a desiguadade de Young, temos:

$$(f(x,t)u_m, 2\Delta u_m') \leqslant 2F\lambda_2 a_0^{-\frac{1}{2}}[a_0|\Delta u_m|^2 + |\nabla u_m'|^2]. \tag{2.23}$$

Integrando por partes com relação a t e usando as desigualdades de Hölder e Young, segue que:

$$\begin{aligned}-(h, 2\Delta u_m') &= 2(h', 2\Delta u_m) \leqslant 2|(h', \Delta u_m)| \leqslant 2a_0^{-\frac{1}{2}}|h'|^{\frac{1}{2}}|h'|^{\frac{1}{2}}a_0^{\frac{1}{2}}|\Delta u_m|\\ &\leqslant a_0^{-1}|h'| + |h'|a_0|\Delta u_m|^2.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Seja $K = \max\{B, 4C, 2D\lambda_2 a_0^{-\frac{1}{2}}, 2F\lambda_2 a_0^{-\frac{1}{2}}\}$, segue de (2.17) e das estimativas (2.18)-(2.24) que:

$$\frac{d}{dt}|\nabla u_m'|^2 + a_0\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2 \leqslant a_0^{-1}|h'| + [k + |h'|](|\nabla u_m'|^2 + a_0|\Delta u_m|^2).$$

Agora integrando esta desigualdadde de 0 a t, $0 \leqslant t \leqslant T$, obtemos:

$$\begin{aligned}|\nabla u_m'(t)|^2 + a_0|\Delta u_m(t)|^2 &\leqslant |\nabla u_m'(0)|^2 + a_0|\Delta u_m(0)|^2 + \textstyle\int_0^T a_0^{-1}|h'|dt\\ &\quad + \textstyle\int_0^T [k + |h'|](|\nabla u_m'|^2 + a_0|\Delta u_m|^2)dt.\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall, temos:

$$|\nabla u_m'(t)|^2 + a_0|\Delta u_m(t)|^2 \leqslant \big(|\nabla u_m^1|^2 + a_0|\Delta u_m^0|^2 + \int_0^T a_0^{-1}|h'|dt\big)\exp\big(\int_0^T [k + |h'(s)|]ds\big). \tag{2.25}$$

Como $h' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que:

$$|\nabla u_m'(t)|^2 + a_0|\Delta u_m(t)|^2 \leqslant C_2 \quad \forall 0 \leqslant t \leqslant T \quad \text{e} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Assim, por (2.16) e (2.26):

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u_m \ \text{ é limitado em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \\ u_m' \ \text{ é limitado em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.27}$$

Portanto, pelo Teorema 1.4.1, existe uma subsequência (u_ν) de (u_m) tal que:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ u_\nu' \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \text{ e } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \right. \tag{2.28}$$

Como $L^p(\Omega) \subset L^p_{Loc}(\Omega)$ então pelo Teorema 1.2.3 toda função de L^p pode ser vista como uma distribuição sobre Ω. Assim a primeira estimativa diz que $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, isto é $(u_\nu,\psi) \to (u,\psi)$, $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)$. Em particular, $\forall \psi \in D'(\Omega)$. Ou seja,

$$\int_\Omega (u_\nu - u)\psi dx \to 0 \quad , \quad \forall \psi \in D'(\Omega).$$

Concluímos daí que $u_\nu \to u$ em $D'(\Omega)$. Como o limite distribuicional é único e $\Delta u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta u$, segue que $\xi = \Delta u$.

Vejamos agora, que de fato, u é solução fraca de (2.3). Para isto devemos verificar que u satisfaz (2.4). Da segunda convergência de (2.28) e do fato da convergência se estender ao sentido das distribuições, temos:

$$(u_\nu',\psi) \to (u',\psi) \Rightarrow (u_\nu'',\psi) \to \frac{d}{dt}(u',\psi) \qquad \text{em } \ D'(\Omega).$$

Assim, passando ao limite no problema aproximado (2.6):

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(u',\psi) \quad &+ \quad (A(t)u,\psi) + (b_i(x,t)\tfrac{\partial u'}{\partial x_i},\psi) + (c(x,t)u',\psi) + (d_i(x,t)\tfrac{\partial u}{\partial x_i},\psi) \\ &+ \quad (f(x,t)u,\psi) = (h,\psi), \quad \forall \psi \in V_m. \end{aligned}$$

Pela densidade de $D(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (considerando que $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $D(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$), tomando $\theta \in D([0,T])$, temos $\psi\theta \in D(Q)$. Fazendo $\xi(x,t) = \psi(x)\theta(t)$ de onde $\xi' = \psi\theta'$, obtemos:

$$-\int_0^T (u', \psi\theta')dt + \int_0^T (A(t)u, \psi\theta)dt + \int_0^T < b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i}, \psi\theta > dt + \int_0^T (Pu, \psi\theta)dt = \int_0^T (h, \psi\theta)dt$$

Em particular é verdade para $\xi = \psi\theta$ satisfazendo as condições de (2.4). Portanto u é solução fraca de (2.3). Podemos notar também que:

$$\int_0^T (u'', \xi)dt = -\int_0^T (A(t)u, \xi)dt - \int_0^T < b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i}, \xi > dt - \int_0^T (Pu, \xi)dt + \int_0^T (h, \xi)dt \quad \forall \xi \in D'(\Omega)$$

Pelas condições (2.2), temos que $-A(t)u - b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i} - Pu + h \in C^0(\Omega)$, em particular $u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$

•Unicidade

Se u e v são soluções fracas de (2.3), então $\psi = u - v$ é solução de:

$$\left| \begin{array}{lll} R\psi = 0 & \text{em} & Q \\ \psi = 0 & \text{em} & \Sigma \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 & \text{em} & \Omega \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Passando o limite em (2.25) temos que a solução ψ de (2.29) satisfaz:

$$|\psi'(t)|^2 + a_0\|\psi(t)\|^2 \leqslant \left(|\nabla\psi^1|^2 + a_0|\Delta\psi^0|^2 + \int_0^T a_0^{-1}|h'|dt\right) \exp\left(\int_0^T [k + |h'(s)|]ds\right)$$

para todo $0 \leqslant t \leqslant T$. Mas como $\psi^0 = \psi^1 = h' = 0$, então seque que

$$|\psi'(t)|^2 + a_0\|\psi(t)\|^2 \leqslant 0 \quad \forall t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Logo $\psi' \equiv 0$. Portanto ψ é constante. Concluímos assim, que $u = v$.

□

Agora vamos demonstrar um resultado envolvendo condições iniciais mais fracas. Antes vamos introduzir a seguinte notação:

$$a^{(n)}(t, u, v) = \left(a_{ij}^{(n)}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}a'(t,u,u') = \frac{d}{dt}\big(a'_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\big) = \big(a''_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\big) + \big(a'_{ij}, \frac{\partial u'}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\big) + \big(a'_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u''}{\partial x_i}\big).$$

Logo,

$$a'(t,u,u'') = \frac{d}{dt}a'(t,u,u') - a''(t,u,u') - a'(t,u',u'). \tag{2.30}$$

Teorema 2.0.4. *Se*

$$u^0 \in H_0^1(\Omega) \ \ , \ \ u^1 \in L^2(\Omega) \ \ , \ \ h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$$

então:

(i) Existe uma única solução fraca u *do problema (2.3) tal que*

$$u \in C(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$$

(ii) A aplicação linear

$$\begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1(0,T;L^2(\Omega)) & \mapsto & C(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C^1(0,T;L^2(\Omega)) \\ \{u^0,u^1,h\} & \mapsto & u \end{array}$$

com u*, obtido em* (i)*, é contínua.*

(iii) A solução u *encontrada em* (i) *satisfaz:*

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}|u'(t)|^2 + \tfrac{1}{2}a(t,u(t),u(t)) &= \tfrac{1}{2}|u^1|^2 + \tfrac{1}{2}a(0,u^0,u^0) + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t a'(s,u,u)ds + \\ &+ \textstyle\int_0^t (h,u')ds + \tfrac{1}{2}\int_0^t \big(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u',u'\big)ds - \int_0^t (Pu,u')ds \end{aligned}$$

onde Pu *é dado por (2.5).*

Demonstração. Da densidade de $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ em $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente, podemos tomar as sequências $(u_\mu^0) \subset H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $(u_\mu^1) \subset H_0^1(\Omega)$ e $(h_\mu) \subset W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ tais que

$$u_\mu^0 \to u^0 \ \text{em} \ H_0^1(\Omega) \ \ , \ \ u_\mu^1 \to u^1 \ \text{em} \ L^2(\Omega) \ \ , \ \ h_\mu \to h \ \text{em} \ L^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.31}$$

Denote por u_μ a solução obtida no Teorema 2.0.3 com condições iniciais $\{u_\mu^0, u_\mu^1, h_\mu\}$. Então pela regularidade de u_μ e pelo Teorema 1.1.1, $u_\mu \in C(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Note que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,u,u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(a_{ij},\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}) = \frac{1}{2}(a'_{ij},\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(a_{ij},\frac{\partial u'}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + \frac{1}{2}(a_{ij},\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}).$$

Então,

$$(a_{ij},\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u'}{\partial x_i}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,u,u) - \frac{1}{2}a'(t,u,u).$$

Além disso, pela fórmula de Green:

$$(b_i\frac{\partial u'}{\partial x_i},u') = (b_i u',\frac{\partial u'}{\partial x_i}) = -(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u',u') - (b_i\frac{\partial u'}{\partial x_i},u') \Rightarrow (b_i\frac{\partial u'}{\partial x_i},u') = -\frac{1}{2}(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u',u').$$

Desenvolvendo $(Ru_\mu,u'_\mu) = (h,u'_\mu)$ e usando as duas identidades acima encontramos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_\mu|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(t,u_\mu,u_\mu) = \frac{1}{2}a'(t,u_\mu,u_\mu) + \frac{1}{2}(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u'_\mu,u'_\mu) - (Pu_\mu,u'_m) + (h_\mu,u'_\mu).$$

Integrando de 0 a t, $0 \leqslant t \leqslant T$ e fazendo $E_\mu(t) = \frac{1}{2}|u'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,u_\mu(t),u_\mu(t)$, podemos reescrever:

$$E_\mu(t) = E_\mu(0) + \tfrac{1}{2}\int_0^t a'(s,u_\mu,u_\mu)ds + \int_0^t (h_\mu,u'_\mu)ds + \tfrac{1}{2}\int_0^t(\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}u'_\mu,u'_\mu)ds - \int_0^t(Pu_\mu,u'_m)ds \tag{2.32}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
E_\mu(t) &\leqslant E_\mu(0) + \tfrac{1}{2}\int_0^t |a'_{ij}||\tfrac{\partial u_\mu}{\partial x_i}||\tfrac{\partial u_\mu}{\partial x_i}|ds + \int_0^t |h_\mu||u'_\mu|ds + \tfrac{1}{2}\int_0^t |\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}||u'_\mu||u'_\mu|ds \\
&\quad + \int_0^t |c||u'_\mu||u'_\mu|ds + \int_0^t |\tfrac{\partial d_i}{\partial x_i}|||u_\mu|||u'_\mu| + \int_0^t |f|||u_\mu|||u'_\mu| \\
&\leqslant E_\mu(0) + Aa_0^{-1}\tfrac{1}{2}\int_0^t a_0\|u_\mu\|^2ds + \int_0^t |h_\mu||u'_\mu|ds + b\tfrac{1}{2}\int_0^t |u'_\mu|^2ds + 2C\tfrac{1}{2}\int_0^t |u'_\mu|^2ds \\
&\quad + da_0^{-\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}\int_0^t[a_0\|u_\mu\|^2 + |u'_\mu|^2]ds + \overline{F}a_0^{-\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}\int_0^t[a_0\|u_\mu\|^2 + |u'_\mu|^2]ds,
\end{aligned}$$

onde $A = \max_{(x,t)\in\overline{Q}}\{a_{ij}(x,t)\}$, $B = ess \sup_{(x,t)\in Q}|\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}(x,t)|$, $C = ess \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|c(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}$, $d = ess \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\frac{\partial d_i(x,t)}{\partial x_i}|_{L^\infty(\Omega)}\}$ e $\overline{F} = ess \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|f(x,t)|_{L^\infty(\Omega)}$. Tomando $K = \max\{Aa_0^{-1}, B, 2C, da_0^{-\frac{1}{2}}, \overline{F}a_0^{-\frac{1}{2}}\}$ e usando que para $a, b \geqslant 0$ temos $a \leqslant (a^2 + b)^{\frac{1}{2}}$ segue que:

$$\begin{aligned}
E_\mu(t) &\leqslant E_\mu(0) + \int_0^t |h_\mu||u'_\mu|ds + K\int_0^t \tfrac{1}{2}[a_0\|u_\mu\|^2 + |u'_\mu|^2]ds \\
&\leqslant E_\mu(0) + \int_0^t |h_\mu||u'_\mu|ds + K\int_0^t E_\mu(s)ds \\
&\leqslant E_\mu(0) + \int_0^t |h_\mu|[2E_\mu(s)]^{\frac{1}{2}}ds + K\int_0^t E_\mu(s)ds
\end{aligned}$$

Aplicando o Corolário 1.5.1:

$$E_\mu(t) \leqslant \big(2E_\mu(0) + (\int_0^T |h_\mu| ds)^2\big) \exp(CT), \tag{2.33}$$

onde C é uma constante que independe de μ e $t \in [0,T]$.

Escrevendo $u_\mu - u_\sigma$ no lugar de u_μ em (2.33) também obtemos:

$$\begin{aligned} |u'_\mu(t) - u'_\sigma(t)|^2 &+ a(t, u_\mu(t) - u_\sigma(t), u_\mu(t) - u_\sigma(t)) \leqslant 2[|u^1_\mu - u^1_\sigma|^2] \exp(CT) \\ &+ 2a(t, u^0_\mu - u^0_\sigma, u^0_\mu - u^0_\sigma) \exp(CT) + (\textstyle\int_0^T |h_\mu - h_\sigma| ds)^2) \exp(CT). \end{aligned}$$

Fazendo $\mu, \sigma \to \infty$ e usando as convergências (2.31) na desigualdade acima, temos que (u_μ) é uma sequência de Cauchy em $H^1_0(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$. Portanto, convergente. Logo:

$$\left| \begin{array}{lllll} u_\mu & \to & u & \text{em} & C(0,T;H^1_0(\Omega)); \\ u'_\mu & \to & u' & \text{em} & C(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right.$$

Passando o limite em (2.33), segue que:

$$E(t) \leqslant \big(2E(0) + (\int_0^T |h| ds)^2\big) \exp(CT)$$

provando assim o item (ii).

Passando o limite em (2.32), obtemos:

$$E(t) = E(0) + \tfrac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds + \int_0^t (h,u')ds + \tfrac{1}{2}\int_0^t (\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i} u', u')ds - \int_0^t (Pu, u')ds$$

o que mostra o item (iii).

Como u_μ satisfaz (2.4), passando ao limite obtemos que a própria u satisfaz (2.4), portanto u é solução fraca de (2.3). Para concluir (i) vamos mostrar a unicidade. Sejam u e v soluções fracas de (2.3) sob as hipóteses do Teorema. Então $w = u - v$ é solução de (2.29). Logo, temos por (2.33):

$$|w'(t)|^2 + a(t, w(t), w(t)) \leqslant 2[|w^1|^2 + a(0, w^0, w^0] \exp(CT) + (\int_0^T |h| ds)^2 \exp(CT),$$

$\forall t$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Como em (2.29) $w^0 = w^1 = h = 0$, segue então que $|w'(t)| \leqslant 0$, ou seja, $w'(t) = 0$, $\forall 0 \leqslant t \leqslant T$. Portanto w é constante. Mas $w(0) = 0$, logo $w \equiv 0$. Concluímos assim que $u = v$. □

Agora vamos considerar o problema:

$$\left|\begin{array}{lllll} Ru & = & h' & & \text{em} \quad Q \\ u & = & 0 & & \text{em} \quad \Sigma \\ u(0) & = & u'(0) & = \; 0 & \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{2.34}$$

Note que se $h' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, a solução fraca deste problema satisfaz a condição de regularidade (i) do Teorema 2.0.3.

Teorema 2.0.5. *Se* $h \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$*,* $h' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ *e* $h(0)=0$*, então a solução* u *do problema (2.34) satisfaz:*

$$\|u(t)\| + |u'(t) - h(t)| \leqslant C\int_0^T \|h\|dt \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.35}$$

onde C é uma constante independente de u *e* h*.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que por integração por partes e usando que $h(0) = 0$, obtemos:

$$\int_0^t (h', u')ds = \int_\Omega \int_0^t h'u'dsdx = \int_\Omega [hu' \mid_0^t - \int_0^t hu''ds]dx = (h(t), u'(t)) - \int_0^t (h, u'')ds.$$

Da definição de Ru, temos $u'' = h' - Au - b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i} - Pu$. Daí, segue que:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^t (h', u')ds &= (h(t), u'(t)) - \textstyle\int_0^t (h, h')ds + \int_0^t (h, Au)ds + \int_0^t (h, b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i})ds \\ &\quad + \textstyle\int_0^t (h, Pu)ds \\ &= (h(t), u'(t)) - \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t \frac{d}{ds}|h(t)|^2 ds + \int_0^t (h, Au)ds + \int_0^t (h, b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i})ds \\ &\quad + \textstyle\int_0^t (h, Pu)ds \\ &= (h(t), u'(t)) - \tfrac{1}{2}|h(t)|^2 + \textstyle\int_0^t (h, Au)ds + \int_0^t (h, b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i})ds + \int_0^t (h, Pu)ds. \end{aligned}$$

Além disso, utilizando a fórmula de Green:

$$\int_0^t (h, b_i \frac{\partial u'}{\partial x_i})ds = \int_0^t (hb_i, \frac{\partial u'}{\partial x_i})ds = -\int_0^t (\frac{\partial h}{\partial x_i} b_i, u')ds - \int_0^t (h\frac{\partial b_i}{\partial x_i}, u')ds.$$

Do Teorema 2.0.4 e das condições iniciais de (2.34):

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}|u'(t)|^2 + \tfrac{1}{2}a(t, u(t), u(t)) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t a'(s, u(s), u(s))ds + \int_0^t (h', u')ds + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t (\frac{\partial b_i}{\partial x_i} u', u')ds - \int_0^t (Pu, u')ds \end{aligned}$$

Das duas últimas igualdades, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}|u'(t)|^2 - (h(t),u'(t)) + \frac{1}{2}|h(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,u(t),u(t)) = \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u(s),u(s))ds \\ +\frac{1}{2}\int_0^t(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u',u')ds + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(\frac{\partial h}{\partial x_i},b_iu')ds - \int_0^t(h,\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u')ds + \int_0^t(h,Pu)ds \\ -\int_0^t(Pu,u')ds \end{array}\right.$$

Implicando que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u'(t)-h(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t,u(t),u(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u(s),u(s))ds + \frac{1}{2}\int_0^t(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u',u')ds \\ &\quad + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(\frac{\partial h}{\partial x_i},b_iu')ds \\ &\quad - \int_0^t(h,\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u')ds + \int_0^t(h,Pu)ds - \int_0^t(Pu,u')ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\theta = u' - h$ e substituindo u' por $\theta + h$ na igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{1}{2}a(t,u,u) &= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(Pu,u'-h)ds \\ &\quad - \int_0^t(h,\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u')ds - \int_0^t(\frac{\partial h}{\partial x_i},b_iu')ds + \frac{1}{2}\int_0^t(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u',u')ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(Pu,\theta)ds \\ &\quad - \int_0^t(h,\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u')ds + \int_0^t(h,\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u')ds + \int_0^t(h,b_i\frac{\partial u'}{\partial x_i})ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u',u')ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(Pu,\theta)ds \\ &\quad + \int_0^t(h,b_i\frac{\partial u'}{\partial x_i})ds - \int_0^t(u',b_i\frac{\partial u'}{\partial x_i})ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(Pu,\theta)ds \\ &\quad - \int_0^t(u'-h,b_i\frac{\partial[\theta+h]}{\partial x_i})ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(Pu,\theta)ds \\ &\quad - \int_0^t(\theta,b_i\frac{\partial[\theta+h]}{\partial x_i})ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(Pu,\theta)ds \\ &\quad - \int_0^t(\theta,b_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i})ds - \int_0^t(\theta,b_i\frac{\partial h}{\partial x_i})ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\theta|^2 + \frac{1}{2}a(t,u,u) &= \frac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds + \int_0^t(h,Au)ds - \int_0^t(Pu,\theta)ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\theta,\theta)ds - \int_0^t(\frac{\partial h}{\partial x_i},b_i\theta)ds. \end{aligned}$$

Estimando cada termo da igualdade acima, utilizando a fórmula de Green, a desigualdade de Hölder, as condições (2.2) e a definição de Pu dada em (2.5) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^t a'(s,u,u)ds &= \tfrac{1}{2}\int_0^t (a'_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_i},\tfrac{\partial u}{\partial x_i}) \leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^t |a'_{ij}||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}| \leqslant \tfrac{A}{2}\int_0^t \|u\|^2;\\
\int_0^t (h,Au)ds &= -\int_0^t (h,\tfrac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}))ds = \int_0^t (\tfrac{\partial h}{\partial x_i},a_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_i})ds \leqslant \int_0^t |\tfrac{\partial h}{\partial x_i}||a_{ij}||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}|ds\\
&\leqslant a_1\int_0^t \|h\|\|u\|ds;\\
\int_0^t (c[\theta+h],\theta)ds &\leqslant \int_0^t |c||\theta+h||\theta|ds \leqslant C\int_0^t |\theta|^2 + C\int_0^t \|h\||\theta|ds;\\
\int_0^t (d_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i},\theta)ds &\leqslant d\int_0^t \|u\||\theta|ds \leqslant \tfrac{d}{2}\int_0^t [\|u\|^2+|\theta|^2]ds;\\
\int_0^t (fu,\theta)ds &\leqslant \int_0^t |f|\|u\||\theta|ds \leqslant \tfrac{F}{2}\int_0^t [\|u\|^2+|\theta|^2]ds;\\
\tfrac{1}{2}\int_0^t (\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}\theta,\theta)ds &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^t |\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}||\theta||\theta|ds \leqslant \tfrac{B}{2}\int_0^t |\theta|^2 ds;\\
\int_0^t (\tfrac{\partial h}{\partial x_i},b_i\theta)ds &\leqslant \int_0^t |\tfrac{\partial h}{\partial x_i}||b_i||\theta|ds \leqslant b\int_0^t \|h\||\theta|ds.
\end{aligned}
$$

onde $A = \sup\limits_{(x,t)\in Q}|a'_{ij}|$, $b = ess\sup\limits_{(x,t)\in Q}|b_i|$, $B = ess\sup\limits_{(x,t)\in Q}|\dfrac{\partial b_i}{\partial x_i}|$, $C = ess\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|c|_{L^\infty(\Omega)}$, $d = ess\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|d_i|_{L^\infty(\Omega)}$, $F = ess\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|f|_{L^\infty(\Omega)}$, o que é possível pela hipótese (2.2). Tomando $C_1 = \max\{2a_1, 2C, 2b\}$ e $C_2 = \max\{A, d, F, B\}$, temos:

$$
|\theta|^2 + a(t,u,u) \leqslant C_1\int_0^t \|h\|[\|u\|+|\theta|]ds + C_2\int_0^t [\|u\|^2+|\theta|^2]ds
$$

Como $a_0\|u\|^2 \leqslant a(t,u,u)$ e $[\|u\|+|\theta|] \leqslant 2[\|u\|^2+|\theta|^2]^{\frac{1}{2}}$ segue em particular, que existem constantes $K_1, K_2 \geqslant 0$ tais que:

$$
|\theta|^2 + \|u\|^2 \leqslant K_1\int_0^t \|h\|[\|u\|^2+|\theta|^2]^{\frac{1}{2}}ds + K_2\int_0^t [\|u\|^2+|\theta|^2]ds
$$

Aplicando o Corolário 1.5.1:

$$
|\theta|^2 + \|u\|^2 \leqslant K_3\Big(\int_0^t \|h\|ds\Big)^2
$$

onde $K_3 = 2^{\frac{1}{2}}K_1\exp\big(K_2T\big)$, para algum $K_1 > 0$ independente de h e T. Usando novamente que $[\|u\|+|\theta|] \leqslant 2[\|u\|^2+|\theta|^2]^{\frac{1}{2}}$, temos:

$$
|\theta|^2 + \|u\|^2| \leqslant 2\Big[\theta|^2+\|u\|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leqslant C\Big(\int_0^t \|h\|ds,
$$

onde $C = (K_3)^{\frac{1}{2}}$. Com isto, concluímos a prova do Teorema. □

Considere as mudanças de variáveis abaixo:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{a}_{ij}(x,t) &= a_{ij}(x,T-t) \quad , \quad \widetilde{A}(t) = A(T-t)\\
\widetilde{b}_{ij}(x,t) &= -b_i(x,T-t) \quad , \quad \widetilde{c}(x,t) = -c(x,T-t)\\
\widetilde{d}_{ij}(x,t) &= d_i(x,T-t) \quad , \quad \widetilde{f}(x,t) = f(x,T-t) \quad , \quad \widetilde{h}(x,t) = h(x,T-t)
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(x,t) &= u(x, T-t) \\ \widetilde{R}u &= \widetilde{u}'' + \widetilde{A}u + \widetilde{b}_i \tfrac{\partial \widetilde{u}'}{\partial x_i} + \widetilde{c}\widetilde{u}' + \widetilde{d}_i \tfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} + \widetilde{f}\widetilde{u} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Claramente se a_{ij}, b_i, c, d_i e f satisfazem as condições (2.2) então $\widetilde{a}_{ij}$, $\widetilde{b}_{ij}$, $\widetilde{c}$, $\widetilde{d}_{ij}$ e $\widetilde{f}$ também as satisfazem. Portanto u é uma solução fraca do problema (2.3) se e somente se $\widetilde{u}$ é solução fraca do problema abaixo:

$$\left| \begin{array}{llll} \widetilde{R}u = \widetilde{h} & & \text{em} & Q \\ \widetilde{u} = 0 & & \text{em} & \Sigma \\ \widetilde{u}(T) = u^0 \ , & \widetilde{u}'(T) = -u^1 & \text{em} & \Omega \end{array} \right. \tag{2.38}$$

Portanto os teoremas (2.0.4) e (2.0.5) são válidos para a solução fraca $\widetilde{u}$ de (2.38).

Capítulo 3

Desigualdades Direta e Inversa

Na seção anterior mostramos a regularidade da solução fraca de (2.3). Agora mostraremos a regularidade escondida de $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ para a solução u (regularidade esta que não depende da regularidade de u) do problema:

$$\left| \begin{array}{lllll} L^*u & = & h & \text{em} & Q, \\ u & = & 0 & \text{sobre} & \Sigma, \\ u(0) & = & u^0 \quad , \quad u'(0) \; = \; u^1 & \text{em} & \Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

onde L^* é o operador adjundo do operador L dado por (3), na introdução. Veja que dados $u, z \in H_0^1(\Omega)$, multiplicando cada termo de (3) por z, integrando sobre Q, usando Green obtemos:

$$\begin{aligned} \bullet < u'', z > &= \int_Q u'' z dtdx = \int_\Omega \underbrace{(u', z)\,|_0^T}_{0} dx - \int_Q u'z' dtdx \\ &= -\int_\Omega \underbrace{(u, z')\,|_0^T}_{0} dx + \int_Q u z'' dtdx \quad = \; < u, z'' >; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet < -\tfrac{\partial}{\partial x_i}\big[\big(\delta_{ij} - k'^2 x_i x_j\big) k^{-2} \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\big], z > &= -\int_Q \tfrac{\partial}{\partial x_i}\big[\big(\delta_{ij} - k'^2 x_i x_j\big) k^{-2} \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\big] z dxdt \\ &= \int_Q \big(\delta_{ij} - k_{\prime 2} x_i x_j\big) k^{-2} \tfrac{\partial z}{\partial x_i} \tfrac{\partial u}{\partial x_j} dxdt \\ &= -\int_Q u \tfrac{\partial}{\partial x_i}\big[\big(\delta_{ij} - k'^2 x_i x_j\big) k^{-2} \tfrac{\partial z}{\partial x_j}\big] dxdt \\ &= < u, \tfrac{\partial}{\partial x_i}\big[\big(\delta_{ij} - k'^2 x_i x_j\big) k^{-2} \tfrac{\partial z}{\partial x_j}\big] >; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet < -2k'k^{-1}x_i\tfrac{\partial u'}{\partial x_i}, z > \;&=\; -\textstyle\int_Q 2k'k^{-1}x_i z\tfrac{\partial u'}{\partial x_i} = \int_Q \tfrac{\partial}{\partial x_i}(2k'k^{-1}x_i z)u'dxdt\\
&=\; \textstyle\int_Q 2nk'k^{-1}zu'dxdt + \int_Q 2k'k^{-1}x_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i}u'dxdt\\
&=\; \textstyle\int_Q u\big[2n(k'^2-k''k)k^{-2}z - 2nk'k^{-1}z'\big]dxdt\\
&\quad\; +\textstyle\int_Q u\big[2(k'^2-k''k)k^{-2}x_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i} - 2k'k^{-1}\tfrac{\partial z'}{\partial x_i}\big]x_i dxdt\\
&=\; -2 < u, nk'k^{-1}z' > +2 < u, n(k'^2-k''k)k^{-2}z >\\
&\quad\; +2 < u, (k'^2-k''k)k^{-2}x_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i} > -2 < u, k'k^{-1}x_i\tfrac{\partial z'}{\partial x_i} >;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet < \big[(1-n)k'^2-k''k\big]k^{-2}x_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, z > \;&=\; \textstyle\int_Q \big[(1-n)k'^2-k''k\big]k^{-2}x_i z\tfrac{\partial u}{\partial x_i}dxdt\\
&=\; -\textstyle\int_Q \big[(1-n)k'^2-k''k\big]k^{-2}nzudxdt\\
&\quad\; -\textstyle\int_Q \big[(1-n)k'^2-k''k\big]k^{-2}x_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i}udxdt\\
&=\; < u, \big[n(n-1)k'^2+nk''k\big]k^{-2}z >\\
&\quad\; + < u, \big[(n-1)k'^2+k''k\big]k^{-2}x_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i} > .
\end{aligned}$$

Desta maneira, como o operador adjunto L^* de L é definido pela relação $< Lu, z >=< u, L^*z >$, segue que

$$\begin{aligned}
L^*z \;=\;& z'' - \tfrac{\partial}{\partial x_i}\big[\big(\delta_{ij}-k'^2x_ix_j\big)k^{-2}\tfrac{\partial z}{\partial x_j}\big] - 2k'k^{-1}x_i\tfrac{\partial z'}{\partial x_i} - 2nk'k^{-1}z'\\
&+\big[(n+1)k'^2-k''k\big]k^{-2}x_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i} + \big[n(n+1)k'^2-nk''k\big]k^{-2}z
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Notemos que, se os coeficientes de L^* satisfazem as condições (2.2), então a solução fraca do problema (3.1) satisfaz os Teoremas do capítulo 2. Denotando por $a_{ij} = (\delta_{ij}-k'^2x_ix_j)k^{-2}$ e $b_i = -2k'k^{-1}x_i$, segue que:

$$\left|\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial x_i}(b_iu') + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial x_i}(b_iu)' + \tfrac{\partial}{\partial x_i}(nk'^2k^{-2}x_iu) = \tfrac{1}{2}u'\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}b_i\tfrac{\partial u'}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}u\tfrac{\partial b_i'}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}b_i'\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\\
&+\tfrac{1}{2}u'\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2}b_i\tfrac{\partial u'}{\partial x_i} + n^2k'^2k^{-2}u + nk'^2k^{-2}x_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\\
&= -2nk'k^{-1}u' - 2k'k^{-1}x_i\tfrac{\partial u'}{\partial x_i} - u\tfrac{\partial}{\partial x_i}(k''k^{-1}x_i) + u\tfrac{\partial}{\partial x_i}(k'^2k^{-2}x_i) - k''k^{-1}x_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\\
&+k'^2k^{-2}x_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i} + n^2k'^2k^{-2}u + nk'^2k^{-2}x_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\\
&= [n(n+1)k'^2-nk''k]k^{-2}u + [(n+1)k'^2-k''k]k^{-2}x_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i} - 2nk'k^{-1}u' - 2k'k^{-1}x_i\tfrac{\partial u'}{\partial x_i}
\end{aligned}\right.$$

Substituindo a última igualdade em (3.2), temos:

$$L^*u = u'' - \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_iu') + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_iu)' + \frac{\partial}{\partial x_i}(nk'^2k^{-2}x_iu).$$

Definimos a energia do sistema (3.1) por:

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(t, u(t), u(t)), \tag{3.3}$$

onde denotamos $E_0 = E(0)$. O próximo teorema dá uma estimativa para $E(t)$.

Teorema 3.0.6. *Seja* u *é solução fraca do problema (3.1), então:*

(i) Se $h \neq 0$

$$E(t) \leqslant \big[2E_0 + \big(\int_0^T |h| dt\big)^2\big] \exp(C_0), \quad \forall t \in [0, T].$$

(ii) Se $h = 0$

$$E_0 \exp(-C_0) \leqslant E(t) \leqslant E_0 \exp(C_0), \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

onde

$$\begin{aligned} C_0 &= 4\big(1 + \tau k_1 M^2 + \tau^2 M^2 + n a_0 k_1^2\big)(a_0 k_0^3)^{-1}(l_1 + l_2) \\ &\quad + 4(\lambda_1^{\frac{1}{2}} M + n)\big(n\tau + \tau + k_1\big)(a_0^{\frac{1}{2}} k_0^2 \lambda_1^{\frac{1}{2}})^{-1}(l_1 + l_2) \end{aligned}$$

Demonstração. A identidade (iii) do Teorema 2.0.4 diz:

$$E(t) = E_0 + \frac{1}{2}\int_0^t a'(t, u(t), u(t)) ds + \int_0^t (h, u') ds + \frac{1}{2}\int_0^t \big(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} u', u'\big) ds - \int_0^t (Pu, u') ds.$$

Assim, fazendo $c = -2nk'k^{-1}$, $d_i = [(n+1)k'^2 - k''k]k^{-2}x_i$ e $f = [n(n+1)k'^2 - nk''k]k^{-2}$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t \big([(\delta_{ij} - k'^2 x_i x_j)k^{-2}]', \tfrac{\partial u}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\big) ds + \int_0^t \big(h, u'\big) ds \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t \big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}[-2k'k^{-1}x_i]u', u'\big) ds - \int_0^t \big(-2nk'k^{-1}u', u'\big) ds \\ &\quad - \textstyle\int_0^t \big([(n+1)k'^2 - k''k]k^{-2}x_i \tfrac{\partial u}{\partial x_i}, u'\big) ds \\ &\quad - \textstyle\int_0^t \big([n(n+1)k'^2 - nk''k]k^{-2}u, u'\big) ds \\ &= E_0 - \textstyle\int_0^t \big([(k'k''k - k'^3)k^{-3}x_i x_j]\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\big) ds - \int_0^t \big([k'k^{-3}]\delta_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\big) ds \\ &\quad + \textstyle\int_0^t \big(h, u'\big) ds - \int_0^t \big(nk'k^{-1}u', u'\big) ds + \int_0^t \big(2nk'k^{-1}u', u'\big) ds \\ &\quad - \textstyle\int_0^t \big([(n+1)k'^2 - k''k]k^{-2}x_i \tfrac{\partial u}{\partial x_i}, u'\big) ds \\ &\quad - \textstyle\int_0^t \big([n(n+1)k'^2 - nk''k]k^{-2}u, u'\big) ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 - \textstyle\int_0^t \big([(k'k''k - k'^3)k^{-3}x_i x_j]\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\big) ds - \int_0^t \big([k'k^{-3}]\delta_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\big) ds \\ &\quad + \textstyle\int_0^t \big(h, u'\big) ds + \int_0^t \big(nk'k^{-1}u', u'\big) ds - \int_0^t \big([(n+1)k'^2 - k''k]k^{-2}x_i \tfrac{\partial u}{\partial x_i}, u'\big) ds \\ &\quad - \textstyle\int_0^t \big([n(n+1)k'^2 - nk''k]k^{-2}u, u'\big) ds. \end{aligned}$$

Agora, estimaremos os termos da igualdade acima, usando a desigualdade de Hölder, o fato que $\|u\|^2 \leqslant a_0^{-1}a(t,u,u)$, $\|u\|^2 = \lambda_1|u|^2$ para algum $\lambda_1 > 0$ e aplicando as notações de (2):

$$\begin{aligned}
E(t) \leqslant\ & E_0 + \int_0^t |(k'k''k - k'^3)k^{-3}\|x_i|^2\|u\|^2k^{-3}ds + \int_0^t |k'|\|u\|^2k^{-3}ds + \int_0^t |h||u'|ds \\
& + \int_0^t n|k'|k^2|u'|^2k^{-3}ds + \int_0^t |(n+1)k'^2 - k''k||x_i|k^{-2}|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||u'|ds \\
& + \int_0^t n|(n+1)k'^2 - k''k||u||u'|k^{-2}ds \\
\leqslant\ & E_0 + \int_0^t |k'k''k - k'^3|M^2\|u\|^2k^{-3}ds + \int_0^t |k'|\|u\|^2k^{-3}ds + \int_0^t |h||u'|ds \\
& + \int_0^t na_0k^2|k'|a_0^{-1}|u'|^2k^{-3}ds + \int_0^t |(n+1)k'^2 - k''k|M\|u\||u'|k^{-2}ds \\
& + \int_0^t n|(n+1)k'^2 - k''k||u||u'|k^{-2}ds \\
\leqslant\ & E_0 + \int_0^t [|k'| + |k'k''k - k'^3|M^2](a_0^{-1}k^{-3})a(t,u,u)ds + \int_0^t |h||u'|ds \\
& + \int_0^t na_0k^2|k'|(a_0^{-1}k^{-3})|u'|^2ds + \int_0^t |(n+1)k'^2 - k''k|\lambda_1^{\frac{1}{2}}M(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}k^{-2})\|u\||u'|ds \\
& + \int_0^t n|(n+1)k'^2 - k''k|(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}k^{-2})\|u\||u'|ds \\
\leqslant\ & E_0 + \int_0^t [|k'| + |k'k''k - k'^3|M^2 + na_0k^2|k'|](a_0k^3)^{-1}2E(s)ds + \int_0^t |h||u'|ds \\
& + \int_0^t (\lambda_1^{\frac{1}{2}}M + n)|(n+1)k'^2 - k''k|(\lambda_1^{\frac{1}{2}}k^2)^{-1}a_0^{-\frac{1}{2}}(a_0^{\frac{1}{2}}\|u\||u'|)ds \\
\leqslant\ & E_0 + \int_0^t 2[|k'| + |k'k''k - k'^3|M^2 + na_0k^2|k'|](a_0k^3)^{-1}E(s)ds + \int_0^t |h||u'|ds \\
& + \int_0^t (\lambda_1^{\frac{1}{2}}M + n)|(n+1)k'^2 - k''k|(a_0^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{1}{2}}k^2)^{-1}\tfrac{1}{2}(a_0\|u\|^2 + |u'|^2)ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
E(t) \leqslant\ & E_0 + \int_0^t 2[|k'| + |k'k''k - k'^3|M^2 + na_0k^2|k'|](a_0k^3)^{-1}E(s)ds + \int_0^t |h||u'|ds \\
& + 2\int_0^t (\lambda_1^{\frac{1}{2}}M + n)|(n+1)k'^2 - k''k|(a_0^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{1}{2}}k^2)^{-1}E(s)ds.
\end{aligned}$$

Logo, tomando

$$G(t) = 2[|k'| + |k'k''k - k'^3|M^2 + na_0k^2|k'|](a_0k^3)^{-1} + 2(\lambda_1^{\frac{1}{2}}M + n)|(n+1)k'^2 - k''k|(a_0^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{1}{2}}k^2)^{-1}$$

obtemos:

$$E(t) \leqslant E_0 \int_0^t |h||u'|ds + \int_0^t G(s)E(s)ds.$$

Então, usando que para $a, b \geqslant 0$ temos $a \leqslant (a^2 + b)^{\frac{1}{2}}$, obtemos:

$$E(t) \leqslant E_0 + \int_0^t |h|[|u'|^2 + a(t,u,u)]^{\frac{1}{2}}ds + \int_0^t G(s)E(s)ds.$$

Do Corolário 1.5.1 resulta

$$E(t) \leqslant [2E_0 + \Big(\int_0^T |h|dt\Big)^2]\exp(2\int_0^T G(s)ds).$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty 2G(t)dt &\leqslant 4\int_0^\infty |k'| + [|k'k''k - k'^3|M^2 + na_0k^2|k'|]|a_0k^3|^{-1}dt\\ &\quad +4(\lambda_1^{\frac{1}{2}}M+n)\int_0^\infty |(n+1)k'^2 - k''k||a_0^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{1}{2}}k^2|^{-1}dt\\ &\leqslant 4\big(\int_0^\infty |k'|dt + M^2\tau k_1\int_0^\infty |k''|dt\big)|a_0k_0^3|^{-1}\\ &\quad +4\big(M^2\tau^2\int_0^\infty |k'|dt + na_0k_1^2\int_0^\infty |k'|dt\big)|a_0k_0^3|^{-1}\\ &\quad +4(\lambda_1^{\frac{1}{2}}M+n)\big((n+1)\tau\int_0^\infty |k'|dt + k_1\int_0^\infty |k''|dt\big)|a_0^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{1}{2}}k_0^2|^{-1}\\ &\leqslant 4\big(1+\tau k_1M^2+\tau^2M^2+na_0k_1^2\big)(a_0k_0^3)^{-1}(l_1+l_2)\\ &\quad +4(\lambda_1^{\frac{1}{2}}M+n)\big(n\tau+\tau+k_1\big)(a_0^{\frac{1}{2}}k_0^2\lambda_1^{\frac{1}{2}})^{-1}(l_1+l_2) = C_0.\end{aligned}$$

Como $\int_0^T G(t)dt \leqslant \int_0^\infty G(t)dt$, uma vez que $G(t)$ é não negativa, concluímos que

$$E(t) \leqslant [2E_0 + \Big(\int_0^T |h|dt\Big)^2]\exp(C_0).$$

Para o caso em que $h=0$, diferenciamos a identidade (iii) do Teorema 2.0.4 e obtemos

$$E'(t) = \frac{1}{2}a'(t,u,u) + \frac{1}{2}(\frac{\partial b_i}{\partial_i}u', u') - (Pu, u').$$

Usando as mesmas estimativas do caso $h \neq 0$, obtemos:

$$|E'(t)| \leqslant G(t)E(t) \Rightarrow -G(t)E(t) \leqslant E'(t) \leqslant G(t)E(t).$$

Assim pelo Teorema 1.5.1 segue o resultado.

□

Lema 3.0.3. *Dado* $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ *o campo de vetores normal unitário exterior a* Γ. *Existe um único campo de vetores* $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in [C^1(\overline{\Omega})]^n$ *tal que* $h_i = \nu_i$ *para* $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.7, se $\nu_k \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ então existe $h_k \in H^m(\Omega)$ tal que $\gamma_0(h_k) = \nu_k$. Usando do Teorema 1.3.6 e o fato de que $\gamma_0(h_k) = h_k$ em Γ, basta tomar $h_k = \gamma_0(h_k)$. □

Lema 3.0.4. *Se* $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *então* $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial u}{\partial \nu}$ *em* Γ *e* $|\nabla u|^2 = \big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\big)^2$

Demonstração. Seja $\theta \in D(\Gamma)$. Como $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ (ver Teorema 1.3.6), pelo Teorema do Traço, podemos tomar $\xi \in C^2(\Omega)$ tal que $\gamma_0\xi = \theta$. Seja (h_k) o campo de vetores do Lema 3.0.3. Aplicando a fórmula de Gauss-Green para $\nu = \frac{\partial}{\partial x_i}(uh_k)\xi$ e a função identicamente igual a um, obtemos:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(uh_j\xi)dx = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j}(uh_j\xi)d\Gamma.$$

Como $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ temos $\int_\Gamma u\frac{\partial}{\partial x_i}(h_j\xi)d\Gamma = 0$, segue que:

$$\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j}(uh_j\xi)d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j}(h_j\xi)d\Gamma.$$

De $h_j = \nu_j$ e $\xi = \theta$ (da definição da função traço) em Γ, obtemos:

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(uh_j\xi)dx = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j}h_j\xi d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j\theta d\Gamma.$$

Usando novamente a fórmula de Green, segue que:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\theta\nu_j\nu_j d\Gamma &= \int_\Gamma u\tfrac{\partial}{\partial x_i}(h_j\xi)\nu_j d\Gamma + \int_\Gamma \tfrac{\partial u}{\partial x_i}h_j\xi\nu_j d\Gamma = \int_\Gamma \tfrac{\partial}{\partial x_i}(uh_j\xi)\nu_j d\Gamma \\ &= \int_\Omega \tfrac{\partial}{\partial x_i}\tfrac{\partial}{\partial x_j}(uh_j\xi)dx = \int_\Gamma \nu_i\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j\theta d\Gamma.\end{aligned}$$

Tomando o somatório em ambos os lados da igualdade de $j = 1, 2, \ldots, n$ e observando que $\sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, obtemos:

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i\frac{\partial u}{\partial \nu}\theta d\Gamma, \quad \forall\theta \in D(\Gamma).$$

Logo, pelo Lema de Du Boys Reymond, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \nu_i\frac{\partial u}{\partial \nu}$ q.s em Γ.

Notemos que:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 = \nu_i\frac{\partial u}{\partial \nu}\nu_i\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = |\nabla u|^2$$

□

Teorema 3.0.7. *Seja* $q = (q_l)$ *um campo vetorial sobre* $\overline{\Omega}$, $q \in [C^1\overline{\Omega}]^n$. *Então toda solução fraca* u *do problema (3.1) verifica:*

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_l\nu_l\left(\tfrac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt = \left(u' + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], q_l\tfrac{\partial u}{\partial x_l}\right)\Big|_0^T \\ + \ & \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}\left(u'^2 - a_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)dxdt + \int_Q \tfrac{k'^2}{k^2}x_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}q_l\left(n\tfrac{\partial u}{\partial x_l} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt \\ + \ & \int_Q a_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}\tfrac{\partial u}{\partial x_l}dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}\tfrac{\partial u}{\partial x_l}q_l u' dxdt \\ + \ & \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_l}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}q_l u' dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}u\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}u' dxdt \\ + \ & \tfrac{1}{2}\int_Q b_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}u' dxdt - \tfrac{1}{2}\int_Q b_i u'\tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}\tfrac{\partial u}{\partial x_l}dxdt \\ - \ & \tfrac{1}{2}\int_Q n^2\tfrac{k'^2}{k^2}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}u^2 dxdt - \int_Q hq_l\tfrac{\partial u}{\partial x_l}dxdt. \end{aligned}$$

Demonstração. Basta mostrar o resultado para a solução u sob as condições iniciais do Teorema 2.0.3, pois no caso em que as condições iniciais satisfazem o Teorema 2.0.4 basta tomar como na demonstração deste, aproximações por limite. Então sejam $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u' \in H_0^1(\Omega)$. Multiplicando ambos os lados da equação $L^*u = h$ por $q_l \frac{\partial u}{\partial x_l}$ e integrando sobre Q, obtemos:

•Primeiro termo:

Integrando por partes em t, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_Q u'' q_l \tfrac{\partial u}{\partial x_l} dxdt &= \int_\Omega \{[u' q_l \tfrac{\partial u}{\partial x_l}] \mid_0^T - \int_0^T (u'[q_l \tfrac{\partial u}{\partial x_l}]'\} dx = \big(u', q_l \tfrac{\partial u}{\partial x_l}\big) \mid_0^T \\ &+ \int_Q \tfrac{\partial u'}{\partial x_l} q_l u' dxdt + \int_Q u'^2 \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} dxdt = \big(u', q_l \tfrac{\partial u}{\partial x_l}\big) \mid_0^T \\ &+ \int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} u'^2 dxdt + \big(u', q_l \tfrac{\partial u}{\partial x_l}\big) \mid_0^T - \int_Q u'' q_l \tfrac{\partial u}{\partial x_l} dxdt.\end{aligned}$$

Então,

$$\int_Q u'' q_l \frac{\partial u}{\partial x_l} dxdt = \big(u', q_l \frac{\partial u}{\partial x_l}\big) \mid_0^T + \frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial q_l}{\partial x_l} u'^2 dxdt. \tag{3.4}$$

•Segundo termo:

Usando a fórmula de Green, obtemos:

$$\left|\begin{array}{l} -\big(\frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}], q_l \frac{\partial u}{\partial x_l}\big) = \big(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[q_l \frac{\partial u}{\partial x_l}]\big) - \int_\Gamma a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l \frac{\partial u}{\partial x_l} \nu_i d\Gamma \\ = \big(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial q_l}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_l}\big) + \big(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, q_l \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_l}\big) - \int_\Gamma a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l \frac{\partial u}{\partial x_l} \nu_i d\Gamma. \end{array}\right.$$

Aplicando o operador $\frac{\partial}{\partial x_l}$ em $a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l \frac{\partial u}{\partial x_i}$, notando que o operador a_{ij} é simétrico, integrando sobre Ω seque que:

$$\left|\begin{array}{l} \int_\Gamma a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_l d\Gamma = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l}[a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l \frac{\partial u}{\partial x_i}] dx \\ \big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l, \frac{\partial u}{\partial x_i}\big) + 2\big(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, q_l \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_l}\big) + \big(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_l}{\partial x_l}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\big). \end{array}\right.$$

Por outro lado, usando o Lema (3.0.4):

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_\Gamma a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_l d\Gamma - \int_\Gamma a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l \frac{\partial u}{\partial x_l} \nu_i d\Gamma = \frac{1}{2} \int_\Gamma a_{ij} \nu_j \frac{\partial u}{\partial \nu} q_l \nu_i \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu_l d\Gamma \\ - \int_\Gamma a_{ij} \nu_j \frac{\partial u}{\partial \nu} q_l \nu_l \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu_i d\Gamma = -\frac{1}{2} \int_\Gamma a_{ij} \nu_i \nu_j q_l \nu_l \big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\big)^2 d\Gamma. \end{array}\right.$$

Usando um cálculo direto sobre a_{ij}:

$$-\frac{1}{2}\big(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l, \frac{\partial u}{\partial x_i}\big) = -\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x_l} \delta_{ij} - k'^2 x_i x_j) k^{-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} q_l, \frac{\partial u}{\partial x_i}\big) = \frac{1}{2}\big(\frac{k'^2}{k^2} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, q_l \frac{\partial u}{\partial x_j}\big).$$

Usando as quatro identidades acima encontramos:

$$\left|\begin{array}{l} -\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}], q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) = \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) + \frac{1}{2}\int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}q_l\frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_l d\Gamma \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_j}q_l, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\nu_i d\Gamma. \end{array}\right.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}], q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) \; = \; & \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) + \left(\frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}, q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) - \frac{1}{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \\ & -\frac{1}{2}\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_l\nu_l\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

•Terceiro termo:

Usando a fórmula de Green e a hipótese de que $u' \in H_0^1(\Omega)$, chegamos que:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u'], q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) = -\frac{1}{2}\int_Q b_i u'\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt - \frac{1}{2}\int_Q b_i u' q_l\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_l}dxdt.$$

•Quarto termo:

Integrando por partes:

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u]' q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u]q_l\frac{\partial u'}{\partial x_l}dxdt.$$

Por outro lado, usando a fórmula de Green e a hipótese de que $u' \in H_0^1(\Omega)$, obtemos:

$$\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u]q_l, \frac{\partial u'}{\partial x_l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b_i}{\partial x_l x_i}u q_l, u'\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l, u'\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l, u'\right) \\ +\frac{1}{2}\left(b_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_l x_i}q_l, u'\right) + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}, u'\right) + \frac{1}{2}\left(b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}, u'\right). \end{array}\right.$$

Note que da definição de b_i, temos $\frac{\partial^2 b_i}{\partial x_l x_i} = 0$. Então, substituindo a última igualdade na penúltima, segue:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u]' q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u' dxdt \\ +\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l u' dxdt + \frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_l x_i}q_l u' dxdt + \frac{1}{2}\int_Q u\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u' dxdt \\ +\frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u' dxdt. \end{array}\right.$$

•Quinto termo:

Por cálculo direto e usando a fórmula de Green:

$$\left|\begin{array}{l} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[n\frac{k'^2}{k^2}x_i u]q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt = \int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt + \int_Q n\frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt \\ = -\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u dxdt - \int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2\frac{\partial q_l}{\partial x_l}dxdt + \int_Q n\frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt. \end{array}\right.$$

Por outro lado,

$$-\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u dxdt = -\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[n\frac{k'^2}{k^2}x_i u]q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt + \int_Q n\frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt.$$

Assim, substituindo a última identidade na penúltima segue

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[n\frac{k'^2}{k^2}x_i u]q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt = -\frac{1}{2}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2\frac{\partial q_l}{\partial x_l}dxdt + \int_Q n\frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt.$$

Usando as identidades encontradas nos cinco termos segue o resultado. □

3.1 Desigualdade Direta

Teorema 3.1.1. *Seja* u *solução fraca do problema (3.1), então* $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$ *e*

$$\int_0^T\int_\Gamma (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 d\Gamma dt \leqslant C(T+1)\big[E_0 + \big(\int_0^T |h|dt\big)^2\big] + C_0 E_0^{\frac{1}{2}}\int_0^T |h|dt$$

onde C *é uma constante que independe de* u *e* T.

Demonstração. Pelo Teorema 3.0.6,

$$|u'(t)|^2 + a(t,u(t),u(t)) \leqslant 4\exp(C_0)[E_0 + \big(\int_0^T |h|dt\big)^2], \quad \forall t \in [0,T].$$

Seja $K = 4\exp(C_0)$. Vamos estimar cada um dos termos da identidade do Teorema 3.0.7, lembrando que devido a coercividade de a_{ij}, temos $a_0\|u(t)\| \leqslant a(t,u(t),u(t))$. Portanto,

$$|u'(t)|^2 + a_0\|u(t)\| \leqslant K[E_0 + \big(\int_0^T |h|dt\big)^2], \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.5}$$

•$\big(u' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\big)\,|_0^T$

Aplicando o produto interno em T e 0, a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Young e por último a desigualdade (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}\big(u', q_l\tfrac{\partial u}{\partial x_l}\big)\,|_0^T &\leqslant |u'(T)||q_l||\tfrac{\partial u(T)}{\partial x_l}| + |u'(0)||q_l||\tfrac{\partial u(0)}{\partial x_l}| \leqslant a_0^{-\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}[|u'(T)|^2 + a_0\|u(T)\|^2] \\ &+a_0^{-\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}[|u'(0)|^2 + a_0\|u(0)\|^2] \leqslant a_0^{-\frac{1}{2}}K[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

Aplicando o produto interno em T e 0 e a desigualdade de Hölder, segue que:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], q_l\tfrac{\partial u}{\partial x_l}\big)\,|_0^T &\leqslant \tfrac{1}{2}|\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}|\|u(T)\||q_l||\tfrac{\partial u(T)}{\partial x_l}| + \tfrac{1}{2}|\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}|\|u(0)\||q_l||\tfrac{\partial u(0)}{\partial x_l}| \\ &+\tfrac{1}{2}|b_i|\|u(T)\||q_l||\tfrac{\partial u(T)}{\partial x_l}| + \tfrac{1}{2}|b_i|\|u(0)\||q_l||\tfrac{\partial u(0)}{\partial x_l}|.\end{aligned}$$

Agora, tomando $B = ess \sup_{(x,t)\in Q} |\frac{\partial b_i(x,t)}{\partial x_i}|$, $b = ess \sup_{(x,t)\in Q} |b_i(x,t)|$, somando os termos positivos $\frac{1}{2}Ba_0^{-1}|u'(T)|^2$ e $ba_0^{-1}|u'(0)|^2$ do lado direito da desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], q_l \tfrac{\partial u}{\partial x_l}\big)\,\Big|_0^T &\leqslant \tfrac{1}{2}Ba_0^{-1}[|u'(T)|^2 + a_0\|u(T)\|^2] + \tfrac{1}{2}Ba_0^{-1}[|u'(0)|^2 + a_0\|u(0)\|^2]\\ &\quad + \tfrac{1}{2}ba_0^{-1}[|u'(T)|^2 + a_0\|u(T)\|^2] + \tfrac{1}{2}ba_0^{-1}[|u'(0)|^2 + a_0\|u(0)\|^2]\\ &\leqslant Ba_0^{-1}K[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2] + ba_0^{-1}K[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

• $\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_l}{\partial x_l}\big(u'^2 - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)dxdt$

Usando a desigualdade de Hölder e somando o termo positivo $a_0\|u\|^2$ na integral do lado direito, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_l}{\partial x_l}u'^2 dxdt &\leqslant \int_0^T |\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}||u'|^2 dt \leqslant \int_0^T [|u'|^2 + a_0\|u\|^2]dt\\ &\leqslant \int_0^T K[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2]dt \leqslant KT[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a propriedade da coercividade de a_{ij}, obtemos:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_l}{\partial x_l}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T |\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}||a_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}|dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}a_1 a_0^{-1}\int_0^T a_0\|u\|^2 dt.\end{aligned}$$

Somando o termo positivo $|u'|^2$ na integral do lado direito e usando a desigualdade (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_l}{\partial x_l}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt &\leqslant \frac{1}{2}a_1 a_0^{-1}\int_0^T [|u'|^2 + a_0\|u\|^2]dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}a_1 a_0^{-1}\int_0^T K[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2]dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}a_1 a_0^{-1}KT[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

• $\int_Q \frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l\big(n\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial u}{\partial x_j}\big)dxdt$

Usando a desigualdade de Hölder e as notações dadas por (2.2) na Introdução, segue que:

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l\big(n\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\big)dxdt &\leqslant \int_0^T |\tfrac{k'^2}{k^2}||x_i||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||q_l|\big(n|\tfrac{\partial u}{\partial x_l}| + \tfrac{1}{2}|\tfrac{\partial u}{\partial x_j}|\big)dt\\ &\leqslant (n+1)\tau k_0^{-2}a_0^{-1}M\int_0^T |k'|a_0\|u\|^2 dt\end{aligned}$$

Somando o termo positivo $|k'||u'|^2$ na integral do lado direito e usando a desigualdade (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l\big(n\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\big)dxdt &\leqslant (n+1)\tau k_0^{-2}a_0^{-1}M\int_0^T |k'|[|u'|^2 + a_0\|u\|^2]dt\\ &\leqslant (n+1)\tau k_0^{-2}a_0^{-1}M\int_0^T |k'|K[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2]dt\\ &\leqslant (n+1)l_1\tau k_0^{-2}a_0^{-1}MK[E_0 + \big(\textstyle\int_0^T |h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

- $\int_Q a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt$

Aplicando a desigualdade de Hölder e usando a coercividade de a_{ij}, obtemos:

$$\int_Q a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt \leqslant \int_0^T |\frac{\partial q_l}{\partial x_i}||a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_l}|dt \leqslant a_1\int_0^T \|u\|^2dt.$$

Adicionando o termo positivo $|u'|^2$ na integral do lado direito e usando a desigualdade (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}\int_Q a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt &\leqslant a_1a_0^{-1}\int_0^T[|u'|^2+a_0\|u\|^2]dt \leqslant a_1a_0^{-1}\int_0^T K[E_0+\big(\int_0^T|h|dt\big)^2]dt\\ &\leqslant a_1a_0^{-1}KT[E_0+\big(\int_0^T|h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

- $\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u'dxdt$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, segue que:

$$\begin{aligned}\int_Q a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt &\leqslant \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u'dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}||\frac{\partial u}{\partial x_l}||q_l||u'|dt\\ &\leqslant \frac{1}{2}B\int_0^T|\frac{\partial u}{\partial x_l}||u'|dt\\ &\leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T[a_0\|u\|^2+|u'|^2]dt\\ &\leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T K[E_0+\big(\int_0^T|h|dt\big)^2]dt\\ &\leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}KT[E_0+\big(\int_0^T|h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

- $\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l u'dxdt$

Novamente usando as desigualdades de Hölder e de Young, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l u'dxdt &\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T|\frac{\partial b_i}{\partial x_l}||\frac{\partial u}{\partial x_i}||q_l||u'|dt \leqslant \frac{1}{2}B\int_0^T|\frac{\partial u}{\partial x_i}||u'|dt\\ &\leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T[a_0\|u\|^2+|u'|^2]dt\\ &\leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T K[E_0+\big(\int_0^T|h|dt\big)^2]dt\\ &\leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}KT[E_0+\big(\int_0^T|h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

- $\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}u\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u'dxdt$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}u\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u'dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}|\|u\||\frac{\partial q_l}{\partial x_l}||u'|dt \leqslant \frac{1}{2}B\int_0^T\|u\||u'|dt.$$

Agora aplicando a desigualdade de Young do lado direito, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}u\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u'dxdt &\leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T[a_0\|u\|^2+|u'|^2]dt \leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T K[E_0+\big(\int_0^T|h|dt\big)^2]dt\\ &\leqslant \frac{1}{4}Ba_0^{-\frac{1}{2}}KT[E_0+\big(\int_0^T|h|dt\big)^2].\end{aligned}$$

- $\frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u'dxdt$

Usando a desigualdade de Hölder e posteriormente a desigualdade de Young, segue

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_Q b_i \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}u' dxdt &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |b_i|\|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\|\|\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}\||u'|dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T [a_0\|u\|^2+|u'|^2]dt \leqslant \tfrac{1}{4}ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T K[E_0+\big(\int_0^T |h|dt\big)^2]dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}ba_0^{-\frac{1}{2}}KT[E_0+\big(\int_0^T |h|dt\big)^2].
\end{aligned}$$

• $-\frac{1}{2}\int_Q b_i u'\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt$

Análogo ao que foi feito anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\int_Q b_i u'\tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}\tfrac{\partial u}{\partial x_l}dxdt &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |\tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}||u'||b_i||\tfrac{\partial u}{\partial x_l}|dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T [a_0\|u\|^2+|u'|^2]dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}ba_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T K[E_0+\big(\int_0^T |h|dt\big)^2]dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{4}ba_0^{-\frac{1}{2}}KT[E_0+\big(\int_0^T |h|dt\big)^2].
\end{aligned}$$

• $-\frac{1}{2}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u^2 dxdt$

Usando a desigualdade de Hölder, as condições (2.2) e somando o termo positivo $|u'|^2$ na integral do lado direito, segue

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\int_Q n^2\tfrac{k'^2}{k^2}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}u^2 dxdt &\leqslant \tfrac{1}{2}\tau k_0^2\int_0^T |k'|\|u\|^2 dt \\
&\leqslant \tau k_0^{-2}a_0^{-1}\int_0^T |k'|[a_0\|u\|^2+|u'|^2]dt \\
&\leqslant \tau k_0^{-2}a_0^{-1}\int_0^T |k'|K[E_0+\big(\int_0^T |h|dt\big)^2]dt \\
&\leqslant l_1\tau k_0^{-2}a_0^{-1}K[E_0+\big(\int_0^T |h|dt\big)^2].
\end{aligned}$$

• $-\int_Q hq_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt$

Usando a desigualdade Hölder, obtemos:

$$-\int_Q hq_l\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt \leqslant \int_0^T |h||q_l|\|\frac{\partial u}{\partial x_l}|dt \leqslant a_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T |h|a_0^{\frac{1}{2}}\|u\|dt.$$

Usando o fato de que para quaisquer $a, b \geqslant 0$ temos $a \leqslant (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, segue

$$\begin{aligned}
-\int_Q hq_l\tfrac{\partial u}{\partial x_l}dxdt &\leqslant \tfrac{1}{2}a_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T |h|\big\{a_0\|u\|^2+|u'|^2\big\}^{\frac{1}{2}}dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}a_0^{-\frac{1}{2}}\int_0^T |h|\big\{K[E_0+\big(\int_0^T |h|dt\big)^2\big\}^{\frac{1}{2}}]dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}a_0^{-\frac{1}{2}}\overline{K}\int_0^T |h|[E_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^T |h|dt]dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}a_0^{-\frac{1}{2}}\overline{K}E_0^{\frac{1}{2}}\int_0^T |h|dt + a_0^{-\frac{1}{2}}\overline{K}\big(\int_0^T |h|dt\big)^2.
\end{aligned}$$

• $\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_l\nu_l\big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\big)^2 d\Gamma dt$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_l\nu_l\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2 d\Gamma dt \geqslant \int_0^T\int_\Gamma \frac{a_0}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2 d\Gamma dt.$$

Logo, tomando

$$\begin{aligned} C &= \max\{Ba_0^{-1}K, ba_0^{-1}K, a_0^{-\frac{1}{2}}K, a_1a_0^{-1}K, (n+1)l_1\tau k_0^{-2}a_0^{-1}MK, a_1a_0^{-1}K, Ba_0^{-\frac{1}{2}}K, ba_0^{-\frac{1}{2}}K, \\ &\quad a_0^{-\frac{1}{2}}\overline{K}B, a_0^{-\frac{1}{2}}K, l_1\tau k_0^{-2}a_0^{-1}K\} \end{aligned}$$

segue o resultado.

□

Tomando a função $\widetilde{k}(t) = k(T-t)$, $\widetilde{R}\widetilde{u} = \widetilde{L}^*\widetilde{u}$, as mudanças de variáveis (2.36) e (2.37), feitas no final do Capítulo 2, segue que o Teorema acima é válido para o problema (2.38).

3.2 Desigualdade Inversa

Para demonstrarmos a Desigualdade Inversa, precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.2.1. *Seja* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Toda solução* u *do problema* (3.1) *com* $h = 0$ *satisfaz:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_l(x_l - x_l^0)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma dt &= \int_0^T E(t)dt \\ &+\left(u' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_iu], (x_l - x_l^0)\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{(n-1)}{2}u\right)\Big|_0^T \\ &+\int_Q \frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_l - x_l^0)[n\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}]dxdt \\ &-(n+1)\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}(x_l - x_l^0)u'dxdt \\ &+\frac{(n+1)}{4}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}uu'dxdt \\ &-\frac{(n+1)}{4}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt \\ &+\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}(x_l - x_l^0)u'dxdt \\ &-\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_l - x_l^0)u'dxdt \\ &+\frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u'dxdt - \frac{1}{2}\int_Q b_iu'\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt. \end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos a identidade do Teorema 3.0.7 com $q(x) = x - x_0$. Vejamos algumas identidades a respeito de alguns termos antes:

- Somando o segundo e o quarto termo do lado direito da identidade:

$$\left|\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_l}{\partial x_l}\big(u'^2 - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)dxdt + \int_Q a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt \\
= \frac{n-1}{2}\int_Q \big(u'^2 - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)dxdt + \frac{1}{2}\int_Q \big(u'^2 - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)dxdt \\
+ \int_Q a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l} \\
= \frac{n-1}{2}\int_Q \big(u'^2 - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)dxdt \\
+\frac{1}{2}\int_0^T (|u'|'^2 - a(t,u(t),u(t))dxdt + \int_0^T a(t,u(t),u(t)))dxdt \\
= \frac{n-1}{2}\int_Q \big(u'^2 - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)dxdt + \int_0^T E(t)dt.
\end{array}\right.$$

- Analisando o sétimo termo, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}u\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u'dxdt &= \frac{n}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}uu'dxdt = \frac{(n+1)}{4}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}uu'dxdt \\
&\quad + \frac{(n-1)}{4}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}uu'dxdt.
\end{aligned}$$

- Analisando o décimo termo, temos:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u^2dxdt &= -\frac{n}{2}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt = -\frac{(n+1)}{4}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt \\
&\quad -\frac{(n-1)}{4}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt.
\end{aligned}$$

- Analisando os quinto, sexto, oitavo e nono termos, temos:

$$\left|\begin{array}{l}
+\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u'dxdt + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l u'dxdt + \frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}u'dxdt \\
-\frac{1}{2}\int_Q b_i u'\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt = -(n+1)\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u'dxdt + \frac{(n-1)}{2}\int_Q b_i u'\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt \\
+\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u'dxdt - \int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l u'dxdt + \frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u'dxdt \\
-\frac{1}{2}\int_Q b_i u'\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt.
\end{array}\right.$$

Resultando então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_l\nu_l\big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\big)^2 d\Gamma dt &= \big(u' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], q_l\frac{\partial u}{\partial x_l}\big)\,\big|_0^T + \int_0^T E(t)dt \\
&\quad + \int_Q \frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l\big(n\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\big)dxdt \\
&\quad -(n+1)\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u'dxdt + \frac{(n+1)}{4}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}uu'dxdt \\
&\quad -\frac{(n+1)}{4}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt + \int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}q_l u'dxdt \\
&\quad -\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_i}q_l u'dxdt + \frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u'dxdt \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_Q b_i u'\frac{\partial u}{\partial x_l}dxdt + \frac{n-1}{2}\int_Q \big(u'^2 - a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\big)dxdt \\
&\quad +\frac{(n-1)}{2}\int_Q b_i u'\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt + \frac{(n-1)}{4}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}uu'dxdt \\
&\quad -\frac{(n-1)}{4}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Por outro lado, multiplicando ambos os lados da equação $L^* = 0$ por u, integrando sobre Q, usando integração por partes, fórmula de Green e o fato que $u \in H_0^1(\Omega)$ obtemos:

- $\int_Q u''udxdt = \big(u, u'\big) \mid_0^T - \int_Q u'^2dxdt;$
- $\int_Q A(t)uudxdt = \int_0^T < A(t)u, u >= \int_0^T a(t, u, u)dt;$
- $\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u]'udxdt = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], u\big) \mid_0^T - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}uu'dxdt - \frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}u'dxdt;$
- $\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i u']udxdt = -\frac{1}{2}\int_Q b_i u'\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt;$
- $$\begin{aligned}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[n\frac{k'^2}{k^2}x_i u]udxdt &= \int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt + \int_Q n\frac{k'^2}{k^2}x_i u\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt \\ &= \int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt - \int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[n\frac{k'^2}{k^2}x_i u]udxdt.\end{aligned}$$

  Portanto,

  $$\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}[n\frac{k'^2}{k^2}x_i u]udxdt = \frac{1}{2}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2dxdt.$$

Adicionando as cinco igualdades acima e multiplicando o resultado por $\frac{(n-1)}{2}$:

$$\begin{aligned}\big(u' + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}[b_i u], \tfrac{(n-1)}{2}u\big) \mid_0^T &= \tfrac{n-1}{2}\int_Q \big(u'^2 - a_{ij}\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\big)dxdt \\ &\quad + \tfrac{(n-1)}{2}\int_Q b_i u'\tfrac{\partial u}{\partial x_i}dxdt + \tfrac{(n-1)}{4}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}uu'dxdt \\ &\quad - \tfrac{(n-1)}{4}\int_Q n^2\tfrac{k'^2}{k^2}u^2dxdt.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6), segue o resultado. □

O próximo teorema trata da Desigualdade Inversa. Vejamos antes algumas notações. Seja $C_1 = e^{-C_0}$ e $C_2 = e^{C_0}$. Assim pelo Teorema 3.0.6, parte (ii):

$$C_1E_0 \leqslant E(t) \leqslant C_2E_0, \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

Defina o tempo T_0 por:

$$T_0 = [2a_0^{-\frac{1}{2}}R(x_0) + K_1 + K_2 + K_3 + K_4]C_2C_1^{-1} > 0, \tag{3.8}$$

onde

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{2\tau[(n-1)M+2nR(x^0)+2\lambda_1^{\frac{1}{2}}MR(x^0)]}{a_0k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}; \\ K_2 &= \frac{2l_1(n+1)R(x^0)[\tau M+a_0^{\frac{1}{2}}k_0]}{a_0k_0^2}; \\ K_3 &= \frac{l_1n(n+1)[\tau M+a_0^{\frac{1}{2}}k_0]}{a_0k_0^2\lambda_1^{\frac{1}{2}}}; \\ K_4 &= \frac{2l_1[R(x^0)+M]}{a_0^{\frac{1}{2}}k_0}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Teorema 3.2.1. *Seja* $T > T_0$. *Então toda solução fraca* u *do problema (3.1) com* $h = 0$, *verifica:*

$$\frac{1}{2}R(x^0)a_1\int_0^T\int_{\Gamma(x^0)}\big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\big)^2 d\Gamma dt \geqslant C_1(T-T_0)E_0 \tag{3.10}$$

Demonstração. Aqui $R(x^0)$ foi dado na Introdução. Estimando cada um dos termos da identidade do Lema 3.2.1:

$\bullet\big(u' + \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_iu], (x_l - x_l^0)\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{(n-1)}{2}u\big)\,|_0^T$

Usando a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} |\big(u', (x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l} + \tfrac{(n-1)}{2}u\big)| &\leqslant \mu^{\frac{1}{2}}|u'|\tfrac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}|(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l} + \tfrac{(n-1)}{2}u| \\ &\leqslant \tfrac{\mu}{2}|u'|^2 + \tfrac{1}{2\mu}|(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l} + \tfrac{(n-1)}{2}u|^2, \end{aligned}$$

onde μ é um real positivo que será tomado apropriadamente.

Vejamos a segunda parcela do lado direito:

$$\begin{aligned} |(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l} + \tfrac{(n-1)}{2}u|^2 &= \int_\Omega[(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l}]^2dx + \tfrac{(n-1)^2}{4}\int_\Omega u^2dx \\ &\quad +(n-1)\int_\Omega[(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l}]udx \\ &= \int_\Omega[(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l}]^2dx + \tfrac{(n-1)^2}{4}\int_\Omega u^2dx \\ &\quad +\tfrac{(n-1)}{2}\int_Q(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u^2}{\partial x_l} \\ &= \int_\Omega[(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l}]^2dx + \tfrac{(n-1)^2}{4}\int_\Omega u^2dx \\ &\quad -\tfrac{(n-1)}{2}\int_\Omega u^2\tfrac{\partial}{\partial x_l}(x_l - x_l^0)dx + \tfrac{(n-1)}{2}\int_\Gamma(x_l - x_l^0)u^2\nu_l d\Gamma \\ &= \int_\Omega[(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l}]^2dx + \tfrac{(n-1)^2}{4}\int_\Omega u^2dx \\ &\quad -\tfrac{n(n-1)}{2}\int_\Omega u^2dx \\ &= \int_\Omega[(x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l}]^2dx - \tfrac{(n^2-1)}{4}\int_\Omega u^2dx. \end{aligned}$$

Segue então:

$$|(x_l - x_l^0)\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{(n-1)}{2}u|^2 \leqslant R^2(x^0)\|u\|^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|\big(u', (x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l} + \tfrac{(n-1)}{2}u\big)| &\leqslant \tfrac{\mu}{2}|u'|^2 + \tfrac{1}{2\mu}R^2(x^0)\|u\|^2 \\ &\leqslant \tfrac{\mu}{2}|u'|^2 + \tfrac{1}{2\mu}R^2(x^0)a_0^{-1}a(t,u,u).\end{aligned}$$

Fazendo, $\mu = R(x^0)a_0^{-\frac{1}{2}}0$:

$$\begin{aligned}|\big(u', (x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l} + \tfrac{(n-1)}{2}u\big)| &\leqslant R(x^0)a_0^{-\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}|u'|^2 + R(x^0)a_0^{-\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}a(t,u,u) \\ &\leqslant R(x^0)a_0^{-\frac{1}{2}}E(t) \leqslant R(x^0)a_0^{-\frac{1}{2}}C_2E_0.\end{aligned}$$

Assim, $\big(u', (x_l - x_l^0)\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{(n-1)}{2}u\big)\,|_0^T \geqslant -2R(x^0)a_0^{-\frac{1}{2}}C_2E_0$.

Vejamos agora que:

$$\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}[b_iu], (x_l - x_l^0)\tfrac{\partial u}{\partial x_l} + \tfrac{(n-1)}{2}u\big) = \tfrac{1}{2}\big(-2n\tfrac{k'}{k}u + b_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, [x_l - x_l^0]\tfrac{\partial u}{\partial x_l}\big) - \tfrac{(n-1)}{4}\big(b_iu, \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\big).$$

Primeiramente temos:

$$\begin{aligned}|\tfrac{1}{2}\big(-2n\tfrac{k'}{k}u + b_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}, [x_l - x_l^0]\tfrac{\partial u}{\partial x_l}\big)| &\leqslant \tfrac{1}{2}|-2n\tfrac{k'}{k}u||[x_l - x_l^0]\tfrac{\partial u}{\partial x_l}| + \tfrac{1}{2}|b_i\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||[x_l - x_l^0]\tfrac{\partial u}{\partial x_l}| \\ &\leqslant n\tfrac{\tau}{k_0}R(x^0)|u||\tfrac{\partial u}{\partial x_l}| + \tfrac{\tau}{k_0}R(x^0)M|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||\tfrac{\partial u}{\partial x_l}| \\ &\leqslant \tfrac{\tau}{k_0}R(x^0)[n|u|\|u\| + M\|u\|^2] \\ &\leqslant \tfrac{\tau}{k_0}R(x^0)[n\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|u\|^2 + M\|u\|^2] \\ &\leqslant \frac{\tau}{a_0k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}R(x^0)[na(t,u,u) + M\lambda_1^{\frac{1}{2}}a(t,u,u)] \\ &\leqslant 2\frac{\tau}{a_0k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}R(x^0)[nE(t) + M\lambda_1^{\frac{1}{2}}E(t)] \\ &\leqslant 2\tau R(x^0)[n + M\lambda_1^{\frac{1}{2}}]\frac{C_2E_0}{a_0k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}|-\tfrac{(n-1)}{4}\big(b_iu, \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\big)| &\leqslant \tfrac{(n-1)}{4}|b_i||u||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}| \leqslant \tfrac{(n-1)}{2}\frac{\tau}{k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}M\|u\|^2 \\ &\leqslant \tfrac{(n-1)}{2}\frac{\tau}{a_0k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}Ma(t,u,u) \leqslant (n-1)\tau\frac{1}{a_0k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}ME(t) \\ &\leqslant (n-1)\tau M\frac{C_2E_0}{a_0k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}[b_iu], (x_l - x_l^0)\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{(n-1)}{2}u\Big)\,|_0^T \geqslant -2\tau[(n-1)M + 2nR(x^0) + 2\lambda_1^{\frac{1}{2}}MR(x^0)]\frac{C_2E_0}{a_0k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}.$$

- $\int_Q \frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_l - x_l^0)[n\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}]dxdt$

$$
\begin{aligned}
|\int_Q \frac{k'^2}{k^2} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_l - x_l^0)[n\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_j}]dxdt| &\leqslant \frac{\tau}{k_0^2} MR(x^0)\int_0^T |k'||\frac{\partial u}{\partial x_i}|[n|\frac{\partial u}{\partial x_l}| + \frac{1}{2}|\frac{\partial u}{\partial x_j}|]dt \\
&\leqslant (n+1)\frac{\tau}{k_0^2} MR(x^0)\int_0^T |k'|\|u\|^2 dt \\
&\leqslant (n+1)\frac{\tau}{a_0 k_0^2} MR(x^0)\int_0^T |k'|a(t,u,u)dt \\
&\leqslant 2(n+1)\frac{\tau}{a_0 k_0^2} MR(x^0)\int_0^T |k'|E(t)dt \\
&\leqslant 2l_1(n+1)\tau MR(x^0)\frac{C_0 E_2}{a_0 k_0^2}.
\end{aligned}
$$

- $-(n+1)\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}(x_l - x_l^0)u' dxdt$

$$
\begin{aligned}
|-(n+1)\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}(x_l - x_l^0)u' dxdt| &\leqslant (n+1)\int_0^T |\frac{k'}{k}||\frac{\partial u}{\partial x_l}||(x_l - x_l^0)||u'|dt \\
&\leqslant (n+1)k_0^{-1}R(x^0)\int_0^T |k'|\|u\||u'|dt \\
&\leqslant (n+1)\frac{1}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0} R(x^0)\int_0^T |k'|\frac{1}{2}[a(t,u,u) + |u'|^2]dt \\
&\leqslant 2l_1(n+1)R(x^0)\frac{C_2 E_0}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0}.
\end{aligned}
$$

- $\frac{(n+1)}{4}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i} uu' dxdt$

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+1)}{4}\int_0^T |\frac{\partial b_i}{\partial x_i}||u||u'|dt &\leqslant \frac{(n+1)}{4}\int_0^T |2n\frac{k'}{k}||u||u'|dt \\
&\leqslant n\frac{(n+1)}{2}\frac{1}{k_0\lambda_1^{\frac{1}{2}}}\int_0^T |k'|\|u\||u'|dt \\
&\leqslant n\frac{(n+1)}{2}\frac{1}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0 \lambda_1^{\frac{1}{2}}}\int_0^T |k'|\frac{1}{2}[a_0\|u\|^2 + |u'|^2 dt \\
&\leqslant l_1 n(n+1)\frac{C_2 E_0}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0 \lambda_1^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

- $-\frac{(n+1)}{4}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2 dxdt$

$$
\begin{aligned}
|-\frac{(n+1)}{4}\int_Q n^2\frac{k'^2}{k^2}u^2 dxdt| &= |-\frac{(n+1)}{4}\int_Q n\frac{k'}{k}\frac{1}{2}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}u^2 dxdt| \\
&= |\frac{(n+1)}{2}\int_Q n\frac{k'}{k}b_i u\frac{\partial u}{\partial x_i}dxdt| \leqslant n\frac{(n+1)}{2}\int_0^T |\frac{k'}{k}||\frac{k'}{k}x_i||u|dt|\frac{\partial u}{\partial x_i}|dt \\
&\leqslant n\frac{(n+1)}{2}\frac{\tau}{k_0^2\lambda_1^{\frac{1}{2}}}M\int_0^T |k'|\|u\|^2 \\
&\leqslant l_1 n(n+1)\tau M\frac{C_2 E_0}{a_0 k_0^2 \lambda_1^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

- $\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}(x_l - x_l^0)u' dxdt - \int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_l - x_l^0)u' dxdt$

$$
\begin{aligned}
|\int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_l}(x_l - x_l^0)u' dxdt - \int_Q \frac{k'}{k}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_l - x_l^0)u' dxdt| &\leqslant 2\frac{R(x^0)}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0}\int_0^T |k'|a_0^{\frac{1}{2}}\|u\||u'|dt \\
&\leqslant \frac{R(x^0)}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0}\int_0^T |k'|[a_0\|u\|^2 + |u'|^2]dt \\
&\leqslant 2l_1 R(x^0)\frac{C_2 E_0}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0}.
\end{aligned}
$$

$\bullet \frac{1}{2}\int_Q b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u' dxdt - \frac{1}{2}\int_Q b_i u' \frac{\partial u}{\partial x_l} dxdt$

$$\begin{aligned}
|\tfrac{1}{2}\int_Q b_i \tfrac{\partial u}{\partial x_i} u' dxdt - \tfrac{1}{2}\int_Q b_i u' \tfrac{\partial u}{\partial x_l} dxdt| &\leqslant \int_0^T |\tfrac{k'}{k}||x_i||\tfrac{\partial u}{\partial x_i}||u'|dt + \int_0^T |\tfrac{k'}{k}||x_i||\tfrac{\partial u}{\partial x_l}||u'|dt \\
&\leqslant 2\frac{M}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0} \int_0^T |k'|a_0^{\frac{1}{2}} \|u\||u'|dt \\
&\leqslant \frac{M}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0} \int_0^T |k'|[a_0\|u\|^2 + |u'|^2]dt \\
&\leqslant 2l_1 M \frac{C_2 E_0}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0}.
\end{aligned}$$

Assim, usando as desiguadades acima:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_l(x_l - x_l^0)\big(\tfrac{\partial u}{\partial \nu}\big)^2 \geqslant\ & \int_0^T E(t)dt - 2R(x^0)a_0^{-\frac{1}{2}} C_2 E_0 \\
& -2\tau[(n-1)M + 2nR(x^0) + 2\lambda_1^{\frac{1}{2}} MR(x^0)]\frac{C_2 E_0}{a_0 k_0 \lambda_1^{\frac{1}{2}}} \\
& -2l_1(n+1)R(x^0)[\tau M + a_0^{\frac{1}{2}} k_0]\frac{C_2 E_0}{a_0 k_0^2} \\
& -l_1 n(n+1)[\tau M + a_0^{\frac{1}{2}} k_0]\frac{C_2 E_0}{a_0 k_0^2 \lambda_1^{\frac{1}{2}}} \\
& -2l_1[R(x^0) + M]\frac{C_2 E_0}{a_0^{\frac{1}{2}} k_0},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_l(x_l - x_l^0)\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2 \geqslant \int_0^T C_1 E_0 dt - T_0 C_1 E_0 \geqslant C_1(T - T_0)E_0. \tag{3.11}$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij}\nu_i\nu_j\nu_l(x_l - x_l^0)\Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2 \leqslant \frac{1}{2}R(x^0)a_1 \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big)^2. \tag{3.12}$$

Por (3.11) e (3.12) segue o resultado. $\square$

Capítulo 4

Controle Exato

Considere o operador L dado por (3) e o problema:

$$\left| \begin{array}{llllll} \mathsf{Lu} & = & 0 & & \text{em} & Q; \\ u & = & v & & \text{sobre} & \Sigma; \\ u(0) = & u^0 & , & u'(0) = u^1 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Tomando z como solução do problema:

$$\left| \begin{array}{lllll} L^*z & = & h & \text{em} & Q; \\ z & = & 0 & \text{sobre} & \Sigma; \\ z(T) = & z'(T) & = 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right. \tag{4.2}$$

e considerando as mudanças de variáveis (2.36) e (2.37) mencionadas no final do Capítulo 2, segue pelo Teorema 2.0.4, se $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ que:

$$z \in C(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.3}$$

Multiplicando (3) por z e integrando sobre Q, obtemos:

- Integrando por partes de 0 aT:

$$\begin{aligned} \int_Q u''z\,dxdt &= \big(u',z\big)\,|_0^T - \int_Q z'u'\,dxdt = -\big(u'(0),z(0)\big) - \big(z',u\big)\,|_0^T \\ &\quad + \int_Q z''u\,dxdt = -\big\langle u'(0),z(0)\big\rangle + \big(z'(0),u(0)\big) + \int_Q z''u\,dxdt; \end{aligned}$$

- Usando Green e integração por partes de 0 a T, segue que:

$$\begin{aligned} -\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\big)z\,dxdt &= \int_Q a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i} - \int_\Sigma a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} z\nu_i\,d\Gamma dt \\ &= -\int_Q \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\big)u\,dxdt + \int_\Sigma a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}u\nu_i\,d\Gamma dt \\ &= -\int_Q \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\big)u\,dxdt + \int_\Sigma u\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\,d\Gamma dt, \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial z}{\partial \nu_A} = a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\nu_i$;

- Integrando por partes de 0 a T e usando a fórmula de Green:

$$\begin{aligned}
\int_Q b_i \tfrac{\partial u'}{\partial x_i} z dxdt &= \int_\Omega \left(b_i z \tfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) |_0^T \, dx - \int_Q \left(z' b_i + z b_i'\right) \tfrac{\partial u}{\partial x_i} dxdt \\
&= -\int_\Omega b_i(0) \tfrac{\partial u(0)}{\partial x_i} z(0) dx + \int_Q \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(z' b_i + z b_i'\right) u dxdt \\
&\quad -\int_\Sigma \left(z' b_i + z b_i'\right) u \nu_i d\Gamma dt \\
&= -\int_\Omega b_i(0) \tfrac{\partial u(0)}{\partial x_i} z(0) dx + \int_Q b_i \tfrac{\partial z'}{\partial x_i} u dxdt \\
&\quad -\int_Q 2nk'k^{-1} z' u dxdt + \int_Q 2(k'^2 - k''k)k^2 x_i \tfrac{\partial z}{\partial x_i} u \\
&\quad +\int_Q 2n(k'^2 - k''k)k^{-2} z u dxdt;
\end{aligned}$$

- Usando a fórmula de Green, temos:

$$\begin{aligned}
\int_Q [(1-n)k'^2 - k''k]k^{-2} x_i \tfrac{\partial u}{\partial x_i} z \, dxdt &= -\int_Q [(1-n)k'^2 - k''k]k^{-2} n z u dxdt \\
&\quad -\int_Q [(1-n)k'^2 - k''k]k^{-2} x_i \tfrac{\partial z}{\partial x_i} u dxdt.
\end{aligned}$$

Assim somando as identidades acima e usando (3.2), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_Q Luzdxdt &= -\left\langle u'(0), z(0)\right\rangle + \left(u(0), z'(0)\right) - \int_\Omega b_i(0) \tfrac{\partial u(0)}{\partial x_i} z(0) dx + \int_\Sigma u \tfrac{\partial z}{\partial \nu_A} d\Gamma dt \\
&\quad + \int_Q L^* z u dxdt;
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\int_Q Luzdxdt &= -\left\langle u'(0), z(0)\right\rangle + \left(u(0), z'(0)\right) - \int_\Omega b_i(0) \tfrac{\partial u(0)}{\partial x_i} z(0) dx + \int_\Sigma u \tfrac{\partial z}{\partial \nu_A} d\Gamma dt \\
&\quad + \int_Q h u dxdt.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Pelo Teorema 3.0.6 (i), com a mudança de variável $T - t$ aplicada em $t = T$, existe $K > 0$ tal que:

$$E(0) \leqslant [2E(T) + \Big(\int_0^T |h| dt\Big)^2] \exp(KT).$$

Então,

$$|z'(0)| + a_0^{\frac{1}{2}} \|z(0)\| \leqslant 2[|z'(0)|^2 + a_0 \|z(0)\|^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant 4[2E(0)]^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1 \int_0^T |h| dt.$$

Assim, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que:

$$|z'(0)| \leqslant C_1 \int_0^T |h| dt \quad \text{e} \quad \|z(0)\| \leqslant C_2 \int_0^T |h| dt.$$

Logo, existe $C_3 > 0$ tal que

$$|z'(0)| + \|z(0)\| \leqslant C \int_0^T |h| dt, \tag{4.5}$$

onde $C_3 = \max\{C_1, C_2\} > 0$.

Além disso, pelo Teorema 3.1.1

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma) \quad \text{e} \quad \|\frac{\partial z}{\partial \nu}\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\int_0^T |h|dt, \tag{4.6}$$

onde C é uma constante que independe de z e h. Por (4.3) $z' \in L^2(\Omega)$, $z(0) \in H_0^1(\Omega)$.

Logo por (4.4), por (4.6) e lembrando que $u = v \in \Sigma$ obtemos:

$$u^0 \in L^2(\Omega) \quad u^1 \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad v \in L^2(\Sigma). \tag{4.7}$$

Assim, para cada par de condições iniciais $\{u^0, u^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e $v \in L^2(\Sigma)$ fica bem definido o funcional S sobre $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ definido por

$$< S, h >= \langle u^1, z(0)\rangle - \big(u^0, z'(0)\big) - \langle 2\frac{k'(0)}{k(0)}x_i\frac{\partial u^0}{\partial x_i}, z(0)\rangle - \int_0^T \big(v, \frac{\partial z}{\partial \nu_A}\big)dt \tag{4.8}$$

para todo z solução do problema (4.2). Além disso, por (4.5) e (4.6):

$$\begin{aligned} |< S, h >| &\leqslant \|u^1\|\|z(0)\| + |u^0||z'(0)| + [2\tfrac{\tau}{k_0}n + 2\tfrac{\tau}{k_0}M]|u^0|\|z(0)\| + a_1\|v\|_{L^2(\Sigma)}\|\tfrac{\partial z}{\partial \nu}\|_{L^2(\Sigma)} \\ &\leqslant C_4[|u^0| + \|u^1\| + \|v\|_{L^2(\Sigma)}]\overline{C}\textstyle\int_0^T |h|dt \leqslant C\int_0^T |h|dt[|u^0| + \|u^1\| + \|v\|_{L^2(\Sigma)}] \\ &\leqslant C[|u^0| + \|u^1\| + \|v\|_{L^2(\Sigma)}]\|h\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde $C_4 = \max\{\|z(0)\|, |z'(0)|, [2\frac{\tau}{k_0}n + 2\frac{\tau}{k_0}M\|z(0)\|, a_1\}$. Note também que $S : L^1(0,T;L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$, definido por (4.8) é uma forma linear (devido a linearidade dos produtos internos, dualidades e integrais envolvidos na expressão) e por (4.9) ela também é contínua. Isto diz que S é um objeto de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, dual topológio de $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, com

$$\|S\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C[|u^0| + \|u^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_L^2(\Sigma)]. \tag{4.10}$$

Assim faz sentido definir **solução por transposição**.

Definição 4.0.1. u *é dita solução por transposição do problema (4.1) com condições iniciais* $\{u^0, u^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ *se* $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *e*

$$\int_0^T (u, h)dt = \langle u^1, z(0)\rangle - \big(u^0, z'(0)\big) - \langle 2\frac{k'(0)}{k(0)}x_i\frac{\partial u^0}{\partial x_i}, z(0)\rangle - \int_0^T \big(v, \frac{\partial z}{\partial \nu_A}\big)_{L^2(\Gamma)}dt \tag{4.11}$$

para todo $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$*; onde* z *esta relacionado com* h *pelo problema (4.2).*

Teorema 4.0.2. *Existe uma única solução por transposição do problema não homogêneo (4.1). Além disso,* u *satisfaz:*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C[|u^0| + \|u^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|^2_L(\Sigma)] \tag{4.12}$$

Demonstração. Pela definição de $< S, h >$ e pelas considerações anteriores, S satisfaz as condições do Teorema da Representação de Riez. Então $\forall h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ existe $u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ tal que $< S, h >=< u, h >$. Logo existe a solução $u = S$ por transposição de (4.1), com $\|u\| = \|S\|$ satisfazendo (4.10).

Vejamos a unicidade. Se u e θ são soluções por transposição do problema (4.1), então $w = u - \theta$ é solução de:

$$\left| \begin{array}{llll} Lw & = 0 & \text{em} & Q; \\ w & = 0 & \text{sobre} & \Sigma; \\ w(0) & = w'(0) \;=\; 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right.$$

Daí, por w satisfazer (4.12) para $u^0 = u^1 = v = 0$, segue que $\|w\| \leqslant 0$. Portanto $w \equiv 0$, ou seja, $u = \theta$. □

Agora seja $h \in D(Q)$ e z solução fraca do problema:

$$\left| \begin{array}{llll} L^*z & = h' & \text{em} & Q; \\ z & = 0 & \text{sobre} & \Sigma; \\ z(0) & = z'(0) \;=\; 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right. \tag{4.13}$$

Observando que L^* dado por (3.2) é um operador do tipo (2.1), então pelo Teorema 2.0.5, z satisfaz (2.35). Além disso, pelo Teorema 3.1.1, $\frac{\partial z}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$.

Lema 4.0.2. *A solução* z *de (4.13) com* $h \in D(\Omega)$ *satisfaz:*

$$\|\frac{\partial z}{\partial \nu}\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C \int_0^T \|h\| dt, \tag{4.14}$$

onde C *independe de* z *e* h.

Demonstração. z satisfaz a identidade do Teorema (3.0.7), substituindo h por h' no último termo. Note que fazendo $z' = (z' - h) + h$, consequentemente

$z'^2 = (z'-h)^2 + 2h(z'-h) + h^2$, obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_Q z'^2 \frac{\partial q_l}{\partial x_l} dxdt = \frac{1}{2}\int_Q (z'-h)^2 \frac{\partial q_l}{\partial x_l} dxdt + \int_Q h(z'-h)\frac{\partial q_l}{\partial x_l} dxdt + \frac{1}{2}\int_Q h^2 \frac{\partial q_l}{\partial x_l} dxdt. \tag{4.15}$$

Por outro lado, usando integração por partes de 0 a T, a fórmula de Green e o fato de que $h \in D(\Omega)$, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_Q h' q_l \tfrac{\partial z}{\partial x_l} dxdt &= \int_\Omega \left(q_l \tfrac{\partial z}{\partial x_l} h\right) |_0^T - \int_Q h q_l \tfrac{\partial z'}{\partial x_l} dxdt \\
&= -\int_Q h q_l \tfrac{\partial z'}{\partial x_i} dxdt = \int_Q \tfrac{\partial h}{\partial x_l} q_l z' dxdt + \int_Q h \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} z' dxdt
\end{aligned}$$

Usando a identidade acima obtemos:

$$\begin{aligned}
-\int_Q h' q_l \tfrac{\partial z}{\partial x_l} dxdt &= -\int_Q \tfrac{\partial h}{\partial x_l} q_l (z'-h) dxdt - \int_Q \tfrac{\partial h}{\partial x_l} q_l h dxdt \\
&\quad -\int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} h^2 dxdt - \int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} h(z'-h) dxdt \\
&= -\int_Q \tfrac{\partial h}{\partial x_l} q_l (z'-h) dxdt - \int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} h^2 dxdt \\
&\quad -\int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} h(z'-h) dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} h^2 dxdt \\
&= -\int_Q \tfrac{\partial h}{\partial x_l} q_l (z'-h) dxdt - \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} h^2 dxdt \\
&\quad -\int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} h(z'-h) dxdt.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Portanto, somando as identidades (4.15) e (4.16), obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_Q z'^2 \frac{\partial q_l}{\partial x_l} dxdt - \int_Q h' q_l \frac{\partial z}{\partial x_l} dxdt = \frac{1}{2}\int_Q (z'-h)^2 \frac{\partial q_l}{\partial x_l} dxdt - \int_Q \frac{\partial h}{\partial x_l} q_l (z'-h) dxdt.$$

Estimando a soma usando (2.35):

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_Q z'^2 \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} dxdt - \int_Q h' q_l \tfrac{\partial z}{\partial x_l} dxdt &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |z'-h|^2 |\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}| dt - \int_0^T |\tfrac{\partial h}{\partial x_l}| |q_l| |z'-h| dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T K_1 \big(\int_0^T \|h\| dt\big)^2 + \int_0^T \|h\| K_2 \big(\int_0^T \|h\| ds\big) dt \\
&\leqslant C \big(\int_0^T \|h\| dt\big)^2.
\end{aligned}$$

Considerando que para termos positivos a, b, temos $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) \leqslant a + b$ e com raciocínio análogo ao que foi feito em (4.5), segue que para todo $t \in [0, T]$ obtemos:

$$\left(|z'(t)|^2 + \|z(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant |z'(t)| + \|z(t)\| \leqslant C_3 \int_0^T |h| dt.$$

Portanto,

$$|z'(t)|^2 + \|z(t)\|^2 \leqslant \overline{C} \Big(\int_0^T \|h\| dt\Big)^2,$$

onde $\overline{C} = C_3^2 \lambda_2^2$ com $\lambda_2 > 0$ tal que $|h| \leqslant \lambda_2 \|h\|$.

Além disso, pela desigualdade (4.6), obtemos:

$$\|h\|\|\frac{\partial z}{\partial x_l}|dt \leqslant \|h\|C_2\int_0^T |h|dt \leqslant C\Big(\int_0^T \|h\|dt\Big)^2,$$

onde $C = \frac{C_2}{T}\lambda_2$.

Analisando a seguir, cada termo da identidade do Teorema 3.0.7 e usando as duas desigualdade acima, para constantes C positivas apropriadas, segue que:

• $\big(z' + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_l\frac{\partial z}{\partial x_l}\big)\mid_0^T$

$$\begin{aligned}
\big(z', q_l\tfrac{\partial z}{\partial x_l}\big)\mid_0^T &= \big(z' - h, q_l\tfrac{\partial z}{\partial x_l}\big)\mid_0^T + \big(h, q_l\tfrac{\partial z}{\partial x_l}\big)\mid_0^T\\
&\leqslant |z'(T) - h(T)|\|z(T)\| + |z'(0) - h(0)|\|z(0)\| + \|h(T)\|\|z(T)\|\\
&\quad +\|h(0)\|\|z(0)\|\\
&\leqslant \tfrac{1}{2}[|z'(T) - h(T)|^2 + \|z(T)\|^2] + \tfrac{1}{2}[|z'(0) - h(0)|^2 + \|z(0)\|^2]\\
&\quad +\|h(T)\|\|z(T)\| + \|h(0)\|\|z(0)\|\\
&\leqslant C\big(\textstyle\int_0^T \|h\|dt\big)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}[b_i z], q_l\tfrac{\partial z}{\partial x_l}\big)\mid_0^T &\leqslant \tfrac{1}{2}|\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}|\|z(T)\||q_l||\tfrac{\partial z(T)}{\partial x_l}| + \tfrac{1}{2}|\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}|\|z(0)\||q_l||\tfrac{\partial z(0)}{\partial x_l}|\\
&\quad +\tfrac{1}{2}|b_i|\|z(T)\||q_l||\tfrac{\partial z(T)}{\partial x_l}| + \tfrac{1}{2}|b_i|\|z(0)\||q_l||\tfrac{\partial z(0)}{\partial x_l}|\\
&\leqslant \tfrac{1}{2}(B + b)\|z(T)\|^2 + \tfrac{1}{2}(B + b)\|z(0)\|^2 \leqslant (B + b)C\big(\textstyle\int_0^T \|h\|dt\big)^2.
\end{aligned}$$

• $-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_l}{\partial x_l}\big(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_i}\big)dxdt$

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\textstyle\int_Q \tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}a_{ij}\tfrac{\partial z}{\partial x_j}\tfrac{\partial z}{\partial x_i}dxdt &\leqslant \tfrac{1}{2}a_1\textstyle\int_0^T \|z\|^2\\
&\leqslant \tfrac{1}{2}a_1\textstyle\int_0^T C\big(\int_0^T \|h\|ds\big)^2dt \leqslant \tfrac{1}{2}a_1CT\big(\int_0^T \|h\|dt\big)^2.
\end{aligned}$$

• $\int_Q \frac{k'^2}{k^2}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}q_l\big(n\frac{\partial z}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x_j}\big)dxdt$

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_Q \tfrac{k'^2}{k^2}x_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i}q_l\big(n\tfrac{\partial z}{\partial x_l} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial z}{\partial x_j}\big)dxdt &\leqslant \textstyle\int_0^T |\tfrac{k'^2}{k^2}||x_i||\tfrac{\partial z}{\partial x_i}||q_l|\big(n|\tfrac{\partial z}{\partial x_l}| + \tfrac{1}{2}|\tfrac{\partial u}{\partial x_j}|\big)dt\\
&\leqslant (n + 1)\tau k_0^{-2}M\textstyle\int_0^T |k'|\|z\|^2dt\\
&\leqslant (n + 1)\tau k_0^{-2}M\textstyle\int_0^T |k'|C\big(\int_0^T \|h\|ds\big)^2dt\\
&\leqslant (n + 1)l_1\tau k_0^{-2}MC\big(\textstyle\int_0^T \|h\|dt\big)^2.
\end{aligned}$$

• $\int_Q a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_l}dxdt$

$$\begin{aligned}\int_Q a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_l}dxdt &\leqslant a_1\int_0^T |\tfrac{\partial z}{\partial x_j}||\tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}||\tfrac{\partial z}{\partial x_l}|dt\\ &\leqslant a_1\int_0^T \|z\|^2dt \leqslant a_1\int_0^T C\big(\int_0^T\|h\|ds\big)^2dt \leqslant a_1CT\big(\int_0^T\|h\|dt\big)^2.\end{aligned}$$

•$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_l}q_l z' dxdt$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}\tfrac{\partial z}{\partial x_l}q_l z'dxdt &= \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}\tfrac{\partial z}{\partial x_l}q_l(z'-h)dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}\tfrac{\partial z}{\partial x_l}q_l h dxdt\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}||\tfrac{\partial z}{\partial x_l}||q_l||z'-h|dt + \tfrac{1}{2}\int_0^T |\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}||\tfrac{\partial z}{\partial x_l}||q_l|\|h\|dt\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}B\int_0^T \|z\||z'-h|dt + \tfrac{1}{2}B\int_0^T\|z\|\|h\|dt\\ &\leqslant \tfrac{1}{4}B\int_0^T[\|z\|^2+|z'-h|^2]dt + \tfrac{1}{2}B\int_0^T\|z\||h|dt\\ &\leqslant B\int_0^T C\big(\int_0^T\|h\|ds\big)^2dt \leqslant BCT\big(\int_0^T\|h\|dt\big)^2.\end{aligned}$$

•$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_l}\frac{\partial z}{\partial x_i}q_l z' dxdt$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_l}\tfrac{\partial z}{\partial x_i}q_l z'dxdt &= \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_l}\tfrac{\partial z}{\partial x_i}q_l(z'-h)dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_l}\tfrac{\partial z}{\partial x_i}q_l h dxdt\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |\tfrac{\partial b_i}{\partial x_l}||\tfrac{\partial z}{\partial x_i}||q_l||z'-h|dt + \tfrac{1}{2}\int_0^T |\tfrac{\partial b_i}{\partial x_l}||\tfrac{\partial z}{\partial x_i}||q_l|\|h\|dt\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}B\int_0^T \|z\||z'-h|dt + \tfrac{1}{2}B\int_0^T\|z\|\|h\|dt\\ &\leqslant \tfrac{1}{4}B\int_0^T[\|z\|^2+|z'-h|^2]dt + \tfrac{1}{2}B\int_0^T\|z\|\|h\|dt\\ &\leqslant B\int_0^T C\big(\int_0^T\|h\|ds\big)^2dt \leqslant BCT\big(\int_0^T\|h\|dt\big)^2.\end{aligned}$$

•$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i}z\frac{\partial q_l}{\partial x_l}z' dxdt$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}z\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}z'dxdt &= \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}z\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}(z'-h)dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q \tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}z\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}h dxdt\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}|\|z\||\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}||z'-h|dt + \tfrac{1}{2}\int_0^T |\tfrac{\partial b_i}{\partial x_i}|\|z\||\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}|\|h\|dt\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}B\int_0^T \|z\||z'-h|dt + \tfrac{1}{2}B\int_0^T\|z\|\|h\|dt\\ &\leqslant \tfrac{1}{4}B\int_0^T[\|z\|^2+|z'-h|^2]dt + \tfrac{1}{2}B\int_0^T\|z\||h|dt\\ &\leqslant B\int_0^T C\big(\int_0^T\|h\|ds\big)^2dt \leqslant BCT\big(\int_0^T\|h\|dt\big)^2.\end{aligned}$$

•$\frac{1}{2}\int_Q b_i\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial q_l}{\partial x_l}z' dxdt$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_Q b_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}z' &= \tfrac{1}{2}\int_Q b_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}(z'-h)dxdt + \tfrac{1}{2}\int_Q b_i\tfrac{\partial z}{\partial x_i}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}h dxdt\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |b_i||\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}|\|z\||z'-h|dt + \tfrac{1}{2}\int_0^T |b_i||\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l}|\|z\|\|h\|dt\\ &\leqslant \tfrac{b}{2}\int_0^T \|z\||z'-h|dt + \tfrac{b}{2}\int_0^T\|z\|\|h\|dt\\ &\leqslant \tfrac{1}{4}b\int_0^T[\|z\|^2+|z'-h|^2dt + b\int_0^T\|z\||h|dt\\ &\leqslant b\int_0^T C\big(\int_0^T\|h\|ds\big)^2dt \leqslant bCT\big(\int_0^T\|h\|dt\big)^2.\end{aligned}$$

$\bullet -\frac{1}{2}\int_Q b_i z' \frac{\partial q_l}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_l} dxdt$

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\int_Q b_i z' \tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}\tfrac{\partial z}{\partial x_l} dxdt &= -\tfrac{1}{2}\int_Q b_i(z'-h)\tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}\tfrac{\partial z}{\partial x_l} dxdt - \tfrac{1}{2}\int_Q b_i h \tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}\tfrac{\partial z}{\partial x_l} dxdt \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T |b_i||z'-h|\|\tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}\|\|z\| dt + \tfrac{1}{2}\int_0^T |b_i|\|h\|\|\tfrac{\partial q_l}{\partial x_i}\|\|z\| dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{2} b \int_0^T |z'-h|\|z\| dt + \tfrac{1}{2} b \int_0^T \|h\|\|z\| dt \\
&\leqslant \tfrac{1}{4} b \int_0^T [|z'-h|^2 + \|z\|^2 dt + \tfrac{1}{2} b \int_0^T \|h\|\|z\| dt \\
&\leqslant b\int_0^T C\big(\int_0^T \|h\| ds\big)^2 dt \leqslant bCT\big(\int_0^T \|h\| dt\big)^2.
\end{aligned}$$

$\bullet -\frac{1}{2}\int_Q n^2 \frac{k'^2}{k^2}\frac{\partial q_l}{\partial x_l} z^2 dxdt$

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\int_Q n^2 \tfrac{k'^2}{k^2}\tfrac{\partial q_l}{\partial x_l} z^2 dxdt &= \tfrac{1}{2}\int_Q n^2 \tfrac{k'^2}{k^2} q_l 2z \tfrac{\partial z}{\partial x_l} dxdt \leqslant n^2 \tau k_0^{-2}\int_0^T |k'|\|z\|^2 dt \\
&\leqslant n^2\tau k_0^{-2}\int_0^T |k'| C\big(\int_0^T \|h\| ds\big)^2 dt \leqslant n^2 l_1 \tau k_0^{-2} C\big(\int_0^T \|h\| dt\big)^2.
\end{aligned}$$

$\bullet \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_l \nu_l \big(\frac{\partial z}{\partial \nu}\big)^2 d\Gamma dt$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma a_{ij}\nu_i\nu_j q_l \nu_l \big(\frac{\partial z}{\partial \nu}\big)^2 d\Gamma dt \geqslant \int_0^T\int_\Gamma \frac{a_0}{2}\big(\frac{\partial z}{\partial \nu}\big)^2 d\Gamma dt.$$

Assim, com as estimativas acima concluímos o resultado.

□

Teorema 4.0.3. *Toda solução* u *por transposição do problema (4.1) possui a regularidade*

$$u \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

e a aplicação linear

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Sigma) &\mapsto C(0,T;L^2(\Omega))\cap C^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\
\{u^0,u^1,v\} &\mapsto u
\end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. **Primeira etapa:** $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$

Fixemos $\{u^0,u^1,v\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Sigma)$. Da densidade dos espaços $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ e $H_0^2(0,T;H^2(\Gamma))$ em $L^2(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ e $L^2(\Sigma)$ respectivamente, podemos tomar as sequências (u_μ^0), (u_μ^1) e (v_μ) tais que

$$u_\mu^0 \to u^0 \text{ em } L^2(\Omega) \quad , \quad u_\mu^1 \to u^1 \text{ em } H^{-1}(\Omega) \quad , \quad v_\mu \to v \text{ em } L^2(\Sigma) \tag{4.17}$$

Considere γ a função traço sobre Γ. Assim devido as propriedade de γ existe $\nu_\mu \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $\gamma\widetilde{\nu}_\mu = \{\nu_\mu, 0\}$. Seja y_μ solução do problema

$$\left|\begin{array}{llllll} Ly_\mu & = & -L\widetilde{\nu}_\mu & & \text{em} & Q; \\ y_\mu & = & 0 & & \text{sobre} & \Sigma; \\ y_\mu(0) & = & u_\mu^0 & , \quad y'_{mu}(0) \quad u_\mu^1 & \text{em} & \Omega. \end{array}\right.$$

Da inclusão de $H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, temos pelo Teorema 2.0.4 que $y_\mu \in C(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$. Além disso, $\widetilde{\nu}_\mu \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Pela densidade de $D(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, a menos de subsequência, temos que $\widetilde{\nu}_\mu \in C(0,T;L^2(\Omega))$. Assim, $u_\mu = y_\mu + \widetilde{\nu}_\mu$ é solução por transposição do problema (4.1) com condições iniciais $\{u_\mu^0, u_\mu^1, \nu_\mu\}$ e $u_\mu \in C(0,T;L^2(\Omega))$. Então $u - u_\mu$ é solução por transposição do problema (4.1) com condições iniciais $\{u^0 - u_\mu^0, u^1 - u_\mu^1, \nu - \nu_\mu\}$. Por (4.12) temos que

$$\|u - u_\mu\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C[|u^0 - u_\mu^0| + \|u^1 - u_\mu^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nu - \nu_\mu\|_{L^2(\Sigma)}]$$

Passando o limite na desigualdade acima, segue que $u \to u_\mu$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$.

Segunda etapa: $u' \in C(0,T;H^{-1}(\Omega))$

De fato, considere $h \in D(Q)$ e z a solução fraca do problema

$$\left|\begin{array}{llllll} L^*z & = & h' & & \text{em} & Q \\ z & = & 0 & & \text{sobre} & \Sigma \\ z(T) & = & z'(T) & = \; 0 & \text{em} & \Omega \end{array}\right. \tag{4.18}$$

Usando as mudanças de variáveis (2.36), (2.37) e o Teorema 2.0.5:

$$\|z(t)\| + |z'(t) - h(t)| \leqslant C\int_0^T \|h\| dt \quad \forall t \in [0,T]$$

E pelo Lema 4.0.2:

$$\|\frac{\partial z}{\partial \nu}\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C\int_0^T \|h\| dt,$$

onde as constantes que aparecem acima independem de z e h. Como $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$, temos $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Das inclusões (1.3), segue que $u' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Então, no sentido das distribuições:

$$< u', h >= -\big(u, h'\big)_{L^2(Q)} = -\int_0^T \big(u, h'\big) dt.$$

Como u é solução por transposição de (4.1), u satisfaz (4.11) para $h = h'$. Assim, usando as estimativas acima e com raciocínio análogo ao que foi feito em (4.9), obtemos:

$$|<u', h>| = |-\int_0^T (u, h')| \leqslant C[|u^0| + \|u^1\| + \|v\|_{L^2(\Sigma)}] \int_0^T \|h\| dt, \quad \forall h \in D(Q).$$

Por densidade de $D(Q)$ em $L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$ a última desigualdade é válida para todo $h \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, portanto $u' \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$ e vale:

$$\|u'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C[|u^0| + \|u^1\| + \|v\|_{L^2(\Sigma)}]]. \tag{4.19}$$

Notemos que $< u' - u'_\mu, h >= -\int_0^T (u - u_\mu, h')dt$ e $u'_\mu \in C(0, T; H^{-1}(\Omega))$ pois $u_\mu \in C(0, T; L^2(\Omega))$. Temos, com raciocínio análogo ao da primeira parte, que $u'_\mu \to u$ e, portanto, $u' \in C(0, T; H^{-1}(\Omega))$. A continuidade da aplicação segue das desigualdades (4.12) e (4.19). □

Pela mudança de variáveis (2.36), definimos de maneira análoga a solução por transposição do problema

$$\left| \begin{array}{lllllll} Lu & = & 0 & & & \text{em} & Q; \\ u & = & v & & & \text{sobre} & \Sigma; \\ u(T) & = & u^0 & , & u'(T) = u^1 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right. \tag{4.20}$$

desta maneira, todos os resultado obtidos para o problema (4.1) são válidos para este problema. Vejamos agora o teorema que trata da controlabilidade exata para o problema (4).

Teorema 4.0.4. *Assumindo as condições (2.2) e seja T_0 dado por (3.8). Dado $T > T_0$, para condições iniciais $\{u^0, u^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, existe um controle $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ tal que a solução definida por transposição u do problema (4) satisfaça $u(T) = u'(T) = 0$.*

Demonstração. • **Primeira etapa:** Seja φ a solução fraca do problema

$$\left| \begin{array}{lllllll} L^*\varphi & = & 0 & & & \text{em} & Q \\ \varphi & = & 0 & & & \text{sobre} & \Sigma \\ \varphi(0) & = & \varphi^0 & , & \varphi'(0) = \varphi^1 & \text{em} & \Omega \end{array} \right. \tag{4.21}$$

com $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Então pelo Teorema 2.0.4, temos:

$$\varphi \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$$

Além disso pelos Teoremas 3.1.1 e 3.2.1, temos $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$ e, além disso existem constantes positivas C_1 e C_2 independentes de φ tais que:

$$C_1(T - T_0)E_0 \leqslant \|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))} \leqslant C_2(T + 1)E_0 \tag{4.22}$$

- **Segunda etapa:**

A partir da solução fraca φ construímos a solução por transposição ψ do problema

$$\left|\begin{array}{lcl} L\psi & = & 0 \quad \text{em} \quad Q; \\ \psi & = & \left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} & \text{sobre} \quad \Sigma(x^0); \\ 0 & \text{sobre} \quad \Sigma\ \Sigma(x^0); \end{array}\right. \\ \psi(T) & = & \psi'(T) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{4.23}$$

- **Terceira etapa:**

Pelo Teorema 4.0.3, $\psi \in C(0,T;L^2(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Pela equação (4.4), que garante a boa definição da solução por transposição e, com $\varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ (pela inclusão de $C(0,T;H^1_0(\Omega))$ em $L^1(0,T;L^2(\Omega)))$, temos:

$$\begin{array}{lcl} < L\psi, \varphi > & = & - < \psi'(0), \varphi^0 > + \big(\psi(0), \varphi^1\big) - \int_\Omega b_i(0)\frac{\partial\psi(0)}{\partial x_i}\varphi^0 dx + \int_\Sigma \psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_A} d\Gamma dt + \\ & & + \int_Q \psi L^*\varphi dx dt. \end{array}$$

Resultando,

$$< \psi'(0) - 2\frac{k'(0)}{k(0)}x_i\frac{\partial\psi(0)}{\partial x_i}, \varphi^0 > -\big(\psi(0), \varphi^1\big) = \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\nu_i\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\Gamma dt \tag{4.24}$$

A expressão (4.24), deixa bem definido a introdução do seguinte operador:

$$\begin{array}{lcl} \Lambda : H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) & \to & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma) \\ \{\varphi^0, \varphi^1\} & \mapsto & \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\psi'(0) - 2\frac{k'(0)}{k(0)}x_i\frac{\partial\psi(0)}{\partial x_i}, -\psi(0)\} \end{array} \tag{4.25}$$

Usando o Lema 3.0.4 e a desigualdade (4.22), obtemos:

$$a_0C_1(T-T_0)E_0 \leqslant a_0\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))} \leqslant \big\langle\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\}\big\rangle \leqslant a_1\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\|^2_{L^2(\Sigma(x^0))} \leqslant a_1C_2(T+1)E_0 \tag{4.26}$$

Como a solução fraca de (4.21) é única, para cada par de condições iniciais $\{\varphi^0, \varphi^1\}$, segue que o operador Λ é injetivo. Além disso, usando as mudanças de variáveis (2.36) $\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\nu}$ define a solução por transposição de (4.23). Desenvolvendo $\big\langle L\psi, \widetilde{\varphi}\big\rangle$ como em (4.24), temos:

$$\big\langle\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\widetilde{\varphi}^0, \widetilde{\varphi}^1\}\big\rangle = \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_j}\nu_i\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\Gamma dt$$

Analogamente, encontramos aplicando o Lema (3.0.4) para $\langle L\widetilde{\psi}, \varphi \rangle$:

$$\begin{aligned}\left\langle \Lambda\{\widetilde{\varphi}^0, \widetilde{\varphi}^1\}, \{\varphi^0, \varphi^1\} \right\rangle &= \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij} \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_j} \nu_i \tfrac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial \nu} d\Gamma dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} a_{ij} \tfrac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial x_j} \nu_i \tfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Gamma dt\end{aligned}$$

Podemos, assim, concluir que o operador Λ é autoadjunto. Além disso, por (4.26), Λ é um operador contínuo e coercivo, pois sua definição é uma forma bilinear. Então por Lax- Milgran, para cada $\{u^0, u^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{u^1 - 2\frac{k'(0)}{k(0)} x_i \frac{\partial u^0}{\partial x_i}, -u^0\}$$

Isto é, Λ é um isomorfismo de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ sobre $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Como $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ determinam de maneira única a solução fraca φ de (4.21), $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ determina de maneira única a solução por transposição de (4.23) e $\{u^0, u^1\}$ determinam de maneira única a solução do problema (1) nós temos que $u = \psi$ satisfaz todas as condições do Teorema. $\square$

Concluímos assim o resultado que garante o Controle Exato do problema (1).

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F. *Sobolev Sapaces*. New York: Elsevier, 2003.

[2] Bartle, R. G. -*The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: Wiley-Interscience Publication, 1995.

[3] Biezuner, R. J. - *Análise Funcional*. Notas de Aula. Belo Horizonte: UFMG,2009.

[4] Brezis, H.,*Functional Analysis , Sobolev Spaces and Partial Differencial Equations*. New york: Spriger, 2010.

[5] Castro, N. N. O. - *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano (2<p<3)*. João Pessoa: UFPB, 2005.

[6] Coddington, E. A., Levinson, N. *Theory of ordinary diferential equations*. New York: McGraw-Hill, 1987.

[7] de Oliveira, C.R. - *Introdução à Análise Funcional*. Publicações Matemáticas. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[8] Evangelista, I.S. -*Controlabilidade nula para um problema parabólico não linear em um domínio não cilíndrico*.2012. 88fl. (Dissertação de Mestrado). Centro de Ciências da Natureza, Departamento de Matemática, Teresina-PI.

[9] Evans, L. C. -*Partial Diferencial Equations*. v. 19. Providence: American Mathematical Society, 1998.

[10] MATOS, M. P., *Integral de Bochner e os espaços* $L^p(0, T; X)$. Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 1998.

[11] Medeiros, L. A. J - *Lições de Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2002.

[12] Medeiros, L. A. J. -*Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2006.

[13] MEDEIROS, L.A. e MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev: Iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*. UFRJ-IM, Rio de Janeiro, 2000.

[14] MEDEIROS, L.A. e MIRANDA, M. M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Textos e Métodos Matemáticos, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[15] MEDEIROS, L.A., *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, Parte I, IM- UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[16] Medeiros, L. A; Malta, S. ; Miranda, M. M. - *Tópicos de Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1998.

[17] Medeiros, L. A.,Miranda, M. M. e Lourêdo, A. T. *Introduction to exact control theory method HUM*. Campina Grande: EDUEPB, 2013.